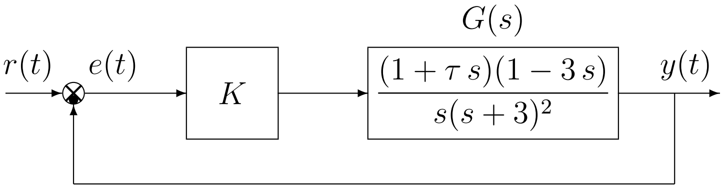
Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B
8 Giugno 2015 - Esercizi

a.1) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Posto $\tau = 0$ tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro K. Tracciare il luogo delle radici sia per $K > 0$ che per $K < 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. Posto $\tau = 0$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato diventa:

$$1 + K\frac{(1-3\,s)}{s(s+3)^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + K_1\frac{(s-0.333)}{s(s+3)^2} = 0$$

dove $K_1 = -3K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 1. Sono presenti due asintoti che coincidono con i semiassi

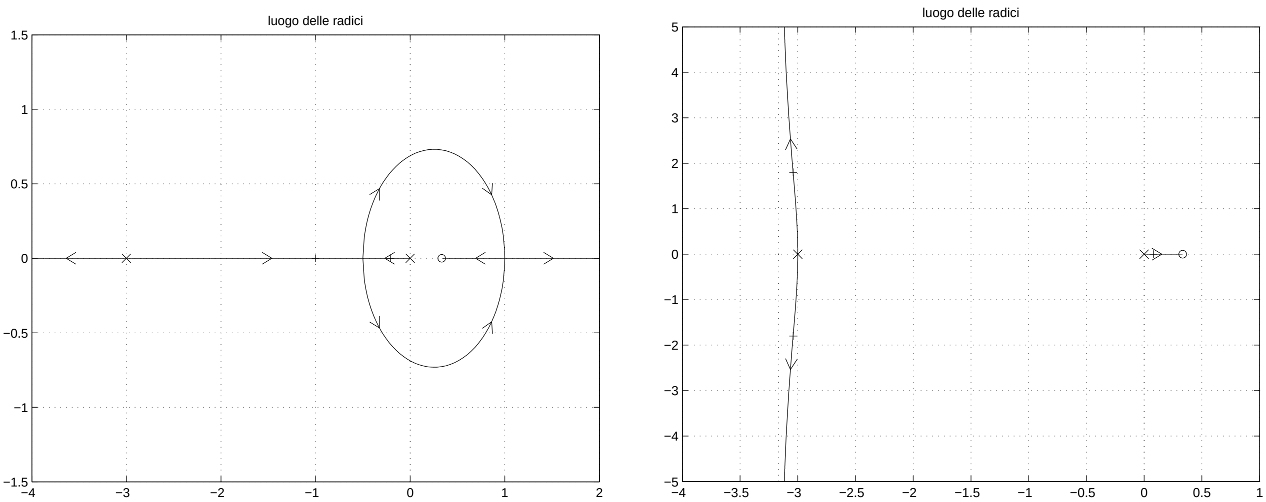


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro K. Le due figure sono relative, rispettivamente, ai casi $K > 0$ e $K < 0$.

reali (positivo e negativo) quando $K > 0$ e hanno una posizione verticale quando $K < 0$. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}\left(-6 - \frac{1}{3}\right) \qquad \longrightarrow \qquad \sigma_a = -\frac{19}{6}$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K\,G(s) = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 6\,s^2 + (9 - 3\,K)\,s + K = 0$$

$$\begin{array}{c|ccll}
3 & 1 & (9-3\,K) & \rightarrow & \\
2 & 6 & K & \rightarrow & \\
1 & 6(9-3\,K) - K & & \rightarrow & 54 - 19\,K > 0 \\
0 & K & & \rightarrow & K > 0
\end{array}$$

Il sistema risulta essere stabile per:

$$0 < K < \frac{54}{19} = 2.842 = K^*$$

Le intersezioni con l'asse immaginario si hanno in corrispondenza della pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{9 - 3\,K^*} = \sqrt{\frac{K^*}{6}} = 0.688$$

a.2) Posto $K = 1.25$ nel sistema retroazionato sopra definito, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$. Nella graficazione del contorno si tenga conto che: i) per $\tau = 0$ i poli del contorno sono posizionati in $p_1 = -0.5$, $p_2 = -0.5$ e $p_3 = -5$; ii) il sistema retroazionato è stabile per $\tau < \tau^*$. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo". Il calcolo di τ^* è facoltativo.

Sol. Posto $K = K_1$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1 + \frac{K_1(1+\tau\, s)(1-3\,s)}{s(s+3)^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s(s+3)^2 + K_1(1+\tau\, s)(1-3\,s) = 0$$

da cui si ricava l'equazione caratteristica $1 + \tau\, G_1(s) = 0$:

$$s(s+3)^2 + K_1(1-3\,s) + \tau\, K_1\, s(1-3\,s) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{\tau\, K_1\, s(1-3\,s)}{s(s+3)^2 + K_1(1-3\,s)} = 0$$

I poli della funzione $G_1(s)$ sono quelli indicati sopra:

$$1 + \frac{\tau\, K_1\, s(1-3\,s)}{(s+0.5)^2(s+5)} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$ è mostrato in Fig. 2.

