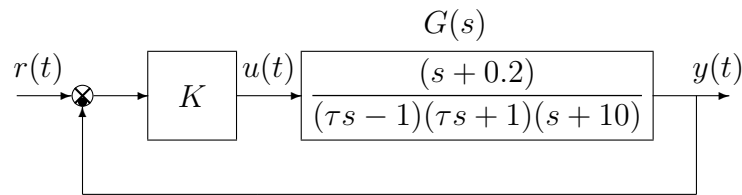


Controlli Automatici B
8 Giugno 2012 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Posto $\tau = 1$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^* . Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Soluzione. Posto $\tau = 1$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K G(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{K(s + 0.2)}{(s - 1)(s + 1)(s + 10)} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare di $K > 0$ è mostrato in Fig. 1. Il luogo delle radici è caratterizzato da due asintoti. I due asintoti sono verticali e si

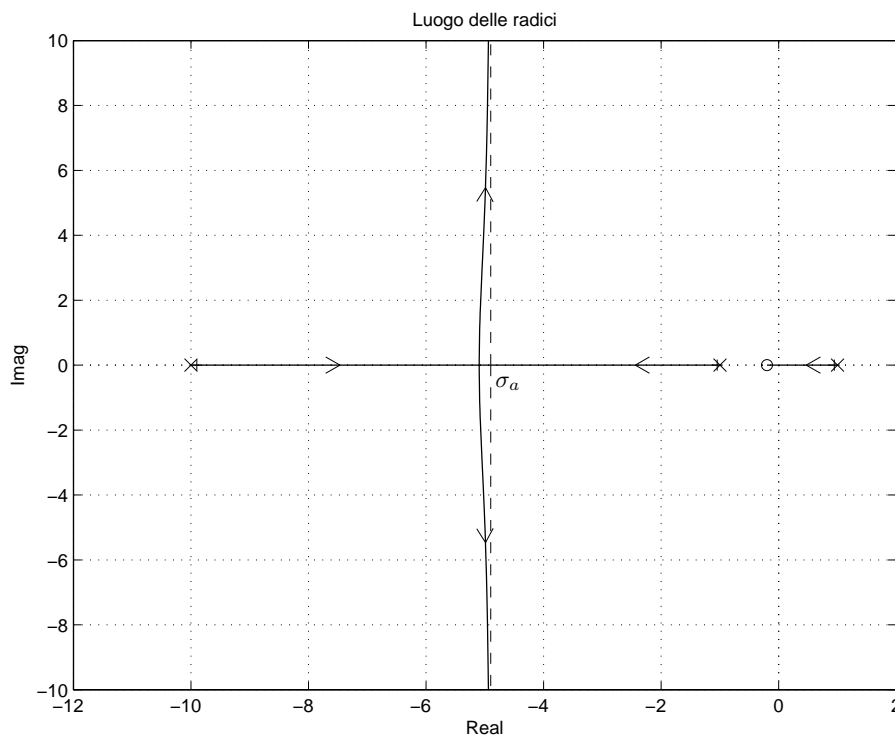


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare di $K > 0$.

incontrano nel seguente punto σ_a :

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-10 + 0.2) = -4.9.$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola applicando il criterio di Routh alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + \frac{K(s + 0.2)}{(s - 1)(s + 1)(s + 10)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 10s^2 + (K - 1)s + 0.2K - 10 = 0.$$

La corrispondente tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K-1 \\ 2 & 10 & 0.2K-10 \\ 1 & 10(K-1)-0.2K+10 & \\ 0 & 0.2K-10 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow K > 0 \\ \rightarrow K > 50 \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per $K > 50 = K^*$. La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è $\omega^* = 0$. L'intersezione con l'asse immaginario avviene in corrispondenza dell'origine. Il valore di K^* poteva essere determinato anche utilizzando la seguente formula:

$$K^* = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=0} = 50.$$

a.2) Posto $K = 100$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\alpha = \tau^2 > 0$. Determinare la posizione dei punti di diramazione e le eventuali intersezioni con l'asse immaginario "solo in modo qualitativo". Tracciare il contorno delle radici tenendo conto che sull'asse reale negativo sono presenti due punti di diramazione nelle posizioni $\sigma_1 \simeq -5$ e $\sigma_2 \simeq -0.2$.

Soluzione. Posto $K = 100$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{100(s+0.2)}{(\tau s-1)(\tau s+1)(s+10)} = 0 \quad \rightarrow \quad (\tau s-1)(\tau s+1)(s+10) + 100(s+0.2) = 0$$

Mediante semplici passaggi algebrici si ottiene la relazione:

$$1 + \tau G_1(s) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\tau^2 s^2 (s+10)}{99s+10} = 0.$$

Il sistema $G_1(s)$ ha due zeri nell'origine, uno zero in -10 e un polo in $p_1 = -0.101$:

$$z_{1,2} = 0, \quad z_3 = -10, \quad p_1 = -0.101.$$

Il luogo delle radici della funzione $G_1(s)$ per $\tau^2 > 0$ è mostrato in Fig. 2.

