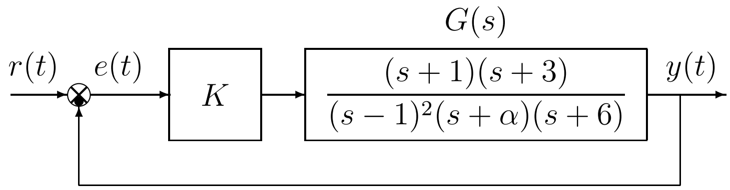
Controlli Automatici B (Tebaldi)
7 Luglio 2025 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Posto $\alpha = 4$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. Posto $\alpha = 4$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1\, G_1(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K \frac{(s+1)(s+3)}{(s-1)^2(s+4)(s+6)} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ per $K > 0$ é mostrato in Fig. 1.

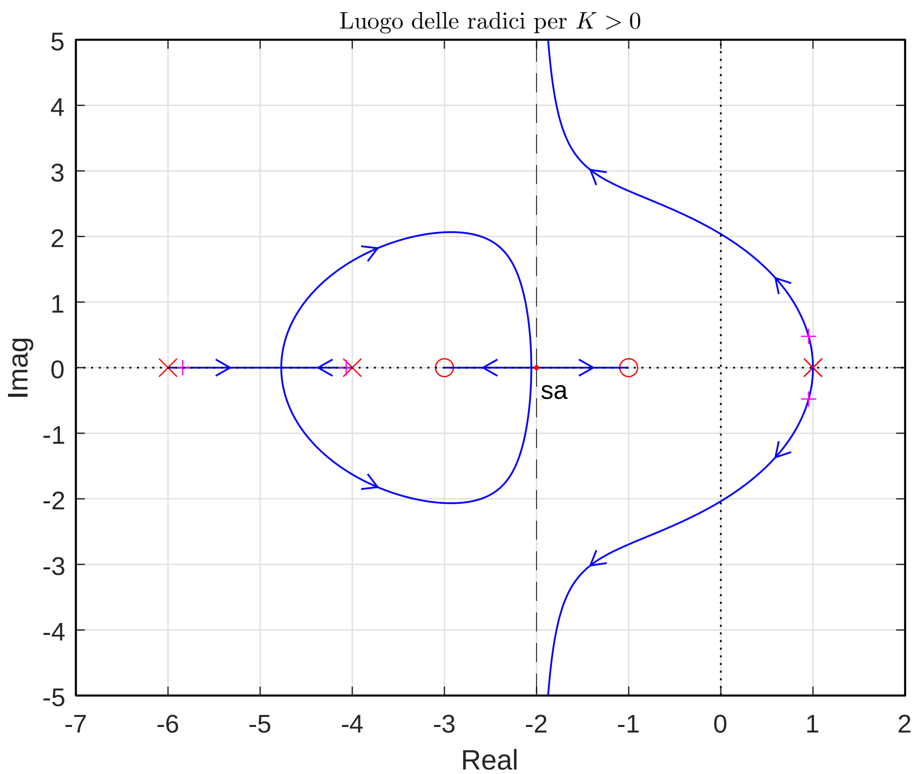


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ per $K > 0$.

Il luogo delle radici ha due asintoti. Il centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-8 + 4) = -2.$$

a.2) Posto $K = 45$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\alpha > 0$. Nella graficazione si tenga conto che: a) la posizione dei poli del sistema retroazionato quando $K = 45$ e $\alpha = 0$ è: $p_{1,2} \simeq 0.6 \pm 6j$, $p_3 \simeq -0.85$ e $p_4 =\simeq -4.4$ e che il sistema retroazionato è stabile per $\alpha_1^* < \alpha < \alpha_2^*$. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Soluzione. Posto $K = 45$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$1 + \frac{45(s+1)(s+3)}{(s-1)^2(s+\alpha)(s+6)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad (s-1)^2(s+\alpha)(s+6) + 45(s+1)(s+3) = 0$$

da cui si ricava l'equazione caratteristica $1 + \alpha\, G_2(s) = 0$:

$$1 + \frac{\alpha(s-1)^2(s+6)}{s(s-1)^2(s+6) + 45(s+1)(s+3)} = 0$$

I poli della funzione $G_2(s)$ sono quelli indicati nel testo:

$$1 + \frac{\alpha(s-1)^2(s+6)}{((s-0.6)^2+6^2)(s+0.85)(s+4.4)} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 2. Il contorno