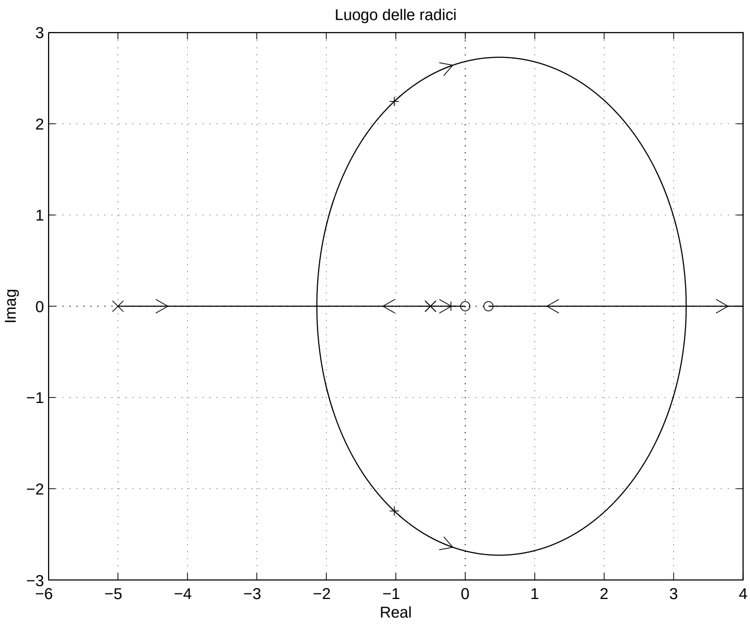


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\tau > 0$.

Il valore limite τ^* e l'intersezione ω^* del contorno delle radici con l'asse immaginario si determinano utilizzando il criterio di Routh:

$$s(s+3)^2 + 1.25(1-3\,s) + \tau\, 1.25\, s(1-3\,s) = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (6-3.75\,\tau)s^2 + (5.75+1.25\tau)s + 1.25 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & (5.75+1.25\tau) & \rightarrow & 1 > 0 \\
2 & (6-3.75\,\tau) & 1.25 & \rightarrow & \tau < \frac{6}{3.75} = 1.6 \\
1 & (6-3.75\,\tau)(5.75+1.25\tau) - 1.25 & & \rightarrow & > 0 \\
0 & 1.25 & & \rightarrow & 1.25 > 0
\end{array}$$

La disequazione di riga 1:

$$(6-3.75\,\tau)(5.75+1.25\tau) - 1.25 > 0 \qquad \rightarrow \qquad -4.688\,\tau^2 - 14.06\,\tau + 33.25 > 0$$

ammette le seguenti soluzioni:

$$-4.5567 < \tau < 1.5567 = \tau^*$$

Il sistema retroazionato è stabile per:

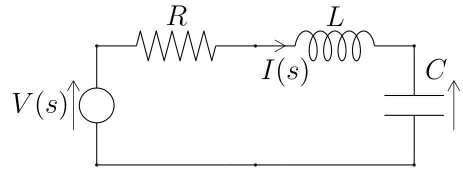
$$0 < \tau < 1.5567 = \tau^*$$

L'intersezione con l'asse immaginario si ha in corrispondenza della pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{(5.75 + 1.25\tau^*)} = \sqrt{\frac{1.25}{(6 - 3.75\,\tau^*)}} = 2.774$$

a.3) Sia data la funzione $G(s)$ che descrive la dinamica del sistema mostrato in figura:

$$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{C\,s}{CL\,s^2 + RC\,s + 1} \qquad \Leftrightarrow$$



Posto $C = 1$ e $R = 1$, calcolare il valore dell'induttanza L a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento della risposta al gradino del sistema $G(s)$.

Sol. I poli della funzione $G(s)$ sono le soluzioni dell'equazione:

$$L\,s^2 + s + 1 = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + L\,\frac{s^2}{s+1} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + L\,G_1(s) = 0$$

Il contorno delle radici della funzione $G_1(s)$ al variare del parametro $L > 0$ è mostrato in Fig. 3.

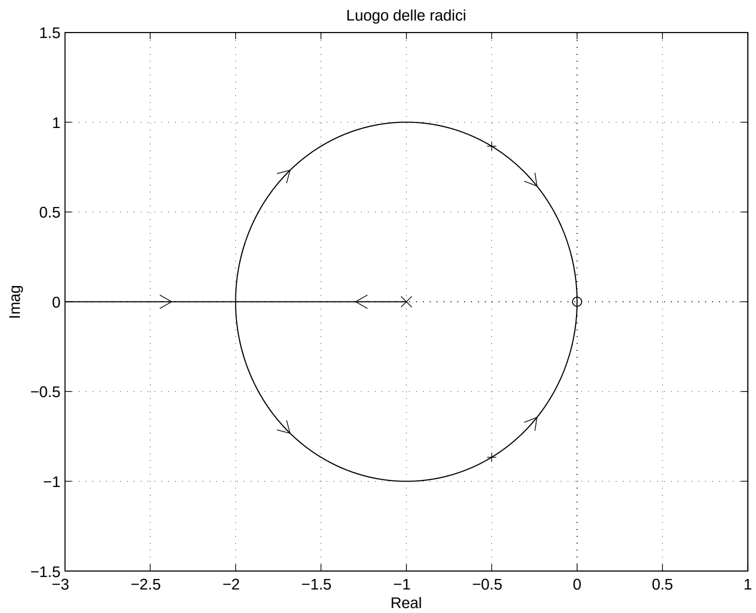


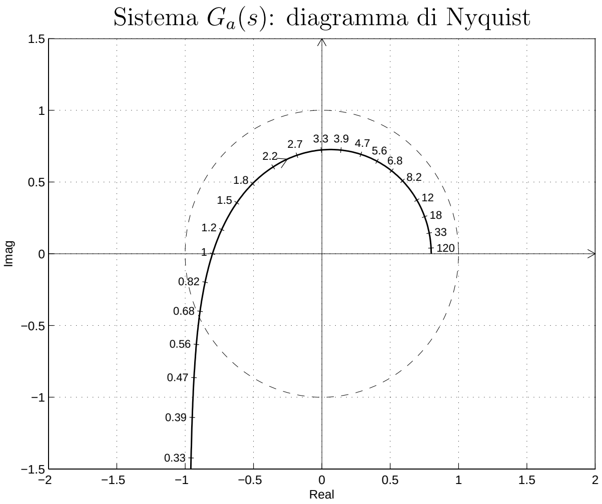
Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $m > 0$.