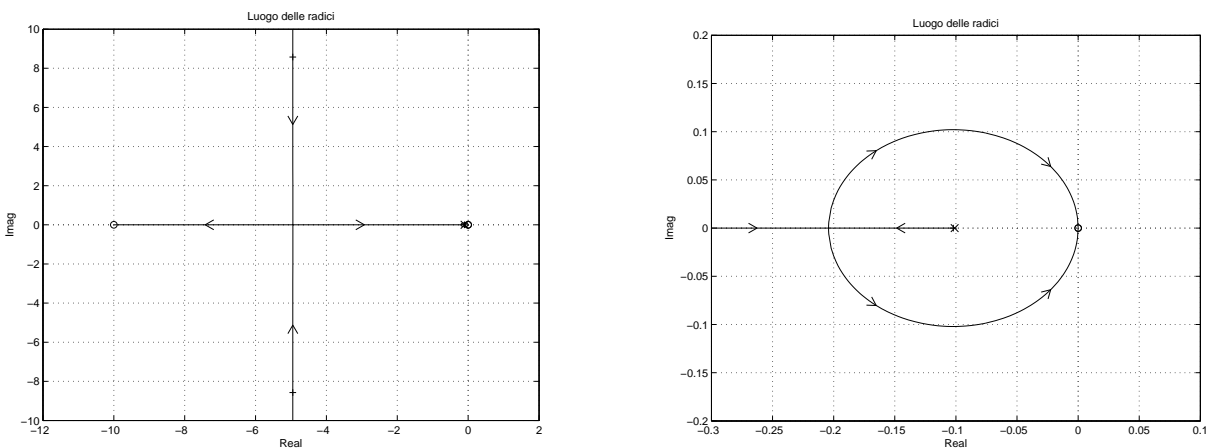
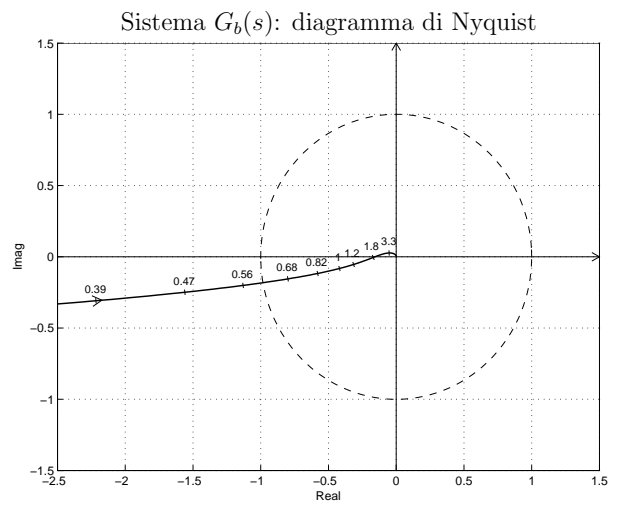
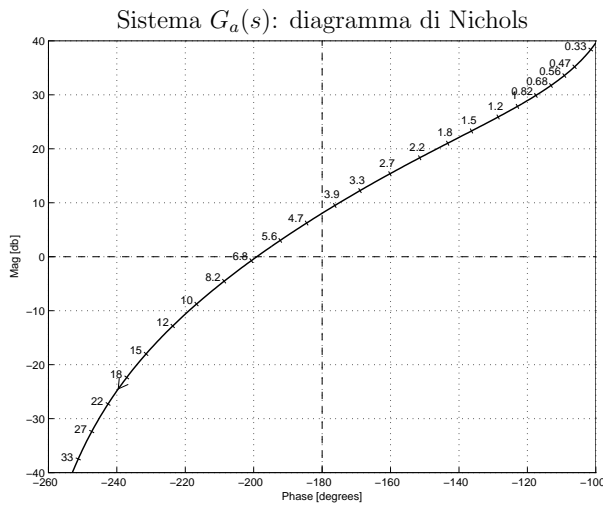


Figura 2: Contorno delle radici della funzione $G_1(s)$ per $\tau^2 > 0$.

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:



b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttiva in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Sol. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = -14$ db = 0.2 e $\varphi_B = -180^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 3. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 3.3$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 4.0961, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 191.1^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 1.47$ e $\tau_2 = 30.7$ della rete correttiva $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0488, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -111.1^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 1.47s)}{(1 + 30.7s)}.$$

Il diagramma di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 3.