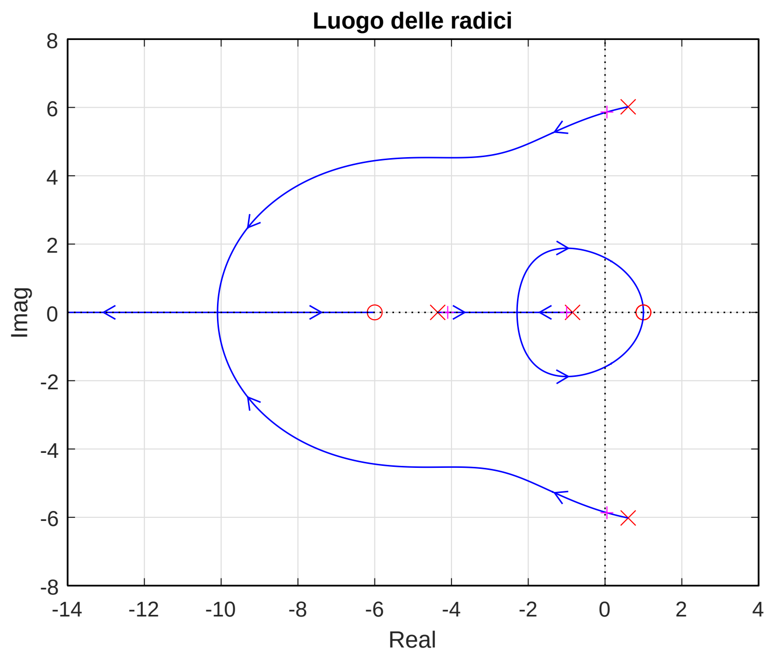


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_2(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

delle radici ha un solo asintoto che coincide con il semiasse reale negativo.

a.3) Sia data la seguente funzione di trasferimento $G(s)$ che descrive la dinamica di un sistema fisico:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + (\beta+3)s + 4\beta}$$

Utilizzando la metodologia del contorno delle radici mostrare come si spostano sul piano complesso **i poli** della funzione $G(s)$ al variare del parametro $\beta > 0$. Calcolare il valore β^* in corrispondenza del quale si ha il minimo tempo di assestamento della risposta al gradino del sistema $G(s)$.

Sol. I poli della funzione $G(s)$ sono le radici del polinomio a denominatore della funzione $G(s)$:

$$s^2 + (\beta+3)s + 4\beta = 0$$

Tale equazione puó essere riscritta nel seguente modo $1 + \beta\, G_1(s) = 0$:

$$s(s+3) + \beta(s+4) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \beta\,\frac{(s+4)}{s(s+3)} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\beta > 0$ è mostrato in Fig. 3. In questo caso il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $z = -4$. Il raggio R della circonferenza è:

$$R = \sqrt{1 \cdot 4} = \sqrt{4} \simeq 2.$$

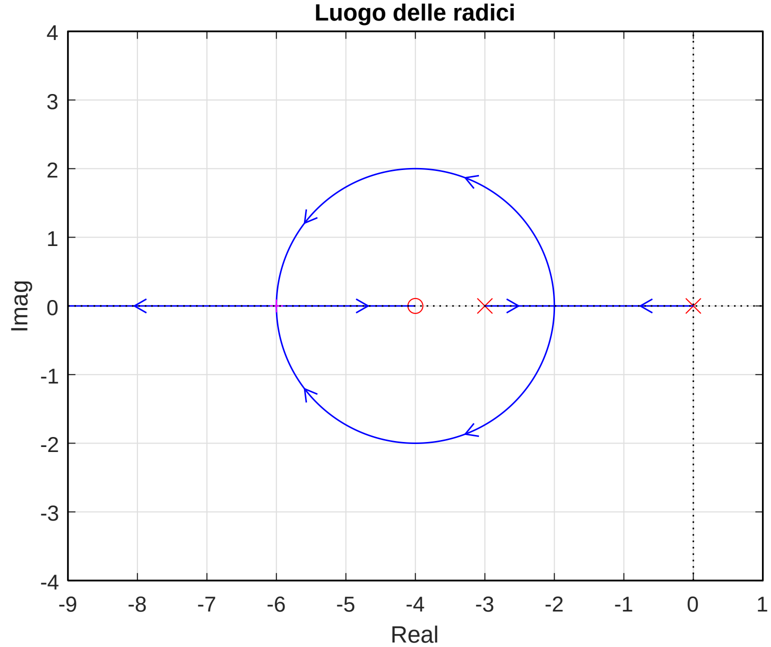


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\beta > 0$.

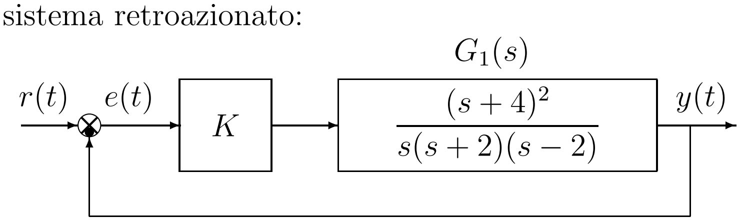
I punti di diramazione σ_1 e σ_2 sono:

$$\sigma_1 = -4 - 2 = -6, \qquad\qquad \sigma_2 = -4 + 2 = -2.$$

Il minimo tempo di assestamento si ha in corrispondenza del punto di diramazione σ_1 piú lontano dall'asse immaginario. La condizione di minimo tempo di assestamento del sistema $G_1(s)$ si ha in corrispondenza del seguente valore del parametro β^*:

$$\beta^* = -\left.\frac{1}{G_1(s)}\right|_{s=\sigma_1} = -\left.\frac{s(s+3)}{(s+4)}\right|_{s=-6} = 9.$$

b.1) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Soluzione. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1\, G_1(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K\frac{(s+4)^2}{s(s+2)(s-2)} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$ è mostrato in Fig. 4. Il luogo delle radici è caratterizzato da un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo. Le intersezioni con l'asse immaginario si determinano utilizzando il criterio di Routh. Equazione caratteristica:

$$1 + K\frac{(s+4)^2}{s(s+2)(s-2)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + Ks^2 + (8K-4)s + 16K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (8K-4) \\ 2 & K & 16K \\ 1 & K(8K-4) - 16K & \\ 0 & 16K & \end{array}$$

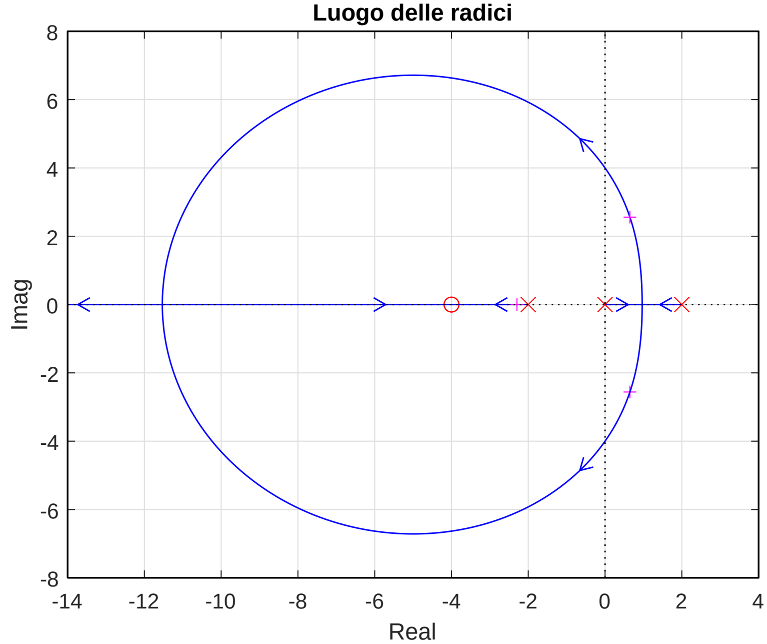


Figura 4: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$.