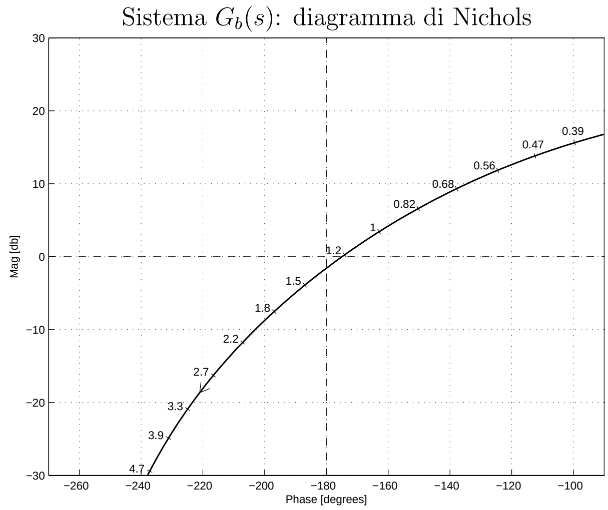
Nel contorno delle radici è presente un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo, percorso dall'infinito a finito.

Il minimo tempo di assestamento della risposta al gradino del sistema $G(s)$ si ottiene quando i poli del sistema $G(s)$ sono alla massima distanza dall' asse immaginario. Questa condizione si ha quando i due poli del sistema si trovano nel punto di diramazione $\sigma_0 = -2$ del contorno delle radici mostrato in Fig. 3. Il corrispondente valore di L si calcola nel seguente modo:

$$L = -\left.\frac{1}{G_1(s)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{4}$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:





b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di ampiezza $M_a = 5$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B \, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 0.2$ e $\varphi_B = 180°$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 4.

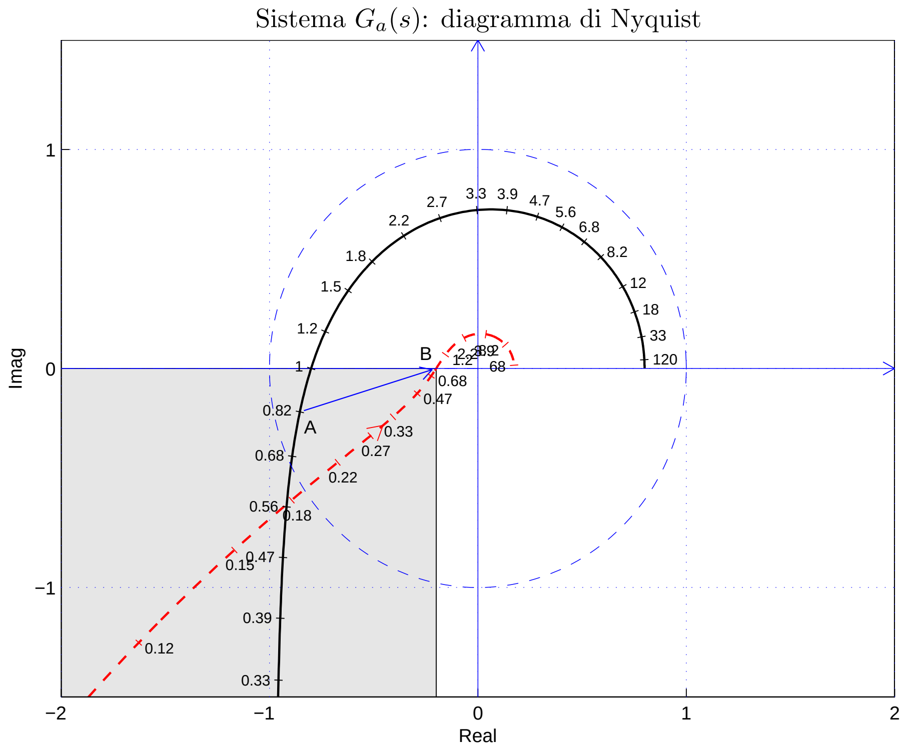


Figura 4: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)\, G_a(s)$.

Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 0.82$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.8769, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 193.1°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 4.024$ e $\tau_2 = 10.44$ della rete correttrice $C(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.22808, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -13.07° \qquad \rightarrow \qquad C_1(s) = \frac{(1 + 4.024\, s)}{(1 + 18.4\, s)}.$$

Il diagramma di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 4.
Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$
\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\ 0.82 \quad 0.68 \quad 0.56 \quad 0.47 \quad 0.39 \quad 0.33\ ] \\
M_A = & [\ 0.8769 \quad 0.977 \quad 1.114 \quad 1.272 \quad 1.483 \quad 1.715\ ] \\
\varphi_A = & [\ -166.9 \quad -155.8 \quad -145.5 \quad -137.3 \quad -129.7 \quad -123.9\ ] \\
M = & [\ 0.2281 \quad 0.2047 \quad 0.1795 \quad 0.1572 \quad 0.1349 \quad 0.1166\ ] \\
\varphi = & [\ -13.07 \quad -24.24 \quad -34.54 \quad -42.7 \quad -50.25 \quad -56.09\ ] \\
\tau_1 = & [\ 4.024 \quad 2.533 \quad 2.029 \quad 1.813 \quad 1.683 \quad 1.611\ ] \\
\tau_2 = & [\ 18.4 \quad 14.23 \quad 14.95 \quad 17.66 \quad 22.6 \quad 29.27\ ]
\end{array}
$$

b.2) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete anticipatrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 40^o$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Sol. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = -140°$. La regione di ammissibilitá è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione

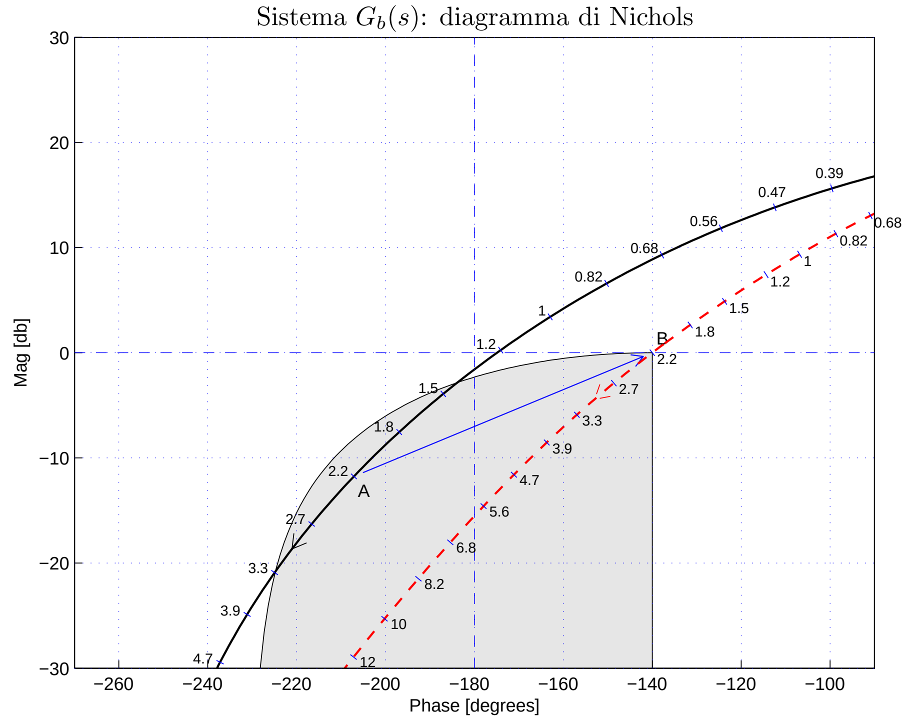


Figura 5: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_2(s)\,G_a(s)$.

$\omega_A = 2.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.2583, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -207.1°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 1.718$ e $\tau_2 = 0.0644$ della rete correttrice $C_2(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 3.871, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 67.1° \qquad \rightarrow \qquad C_2(s) = \frac{(1 + 1.718\, s)}{(1 + 0.0644\, s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ $C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 5.
Sintesi della rete correttrice $C_2(s)$ per alcuni valori della pulsazione ω_A:

$$
\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\ 1.5 \quad 1.8 \quad 2.2 \quad 2.7\ ] \\
M_A = & [\ 0.6373 \quad 0.4197 \quad 0.2583 \quad 0.1534\ ] \\
\varphi_A = & [\ 173 \quad 163.1 \quad 152.9 \quad 143.4\ ] \\
M = & [\ 1.569 \quad 2.382 \quad 3.871 \quad 6.519\ ] \\
\varphi = & [\ 47 \quad 56.9 \quad 67.1 \quad 76.6\ ] \\
\tau_1 = & [\ 0.8085 \quad 1.218 \quad 1.718 \quad 2.394\ ] \\
\tau_2 = & [\ 0.0406 \quad 0.0834 \quad 0.0644 \quad 0.0297\ ]
\end{array}
$$

b.3) Sempre per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete ritardatrice in modo che la funzione di risposta armonica del sistema compensato passi per il punto $B = (-160^o, -10 \text{ db})$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Soluzione. La specifica di progetto definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = -10$ db $= 0.3162$ e $\varphi_B = -160°$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 6.

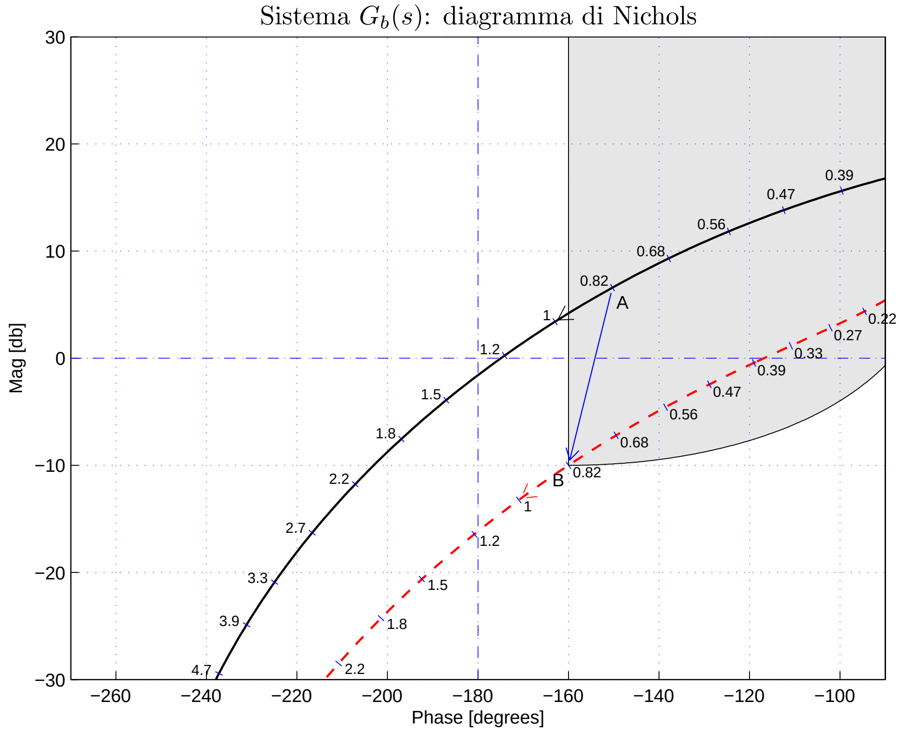


Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_3(s)\, G_b(s)$.