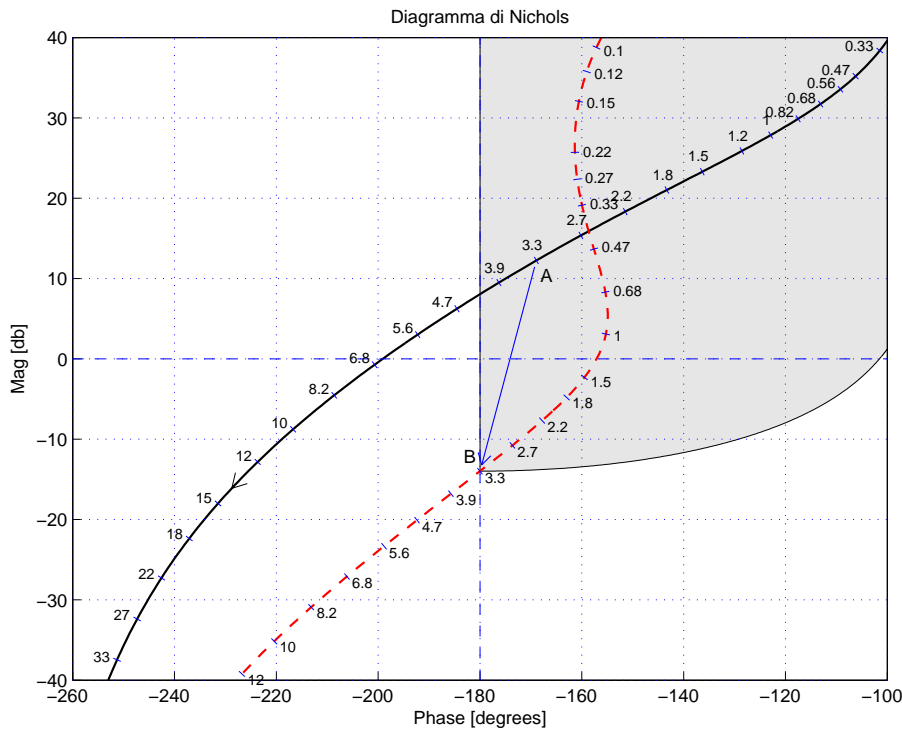


Figura 3: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$.

Nel caso $\omega_A = 18$ si ha:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.0762, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -237.1^\circ.$$

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 2.624, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 57.1^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.1377 s)}{(1 + 0.0107 s)}.$$

Il diagramma di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ nel caso $\omega = 18$ sono mostrati in Fig. 4.

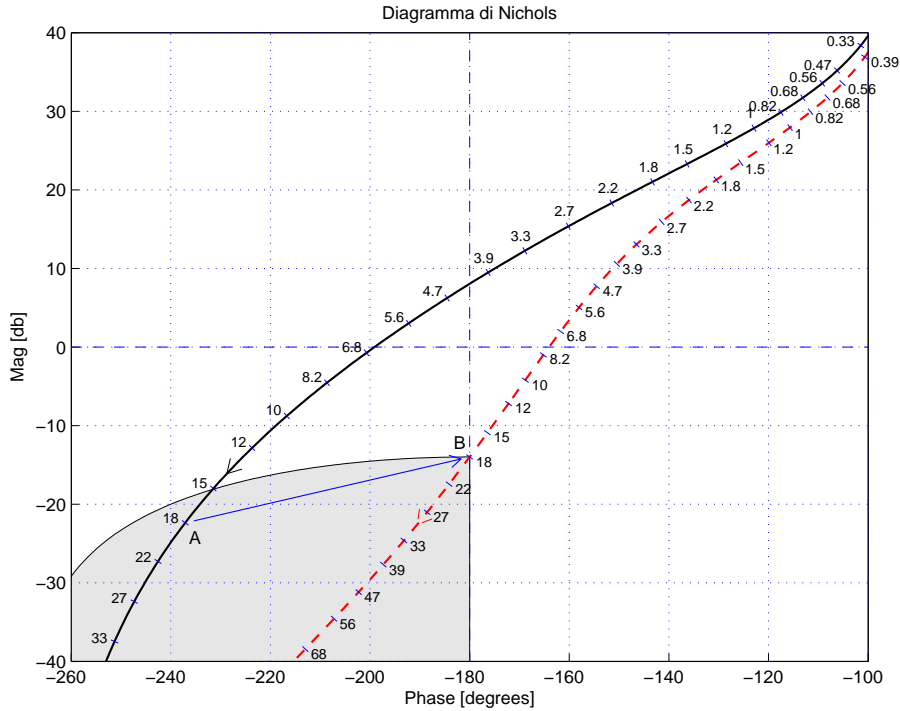


Figura 4: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ nel caso $\omega = 18$.

- b.2) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete correttiva in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Sol. La specifica sul margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 240^\circ$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttiva è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.2$:

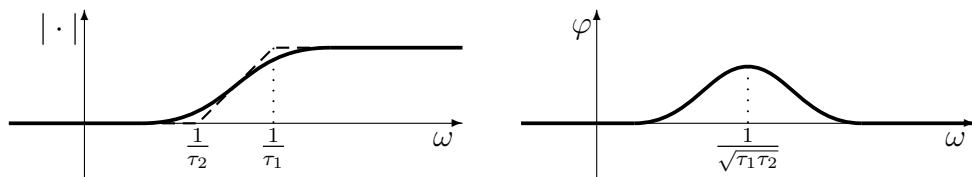
$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.319, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 189.7^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 2.702$ e $\tau_2 = 0.346$ della rete correttiva $C(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 3.1333, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 50.29^\circ \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 2.702 s)}{(1 + 0.346 s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni $G(s) C_2(s)G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