Dalla tabella si ricavano i seguenti vincoli:

$$(8K - 20)K > 0, \qquad\qquad K > 0$$

dai quali si ottiene che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > \frac{5}{2} = 2.5 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{16} = 4.$$

b.2) Sia data la seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{M\,s^2 + s + 2}.$$

Mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione $G(s)$ al variare del parametro $M > 0$. Determinare esattamente la posizione dei punti di diramazione e calcolare il valore M^* a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento della risposta al gradino del sistema $G(s)$.

Soluzione. I poli della funzione di trasferimento $G(s)$ soddisfano la seguente equazione:

$$M\,s^2 + s + 2 = 0$$

Questa equazione può essere riscritta nel seguente modo:

$$1 + M\,\frac{s^2}{(s+2)} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + M\,G_2(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $M > 0$ è mostrato in Fig. 5. In questo caso il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $p = -2$. I punti di diramazione del contorno delle radici sono: $\sigma_1 = -4$ e $\sigma_2 = 0$. La condizione di minimo tempo di assestamento di ha in corrispondenza del punto di diramazione $\sigma_1 = -4$ e quindi per il seguente valore del parametro M^*:

$$M^* = -\left.\frac{1}{G_2(s)}\right|_{s=\sigma_1} = -\left.\frac{s+2}{s^2}\right|_{s=-4} = 0.1250.$$

c) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:

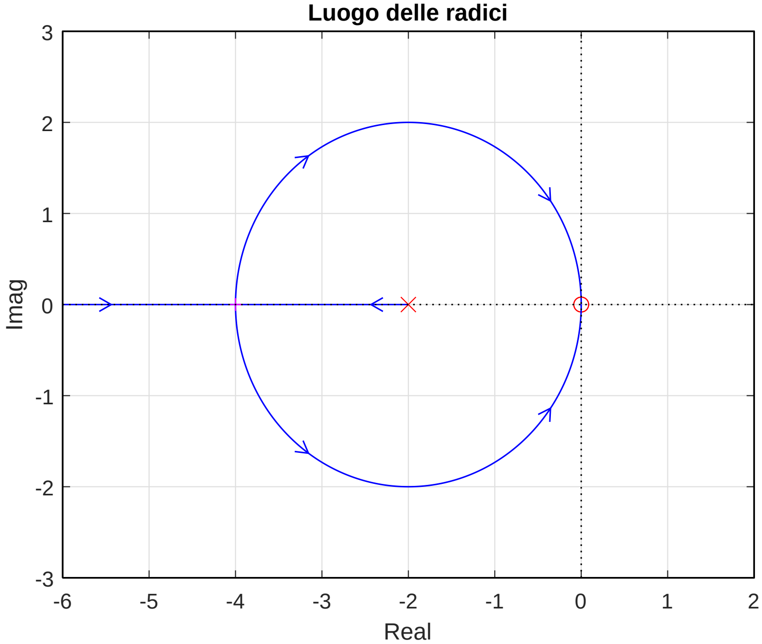
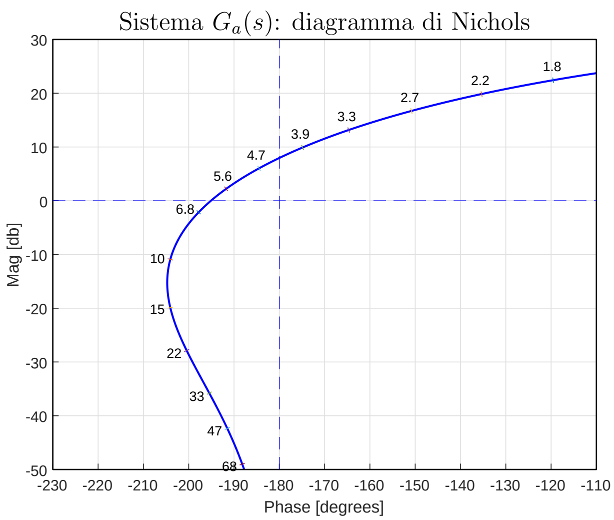
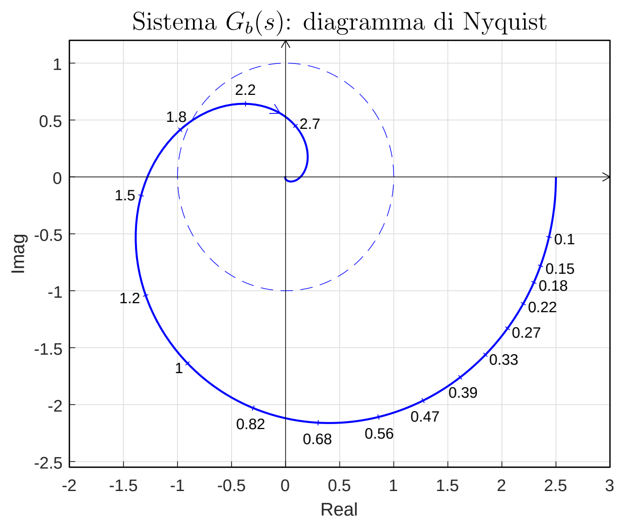