Il punto $A = G(j\omega_A)$ scelto per essere portato in B è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 0.82$:

$$M_A = 2.134, \qquad \varphi_A = -150.28°.$$

I valori di M e φ da usare nelle formule di inversione sono i seguenti:

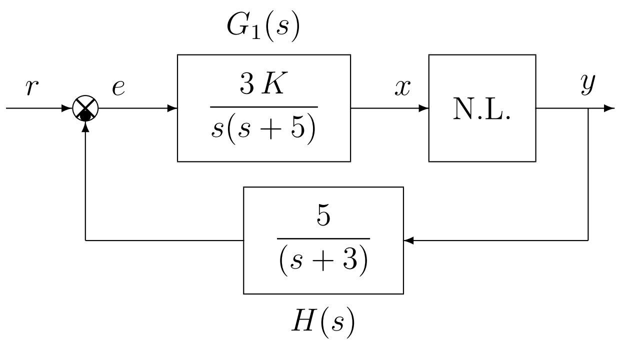
$$M = \frac{M_B}{M_{A'}} = 0.1481, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_{A'} = -9.713° \quad \rightarrow \quad C_3(s) = \frac{(1 + 6.054\, s)}{(1 + 41.66\, s)}.$$

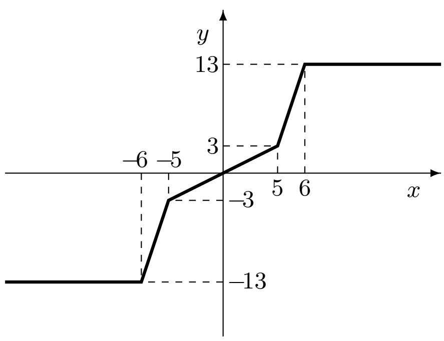
I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_3(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 6.

Sintesi della rete correttrice $C_3(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$\omega_A =$	[0.82	0.68	0.56	0.47	0.39]
$M_A =$	[2.134	2.921	3.904	4.907	6.038]
$\varphi_A =$	[−150.3	−137.8	−124.6	−112.4	−99.58]
$M =$	[0.1482	0.1083	0.081	0.0644	0.0523]
$\varphi =$	[−9.713	−22.15	−35.43	−47.58	−60.42]
$\tau_1 =$	[6.054	3.19	2.26	1.759	1.301]
$\tau_2 =$	[41.66	32.41	35.52	42.79	54.85]

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





c.1) Posto $K = 1$, determinare per quale valore r^* del riferimento r il punto di lavoro del sistema retroazionato coincide con il punto $(x_0, y_0) = (5, 3)$.

Sol. Il guadagno statico del sistema $G_1(s)$ è infinito, per cui la retta di carico è orizzontale:

$$y = \frac{r}{K_2\, K_3} = \frac{3\, r}{5} \qquad \text{dove} \qquad K_2 = 1, \quad K_3 = \frac{5}{3}$$

Il valore r^* si ottiene ponendo $y = 3$ nella retta di carico:

$$3 = \frac{3\, r^*}{5} \qquad \rightarrow \qquad r^* = 5.$$

c.2) Posto $K = 1$, $r = r^*$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile nell'intorno del punto di lavoro $(x_0, y_0) = (5, 3)$.

Sol. Per $r = r^*$ il punto di lavoro coincide con il punto $(x_0, y_0) = (5, 3)$. Le pendenze delle 2 rette che passano nel punto di lavoro e che racchiudono a settore tutta la non linearità sono:

$$\alpha = 0, \qquad\qquad \beta = 10.$$

In questo caso il cerchio critico degenera in un semipiano delimitato dalla retta verticale

$$x = -\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{10}$$

Per $K = 1$, il guadagno d'anello del sistema è:

$$G(s) = G_1(s)\, H(s) = \frac{15}{s(s+5)(s+3)}$$

Il margine di ampiezza K^* e la pulsazione ω^* della funzione $G(s)$ sono i seguenti:

$$K^* = \frac{3 \cdot 5(3+5)}{15} = 8, \qquad\qquad \omega^* = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15} = 3.873.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ interseca sicuramente il cerchio critico per cui non si può dire nulla sulla stabilità del punto $(x_0, y_0) = (5, 3)$ perchè il criterio del cerchio è un criterio solo sufficiente. In Fig. 7 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ sovrapposto al cerchio critico.

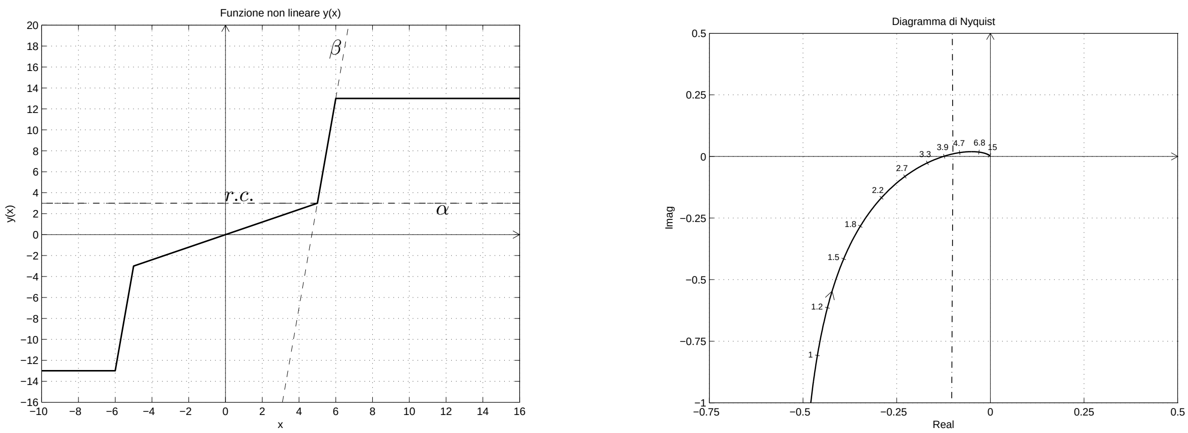


Figura 7: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ e cerchio critico.

c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità N.L. assegnata, prendendo l'origine come punto di lavoro. Utilizzare delle variabili (per esempio: m_1, m_2, ...) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

Sol. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ quando è mostrato in Fig. 8. Indichiamo: a) con $m_0 = 0.6$ il valore iniziale della funzione $F(X)$ per $X < 5$; b) con $m_1 \simeq 1.62$ il valore massimo della funzione $F(X)$ per $X \simeq 7.3$; c) con $m_2 = 0$ il valore finale della funzione $F(X)$ per $X \to \infty$.