- b.3) Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete anticipatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\tau_2 s)}$, ($\tau_1 > \tau_2$):



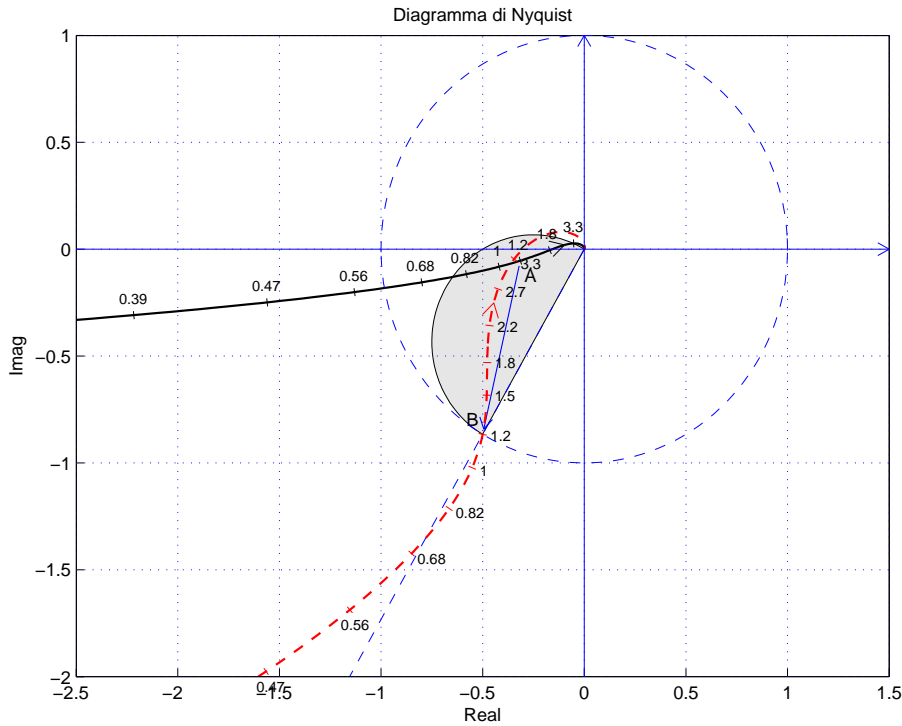
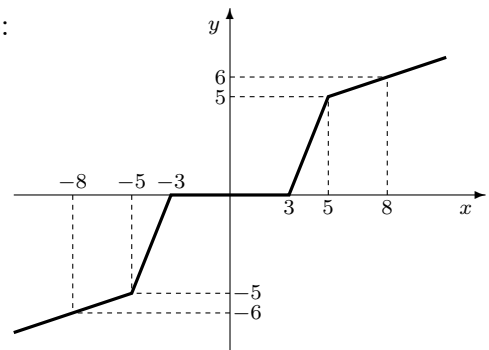
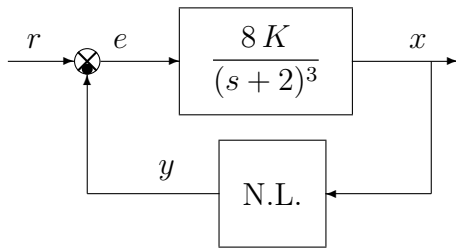


Figura 5: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$.

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



- c.1) Posto $K = 1$, determinare per quali valori r_1 ed r_2 dell'ingresso r i punti di lavoro del sistema retroazionato sono posizionati in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e in $(x_1, y_1) = (-5, -5)$.
- c.2) Posto $K = 1$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile o meno nell'intorno del punto $(x_1, y_1) = (-5, -5)$.
- c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0, 0)$. Utilizzare delle variabili (per esempio: m_1, m_2, \dots) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.
- c.4) Discutere "qualitativamente" (in funzione anche dei parametri m_1, m_2, \dots) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$. Calcolare la pulsazione ω^* degli eventuali cicli limite presenti nel sistema retroazionato.

Soluzione:

- c.1) Il sistema $G_1(s)$ è di tipo 0. Posto $K = 1$, il valore dei guadagni statici è: $K_1 = 1$, $K_2 = 1$ e $K_3 = 1$. La retta di carico della parte lineare del sistema è la seguente:

$$x = K_1(r - K_2 K_3 y) \quad \rightarrow \quad x = (r - y)$$

Imponendo il passaggio per il punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ si ottiene il valore $r_1 = 0$. Imponendo il passaggio per il punto $(x_1, y_1) = (-5, -5)$ si ottiene il valore .