Figura 5: Contorno delle radici del sistema $G_2(s)$ al variare del parametro $L > 0$.





c.1) Per il sistema $G_a(s)$ progettare una rete anticipatrice in modo che la funzione di risposta armonica del sistema compensato passi per il punto $B = (-160°, -10 \text{ db})$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = -10$ db $= 0.3162$ e $\varphi_B = -160°$. La regione di ammissibilitá è mostrata in grigio in Fig. 6. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 33$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = -35.79 \text{ db} = 0.01624, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -195.5°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e ω all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi}, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi}$$

si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 0.9745$ e $\tau_2 = 0.03986$ della rete correttrice $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 19.47, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 35.46° \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.9745\, s)}{(1 + 0.03986\, s)}.$$

Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$
\begin{aligned}
\omega_A &= [\;15 \quad 22 \quad 33 \quad 47 \quad 68\;]\\
M_A &= [\;0.1013 \quad 0.0403 \quad 0.0162 \quad 0.0076 \quad 0.0035\;]\\
\varphi_A &= [\;155.9 \quad 159.6 \quad 164.5 \quad 168.5 \quad 171.8\;]\\
M &= [\;3.123 \quad 7.832 \quad 19.47 \quad 41.44 \quad 89.07\;]\\
\varphi &= [\;44.06 \quad 40.44 \quad 35.46 \quad 31.49 \quad 28.19\;]\\
\tau_1 &= [\;0.2305 \quad 0.4954 \quad 0.9745 \quad 1.653 \quad 2.746\;]\\
\tau_2 &= [\;0.0381 \quad 0.0443 \quad 0.0398 \quad 0.0337 \quad 0.0270\;]
\end{aligned}
$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 6.