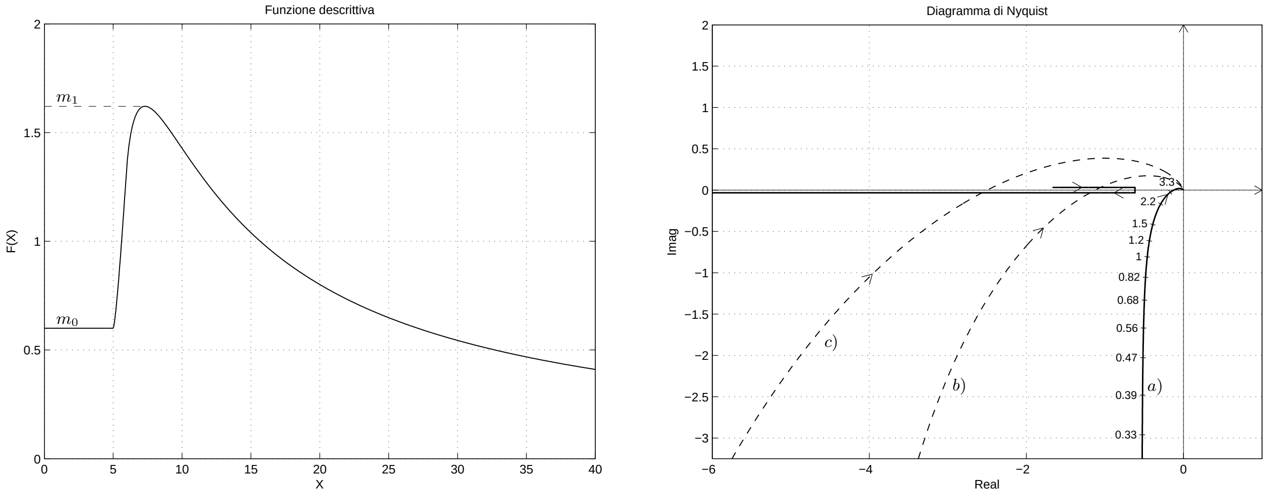


Figura 8: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

c.4) Discutere "qualitativamente" (in funzione anche dei parametri m_1 ed m_2) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

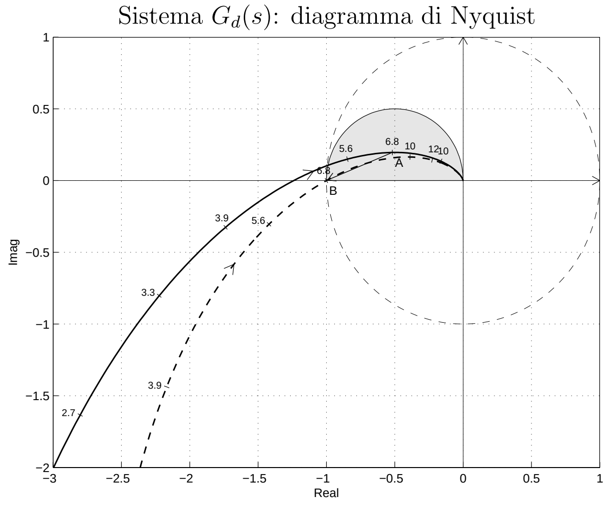
Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema G(s) è $K^* = 8$. Al variare di K si hanno quindi queste 3 possibili soluzioni:

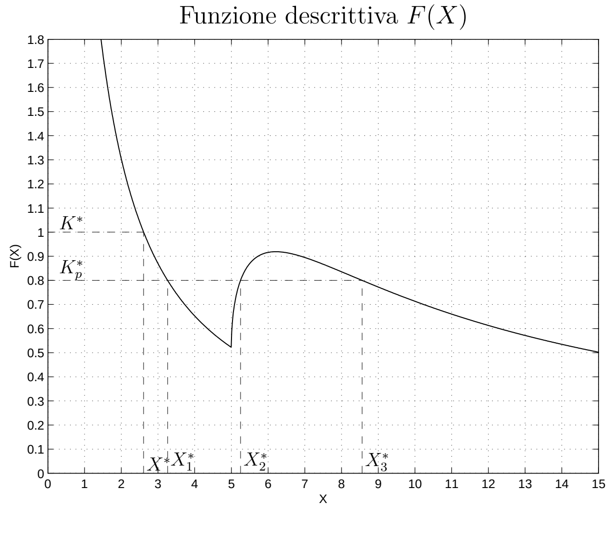
1) $-\dfrac{1}{m_1} < -\dfrac{K}{K^*}$: la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.

2) $-\dfrac{1}{m_0} < -\dfrac{K}{K^*} < -\dfrac{1}{m_1}$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in 2 punti a cui corrispondono 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).

3) $-\dfrac{K}{K^*} < -\dfrac{1}{m_0}$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

d) Sia dato il diagramma di Nyquist di un sistema $G_d(s)$ posto in retroazione negativa su di una non linearità $y = y(x)$ di cui viene fornita la funzione descrittiva $F(X)$.





d.1) Nei limiti della precisione dei grafici forniti, determinare l'ampiezza X^*, la pulsazione ω^* e la stabilità degli eventuali cicli limite presenti nel sistema retroazionato.