$$-5 = (r + 5) \quad \rightarrow \quad r_2 = -10$$

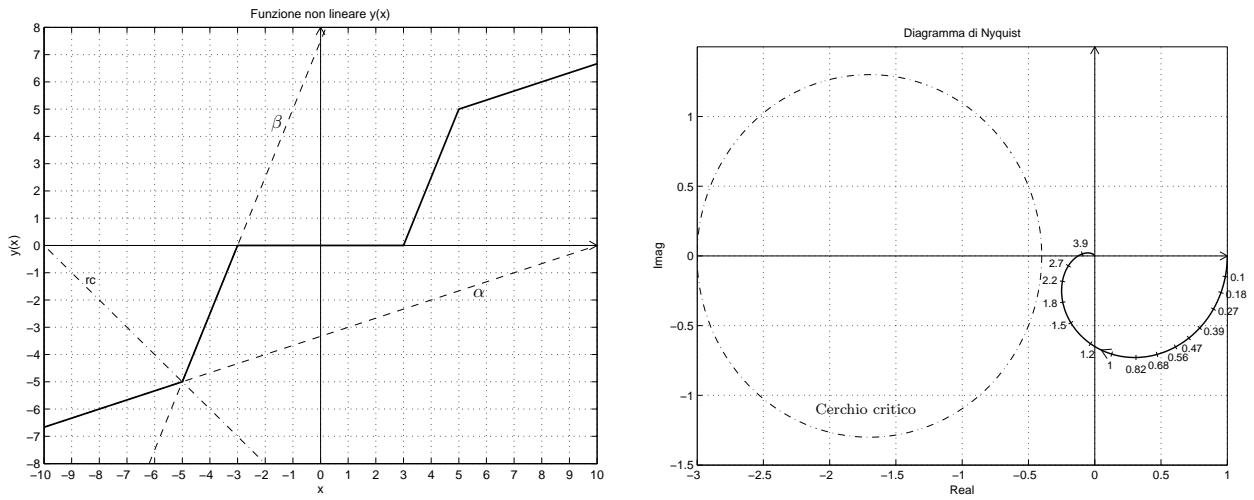


Figura 6: Settore che racchiude la non linearità e cerchio critico.

- c.2) Le pendenze α e β di 2 rette che centrate in $(x_1, y_1) = (-5, -5)$ racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{5}{2}.$$

Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -3, \quad -\frac{1}{\beta} = -\frac{2}{5}.$$

Il margine di ampiezza \bar{K}^* e la pulsazione ω^* della funzione $G_1(s)$ si determinano applicando il criterio di Routh alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + \frac{8K}{(s+2)^3} = 0 \quad \leftrightarrow \quad s^3 + 6s^2 + 12s + 8 + 8K = 0.$$

La tabella di Routh assume la seguente forma:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 12 \\ 2 & 6 & 8 + 8K \\ 1 & 64 - 8K & \\ 0 & 8 + 8K & \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow K < 8 \\ \rightarrow K > 1 \end{array}$$

Si ottiene quindi che

$$\bar{K}^* = 8, \quad \omega^* = \sqrt{12} = 3.464.$$

Il valore di \bar{K}^* è maggiore sia di α che di β per cui in base al criterio del cerchio si può affermare che il punto $(x_1, y_1) = (-5, -5)$ è globalmente asintoticamente stabile. Il cerchio critico e il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ sono mostrati in Fig. 7.

- c.3) L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 7.

Il valore massimo m_1 dalla funzione descrittiva $F(X)$ è maggiore del valore finale $m_2 = 0.333$.

- c.4) Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $G(s)$ è $K^* = 4$. Per $K \neq 0$ il margine di ampiezza K^* del sistema $KG(s)$ è $\bar{K}^* = \frac{K^*}{K}$. Al variare di \bar{K}^* si possono avere le seguenti condizioni di funzionamento:

- Per $\bar{K}^* > m_1$ la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.
- Per $m_1 < \bar{K}^* < m_2$ il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in 2 punti a cui corrispondono 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).