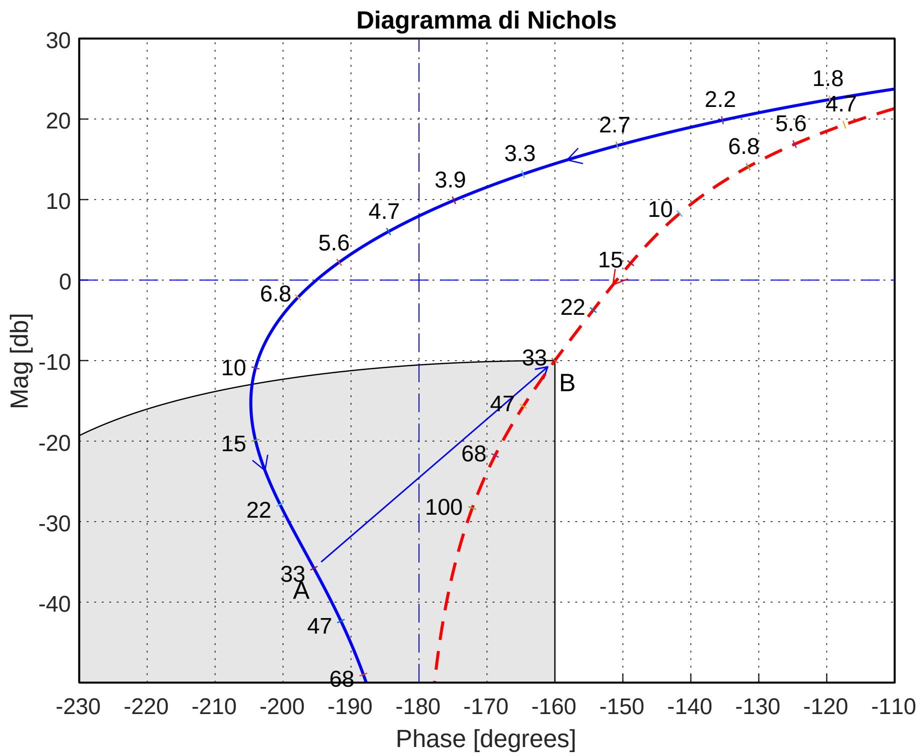


Figura 6: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)\,G_a(s)$.

c.2) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete correttrice $C(s)$ in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

<u>Soluzione</u>. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 0.2$ e $\varphi_B = 180°$. La regione di ammissibilitá è mostrata in grigio in Fig. 7. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.661, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 218.8°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e ω all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi}, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi}$$

si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 0.8759$ e $\tau_2 = 10.01$ della rete correttrice $C_2(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1204, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -38.81° \qquad \rightarrow \qquad C_2(s) = \frac{(1 + 0.8759\, s)}{(1 + 10.01\, s)}.$$

Sintesi della rete correttrice $C_2(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$
\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\;\; 1.5 \quad\;\; 1.2 \quad\;\;\; 1 \quad\;\; 0.82\,] \\
M_A = & [\; 1.347 \quad 1.661 \quad 1.872 \quad 2.053\,] \\
\varphi_A = & [\; 186.9 \quad 218.8 \quad\;\; 241 \quad 261.6\,] \\
M = & [\; 0.1485 \quad 0.1204 \quad 0.1068 \quad 0.0974\,] \\
\varphi = & [\,-6.943 \quad -38.81 \quad -61.02 \quad -81.6\,] \\
\tau_1 = & [\; 4.656 \quad 0.8759 \quad 0.4317 \quad 0.0600\,] \\
\tau_2 = & [\; 31.66 \quad 10.01 \quad 10.15 \quad 12.47\,]
\end{array}
$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 7.