Sol. Dal diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ si può leggere chiaramente il margine di ampiezza K_1^* del sistema e la pulsazione ω_1^* di attraversamento del semiasse reale negativo:

$$K_1^* \simeq -\frac{1}{-1.25} = 0.8, \qquad \omega_1^* = 4.7.$$

Gli eventuali cicli limite si determinano imponendo $F(X) = K_1^*$. Utilizzando il grafico della funzione $F(X)$ si individuano tre cicli limite:

$$X_1^* \simeq 3.263, \qquad X_2^* \simeq 5.249, \qquad X_3^* \simeq 8.559$$

il primo e il terzo stabili e il secondo instabile. La pulsazione ω^* di tutti e tre i cicli limite è $\omega^* = \omega_1^* = 4.7$.

d.2) Progettare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete correttrice $C_d(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ da mettere in cascata al sistema $G_d(s)$ in modo che il sistema retroazionato abbia un ciclo limite stabile di ampiezza $X^* = 2.61$ in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 6.8$.

Sol. Dal grafico della funzione $F(X)$ si ricava che nel sistema retroazionato sarà presente un ciclo limite stabile con ampiezza $X^* = 2.61$ solo se il margine di ampiezza del sistema $C_d(s)G_d(s)$ vale $K^* = F(X)|_{X=2.61} = 1$. Tale valore identifica completamente il modulo e la fase del punto $B = -\frac{1}{K^*} = -1$ da utilizzare nella sintesi della rete correttrice:

$$M_B = 1, \qquad \varphi_B = 180^o$$

In punto A è completamente determinato dalla specifica sulla pulsazione $\omega^* = 6.8$. Il modulo e la fase del punto A si ricavano in modo approssimato dal grafico:

$$M_A = 0.5536, \qquad \varphi_A = 159.31^o.$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 1.806, \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 20.69^o$$

La rete ritardatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega\,\sin\varphi} = 0.3623, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega\,\sin\varphi} = 0.1589 \qquad \rightarrow \qquad C_1(s) = \frac{1 + 0.3623\,s}{1 + 0.1589\,s}$$

e) Partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 2$, calcolare la risposta $y(n)$ del seguente sistema dinamico discreto:

$$y(n+1) + 0.4\,y(n) = 3\,x(n)$$

quando in ingresso è presente un gradino di ampiezza unitaria $x(n) = 1$.

Sol. Applicando la $\mathcal{Z}$-trasformata alla precedente equazione alle differenze con condizione iniziale nulla $y(0) = 2$ si ottiene:

$$z\,[Y(z) - 2] + 0.4\,Y(z) = 3\,X(z) \qquad \rightarrow \qquad Y(z) = \frac{2\,z}{z+0.4} + \frac{3}{z+0.4}\,X(z)$$

Aggiungendo la trasformata del segnale di ingresso si ottiene:

$$Y(z) = \frac{2\,z}{z+0.4} + \frac{3\,z}{(z+0.4)(z-1)}$$

Scomponendo in fratti semplici si ha:

$$Y(z) = \frac{2\,z}{z+0.4} + \frac{3}{1.4}\left[\frac{z}{(z-1)} - \frac{z}{(z+0.4)}\right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = 2(-0.4)^n + \frac{3}{1.4}\,[1 - (-0.4)^n] = 2.143 - 0.143(-0.4)^n.$$

f) Utilizzando il metodo delle trasformazione bilineare, discretizzare la seguente rete correttrice:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+5)}{s(s+1)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Sol. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare e $T = 0.1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} D(z) = \left.\frac{(s+5)}{s(s+1)}\right|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} &= \frac{T(1+z^{-1})(2(1-z^{-1})+5T(1+z^{-1}))}{2(1-z^{-1})(2(1-z^{-1})+T(1+z^{-1}))} \\ &= \frac{T(1+z^{-1})(2+5T+(5T-2)z^{-1})}{2(1-z^{-1})(2+T+(T-2)z^{-1})} \\ &= \frac{(1+z^{-1})(2.5-1.5z^{-1})}{20(1-z^{-1})(2.1-1.9z^{-1})} \end{aligned}$$

cioè:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{2.5+z^{-1}-1.5z^{-2}}{42-80z^{-1}+38z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m_k = \frac{1}{42}(80\, m_{k-1} - 38\, m_{k-2} + 2.5\, e_k + e_{k-1} - 1.5\, e_{k-2})$$

cioè:

$$m_k = 1.905\, m_{k-1} - 0.905\, m_{k-2} + 0.06\, e_k + 0.024\, e_{k-1} - 0.036\, e_{k-2}$$

Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B

8 Giugno 2015 - Domande Teoriche

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considerata corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

1. Il tempo di assestamento T_a della risposta impulsiva $g(k)$ del sistema discreto $G(z) = \frac{z}{z-0.5}$ è:

○ $T_a = 3\,|\frac{1}{T}\ln(0.5)|$; ○ $T_a = 3/|T\ln(0.5)|$; ⊗ $T_a = 3/|\frac{1}{T}\ln(0.5)|$;
○ $T_a = 3\,|\frac{1}{T}\log_{10}(0.5)|$; ○ $T_a = 3/|T\log_{10}(0.5)|$; ○ $T_a = 3/|T\log_{10}(0.5)|$;

2. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{2(s+2)}{(s-1)((s+2)^2+1)}$ al variare del parametro $K > 0$. Calcolare:

1) L'ascissa σ_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

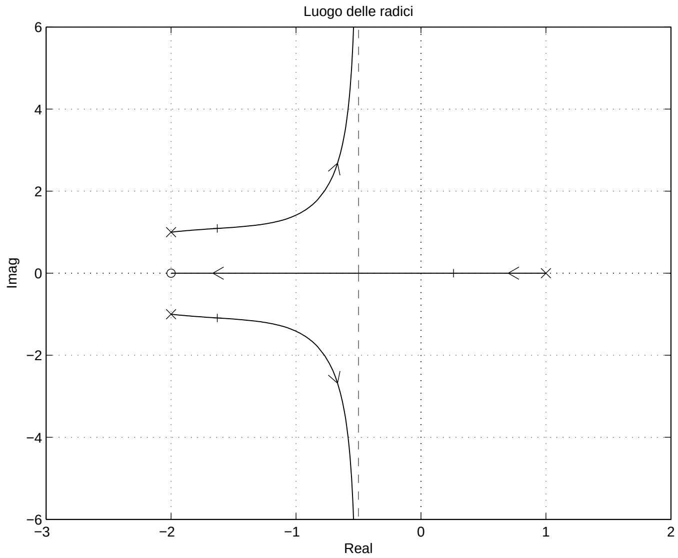
$$\sigma_0 = -1$$

2) Il valore K_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

$$K_0 = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=-1} = 2$$

3) Il valore limite K^* per la stabilità del sistema retroazionato:

$$K^* = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=0} = \frac{5}{4}$$



3. Il valore iniziale $x(0)$ della sequenza $x(k)$ corrispondente alla funzione $X(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z+0.5)}$ è:

⊗ $x(0) = 0$ ○ $x(0) = 1$ ○ $x(0) = 2$ ○ $x(0) = 6$

4. Il valore a regime $x(\infty)$ della sequenza $x(k)$ corrispondente alla funzione $X(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z+0.5)}$ è:

○ $x(\infty) = 0$ ○ $x(\infty) = 1$ ⊗ $x(\infty) = 2$ ○ $x(\infty) = 6$

5. L'uso di un regolatore standard di tipo PD è consigliato:

○ Se si desidera avere errore a regime nullo per ingresso a gradino
⊗ Se si desidera introdurre un anticipo di fase alle alte frequenze
⊗ Se si desidera introdurre una amplificazione delle ampiezze alle alte frequenze
○ Per stabilizzare sistemi retroazionati con margini di fase fortemente negativi

6. Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z+5}{z^3 + 6\,z^2 + 4\,z + 2} \qquad \rightarrow \qquad y_{k+3} + 6\,y_{k+2} + 4\,y_{k+1} + 2\,y_k = 3\,x_{k+1} + 5\,x_k$$

7. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine 0:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

8. La funzione discreta $D(z)$ riportata sotto è stata ottenuta dalla funzione $D(s)$ utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri. Calcolare il parametro k imponendo l'uguaglianza dei guadagni alle alte frequenze:

$$D(s) = \frac{s+1}{s+2} \qquad \rightarrow \qquad D(z) = k\,\frac{z-e^{-T}}{z-e^{-2T}} \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{1+e^{-2T}}{1+e^{-T}},$$

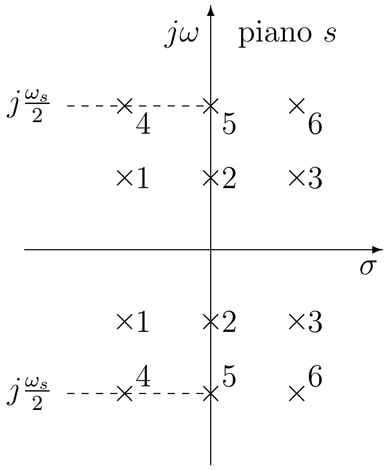
9. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con un elevato guadagno statico d'anello

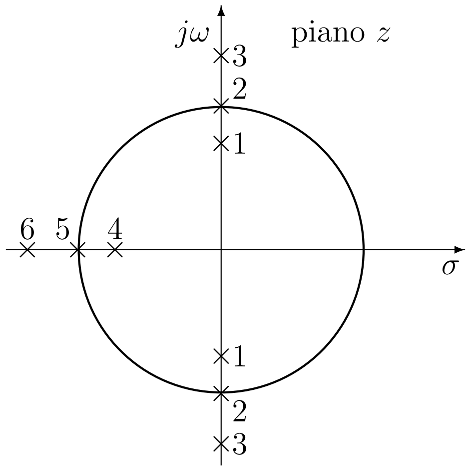
⊗ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$

⊗ è molto sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$

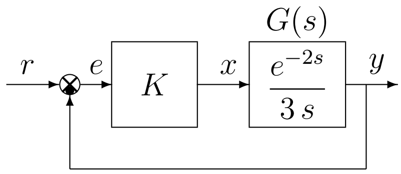
○ è molto sensibile alla presenza di disturbi costanti agenti sul sistema

10. In base al legame teorico a tra il piano s e il piano z, tracciare qualitativamente sul piano z le posizioni dei poli 1, 2, 3, ..., 6 che sono stati evidenziati con delle crocette sul piano s:





11. Sia dato il seguente sistema retroazionato che è stabile per $K < K^*$. Determinare il valore di K^* e il valore della pulsazione ω^* per la quale la $G(j\omega)$ attraversa il semiasse reale negativo:



$$K^* = \frac{3\pi}{4} = 2.356 \qquad \omega^* = \frac{\pi}{4} = 0.7854$$

12. La $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ della sequenza $x(kT)$ è definita nel seguente modo:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k}$$

13. Fornire la definizione di larghezza di banda ω_f di un sistema dinamico $G(s)$:

... è la pulsazione alla quale il modulo della risposta armonica $G(j\omega)$ del sistema $G(s)$ è inferiore di 3 db rispetto al valore statico $G(0)$.

14. Quale dei seguenti parametri della risposta al gradino di un sistema $G(s)$ è maggiormente influenzato dalla larghezza di banda ω_f del sistema stesso:

○ tempo di ritardo T_r ○ tempo di assestamento T_a

⊗ tempo di salita T_s ○ massima sovraelongazione S

15. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema discreto $G(z)$ si determina nel seguente modo:

○ $F(\omega) = G(e^{j\omega})$ ⊗ $F(\omega) = G(e^{j\omega T})$ ○ $F(\omega) = G(j\omega)$ ○ $F(\omega) = G(j\omega T)$