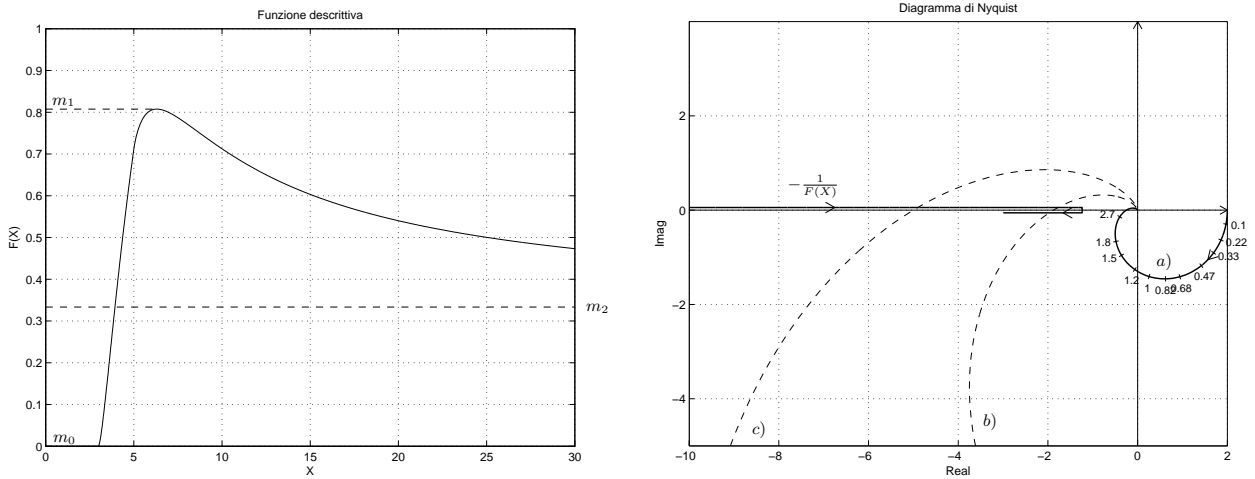
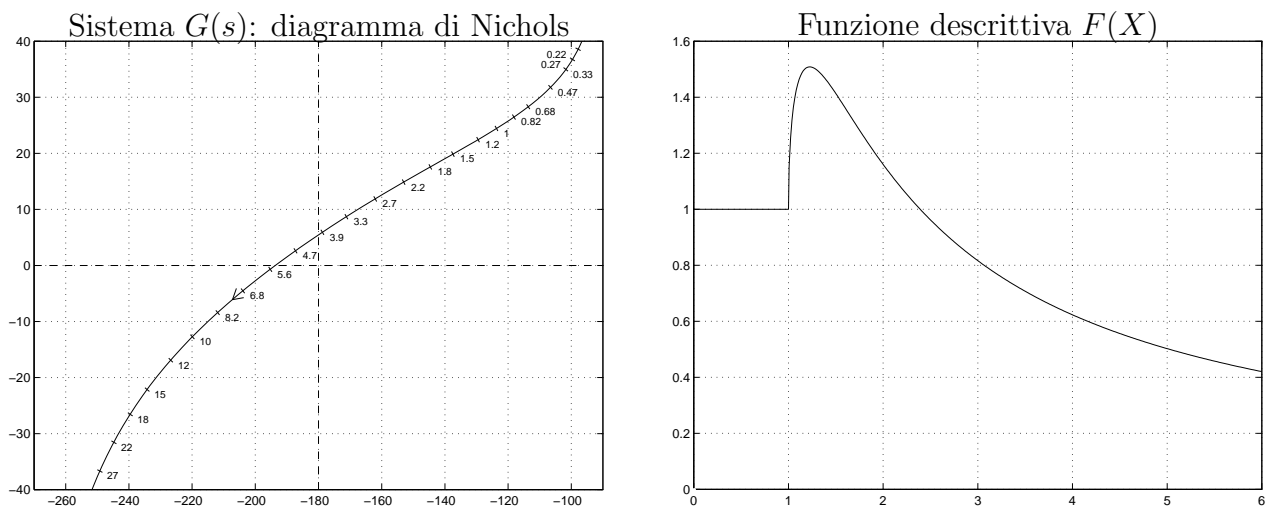


Figura 7: Funzione descrittiva $F(X)$ e discussione grafica.

c) Per $\bar{K}^* < m_2$ il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite instabile.

Una descrizione grafica delle varie condizioni operative è mostrata in Fig. 7.

d) Sia dato il diagramma di Nichols di un sistema $G(s)$ posto in retroazione negativa su di una non linearità $y = y(x)$ di cui viene fornita la funzione descrittiva $F(X)$.



d.1) Nei limiti della precisione dei grafici forniti, determinare l'ampiezza \bar{X}^* , la pulsazione $\bar{\omega}^*$ e la stabilità degli eventuali cicli limite presenti nel sistema retroazionato.

d.2) Progettare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete correttiva $C(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ da mettere in cascata al sistema $G(s)$ in modo che il sistema retroazionato abbia un ciclo limite stabile di ampiezza $X^* = 1.5$ in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 2.2$.

Soluzione:

d.1) Dal diagramma di Nichols è possibile leggere il margine di ampiezza \bar{K}^* del sistema $G(s)$: $\bar{K}^* = -6 \text{ db} = 0.5$. Tale valore viene utilizzato nel grafico della funzione descrittiva $F(X)$ per leggere l'ampiezza \bar{X}^* dell'oscillazione autosostenuta presente all'interno del sistema: $\bar{X}^* \simeq 5$. La pulsazione $\bar{\omega}^*$ dell'oscillazione autosostenuta è quella che si legge sul diagramma di Nichols in corrispondenza del margine di ampiezza: $\bar{\omega}^* = 4 \text{ rad/s}$.

d.2) Il margine di ampiezza K^* corrispondente all'oscillazione autosostenuta desiderata $X^* = 1.5$ si determina utilizzando il grafico della funzione descrittiva: $K^* = 1.41$. Tale valore determina la posizione del punto B dove far passare la funzione di risposta armonica del sistema retroazionato: $M_B = 1/K^* = 0.707$ e $\varphi_B = -180^\circ$. La regione di ammissibilità relativa al punto B è mostrata in grigio in Fig. 8. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ da utilizzare per