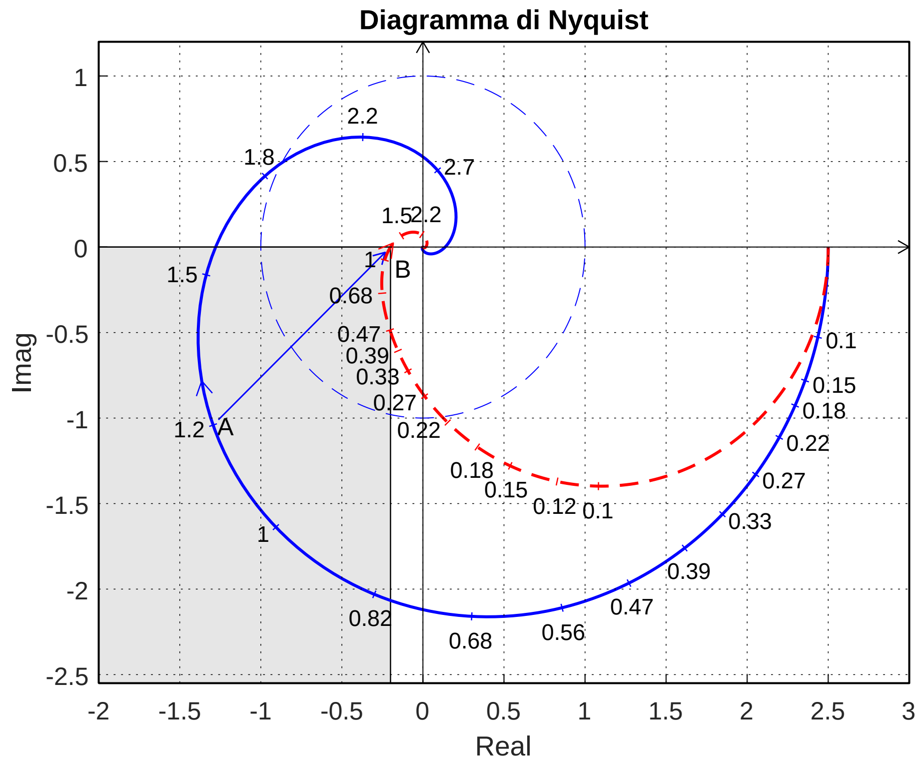


Figura 7: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)\,G_b(s)$.

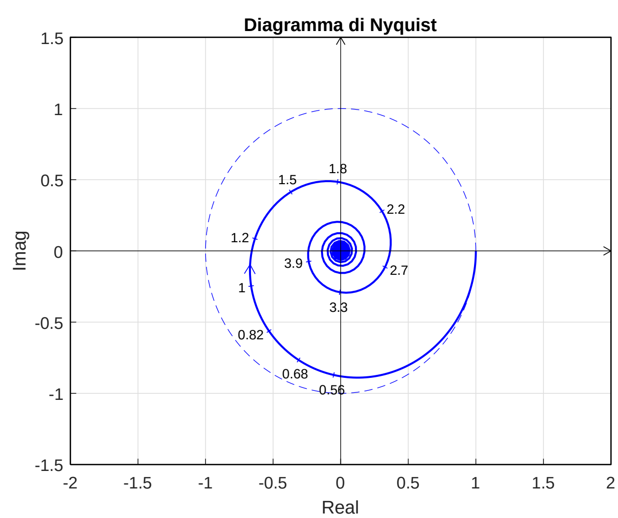
d) Sulla figura riportata a fianco, disegnare l'adamento qualitativo, per $K = 1$, del diagramma di Nyquist del seguente sistema a ritardo finito:

$$G(s) = \frac{K\,e^{-2\,s}}{(s+1)}$$

Indicare per quali dei seguenti valori del parametro K il sistema retroazionato é sicuramente stabile:

⊗ $K < 1$ ◯ $K > 1$

◯ $K < 2$ ◯ $K > 2$



e) Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare il seguente sistema tempo-continuo:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+3)}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Soluzione. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene:

$$D(z) = \left.\frac{(s+3)}{s}\right|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{3T+2+(3T-2)\,z^{-1}}{2-2\,z^{-1}}$$

Sostituendo $T = 0.1$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{2.3-1.7\,z^{-1}}{2-2\,z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze ha la forma seguente:

$$m_k = \frac{1}{2}\left[2\,m_{k-1} + 2.3\,e_k - 1.7\,e_{k-1}\right]$$

cioè:

$$m_k = m_{k-1} + 1.15\,e_k - 0.85\,e_{k-1}$$

f) Partendo da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta $y(n)$ della seguente equazione alle differenze:

$$y(n+1) = 0.4\,y(n) + 3\,x(n)$$

quando in ingresso è presente il gradino unitario $x(n) = 1$.