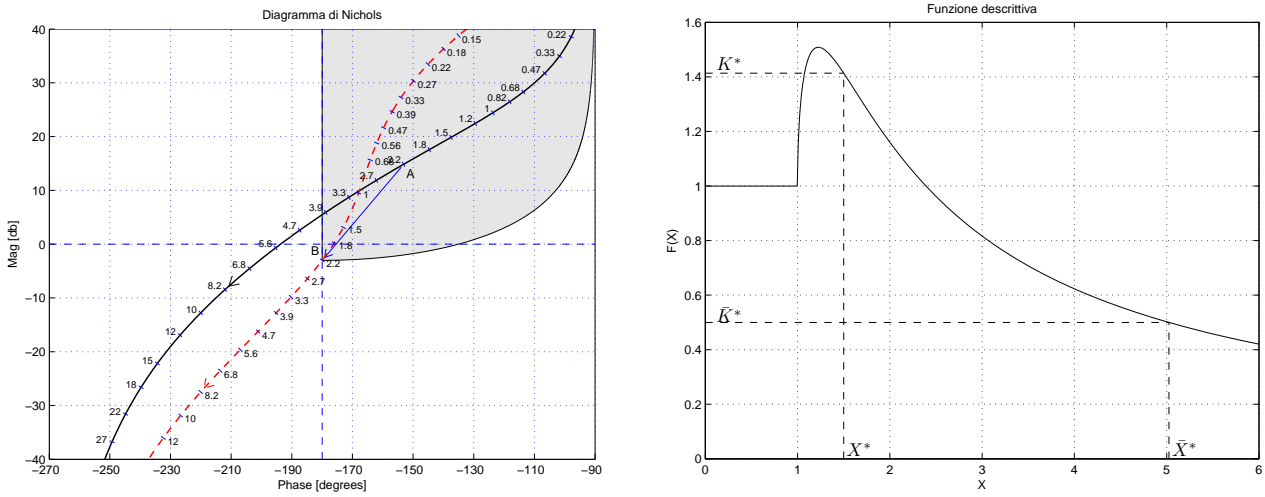


Figura 8: Funzione descrittiva $F(X)$ e sintesi della rete correttiva.

il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 2.2$ assegnata:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 5.53, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -153.1^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 0.7675$ e $\tau_2 = 6.955$ della rete correttiva $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.128, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -26.9^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.7675 s)}{(1 + 6.955 s)}.$$

Il diagramma di Nichols delle funzioni $G(s)$ e $C_1(s)G(s)$ sono mostrati in Fig. 8.

e) Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri, discretizzare la seguente rete correttiva

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s + 2)}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$ e si imponga l'uguaglianza dei guadagni alle alte pulsazioni.

Soluzione. Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri si ottiene:

$$D(z) = K \frac{(1 - e^{-2T} z^{-1})}{(1 - z^{-1})}$$

Il valore di K si determina imponendo l'uguaglianza alle alte frequenze:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} D(s) = \lim_{z \rightarrow -1} D(z) \quad \rightarrow \quad 1 = K \frac{(1 + e^{-2T})}{2} \quad \rightarrow \quad K = \frac{2}{(1 + e^{-2T})}$$

Per $T = 0.2$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.197 - 0.803 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = m(k - 1) + 1.197 e(k) - 0.803 e(k - 1)].$$

f) Calcolare la risposta al gradino unitario $x(n) = (1, 1, 1, \dots)$ del seguente sistema dinamico discreto, partendo da condizioni iniziali nulle:

$$y(n + 1) - 0.5 y(n) = x(n)$$

Soluzione. Applicando la Z-trasformata alla precedente equazione alle differenze si ottiene:

$$Y(z) = \frac{1}{z - 0.5} X(z) = \frac{1 z}{(z - 0.5)(z - 1)} = 2 \left[\frac{z}{(z - 1)} - \frac{z}{(z - 0.5)} \right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = 2 [1 - 0.5^n].$$

Controlli Automatici B
8 Giugno 2012 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considerata corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

1. La trasformata Zeta nella risoluzione delle equazioni alle differenze lineari

- permette di calcolare la risposta libera del sistema
- permette di calcolare la risposta forzata del sistema
- può essere utilizzata anche nel caso di equazioni lineari tempo-varianti

2. Scrivere, nella forma a minimi termini, la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y_k = -2y_{k-1} - 3y_{k-2} + 4x_{k-1} + 6x_{k-2} \quad \rightarrow \quad G(z) = \frac{4z^{-1} + 6z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}$$

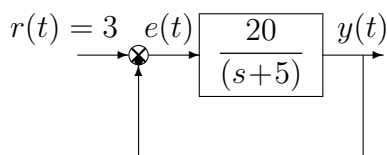
3. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema discreto $G(z)$ si determina nel seguente modo:

- $F(\omega) = G(j\omega)$
- $F(\omega) = G(j\omega T)$
- $F(\omega) = G(e^{j\omega})$
- $F(\omega) = G(e^{j\omega T})$

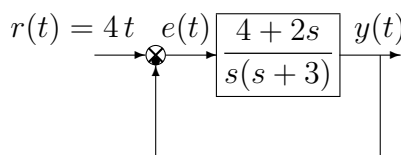
4. Sia $X(z)$ la Z-trasformata della sequenza $x(kT)$. Il teorema del valore finale afferma che:

- $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} zX(z)$
- $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} (1 - z^{-1})X(z)$
- $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} zX(z)$
- $x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$

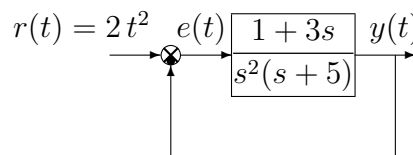
5. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{3}{5} = 0.6$$



$$e(\infty) = 3$$



$$e(\infty) = 20$$

6. Posto $0 < a < b$, il sistema dinamico $G(s) = \frac{(s+a)}{(s+b)}$

- è una rete ritardatrice a guadagno statico unitario
- è una rete anticipatrice a guadagno statico unitario
- è una rete ritardatrice a guadagno statico non unitario
- è una rete anticipatrice a guadagno statico non unitario

7. Fornire l'enunciato del Criterio del cerchio:

Nell'ipotesi che la funzione di trasferimento della parte lineare del sistema $G(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nell'origine semplice o doppio, condizione sufficiente perché il sistema in retroazione sia globalmente asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(j\omega)$ non circonda né tocchi il cerchio critico.

8. Per controllare il sistema $G(s) = \frac{K}{s^2}$ è conveniente utilizzare

- un controllo P
 un controllo PI
 un controllo PD

9. Il contorno delle radici studia le curve sul piano complesso descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare (da 0 all'infinito)

- delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero
 di un qualunque parametro presente all'interno dell'equazione caratteristica
 di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica

10. Sia $1 + K G(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato. Le radici triple del corrispondente luogo delle radici al variare del parametro K sono tutte e sole le soluzioni

- dell'equazione $\frac{d^2G(s)}{ds^2} = 0$
 del sistema di equazioni: $1 + K G(s) = 0, \frac{d^2G(s)}{ds^2} = 0$
 del sistema di equazioni: $1 + K G(s) = 0, \frac{dG(s)}{ds} = 0, \frac{d^2G(s)}{ds^2} = 0$

11. Sia dato il seguente sistema dinamico:

$$G(s) = \frac{s + 4}{s(s + 3)}$$

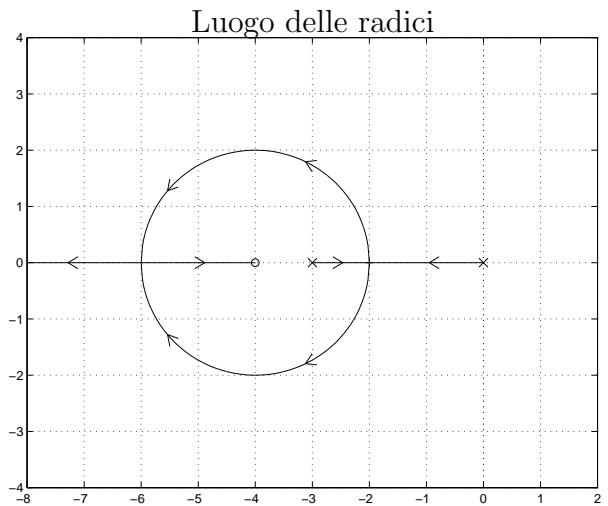
1) Disegnare qualitativamente il luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

2) Determinare la posizione dei punti di diramazione presenti sull'asse reale negativo:

$$\sigma_1 = -2, \quad \sigma_2 = -6$$

3) Determinare per quale valore \bar{K} di K almeno uno dei 2 poli del sistema retroazionato si trova nella posizione $p = -6$:

$$\bar{K} = - \left. \frac{1}{G(s)} \right|_{s=-6} = 9$$



12. Sia $Y(X) \sin(\omega t + \varphi(X))$ la fondamentale del segnale periodico $y(t)$ presente all'uscita di una non linearità algebrica $y(t) = f(x(t))$ in risposta al segnale $x(t) = X \sin(\omega t)$ in ingresso. Fornire la definizione di funzione descrittiva $F(X)$:

$$F(X) = \frac{Y(X)}{X} e^{j\varphi(X)}.$$

13. La funzione descrittiva $F(X)$ di un relè ideale di ampiezza Y_1 è:

- $F(X) = \frac{\pi X}{4Y_1}$
 $F(X) = \frac{4X}{\pi Y_1}$
 $F(X) = \frac{\pi Y_1}{4X}$
 $F(X) = \frac{4Y_1}{\pi X}$

14. Il teorema del baricentro del luogo delle radici può essere applicato

- anche a funzioni $G(s)$ trascendenti
 anche a funzioni $G(s)$ razionali fratte e instabili
 solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$