Soluzione. L'equazione alle differenze genera la seguente funzione discreta $G(z)$:

$$y(n+1) - 0.4\,y(n) = 3\,x(n) \qquad \leftrightarrow \qquad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3}{z-0.4}.$$

La $\mathcal{Z}$-trasformata del segnale di ingresso $x(n) = 1$ è:

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)}.$$

La $\mathcal{Z}$-trasformata $Y(z)$ del segnale di uscita è quindi la seguente:

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{3\,z}{(z-0.4)(z-1)}.$$

Mediante il metodo della scomposizione in fratti semplici si ricava:

$$Y(z) = z\left[\frac{3}{(z-1)(z-0.4)}\right] = z\left[\frac{5}{(z-1)} - \frac{5}{(z-0.4)}\right]$$

e quindi:

$$Y(z) = \frac{5\,z}{(z-1)} - \frac{5\,z}{(z-0.4)} \qquad \rightarrow \qquad y(n) = 5\left[1-0.4^n\right].$$

Controlli Automatici B

7 Luglio 2025 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

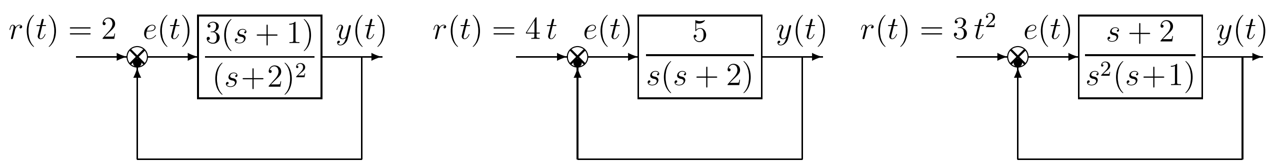
1. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y_{k+2} + 3\,y_{k+1} + 5\,y_k + 2\,y_{k-1} = 4\,x_{k+1} + 6\,x_k \qquad \rightarrow \qquad G(z) = \frac{4\,z + 6}{z^2 + 3\,z + 5 + 2\,z^{-1}}$$

2. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{k\to 0} y(k)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{k\to\infty} y(k)$ del segnale $y(k)$ corrispondente alla seguente funzione $Y(z)$:

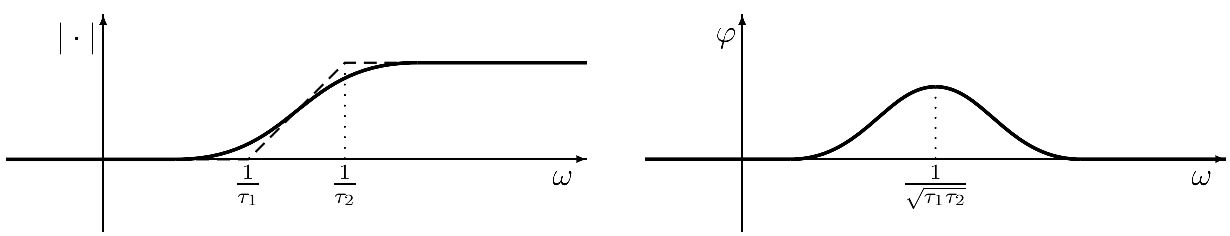
$$Y(z) = \frac{z\,(3+z)}{(1-z)(2\,z+1)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = -\frac{1}{2}, \qquad y_\infty = -\frac{4}{3}$$

3. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{2}{1+\frac{3}{4}} = \frac{8}{7} = 1.143 \qquad e(\infty) = \frac{8}{5} = 1.6 \qquad e(\infty) = \frac{6}{2} = 3$$

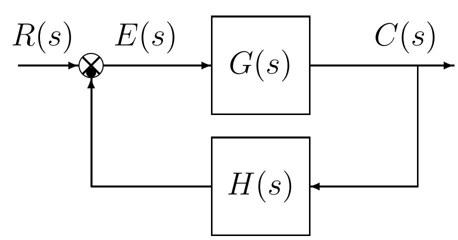
4. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete anticipatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1\,s)}{(1+\tau_2\,s)}$, $(\tau_1 > \tau_2)$:



5. Indicare quale dei seguenti sistemi discreti $G(z)$ tende a zero "più lentamente":

○ $G(z) = \frac{1}{z(z+0.6)}$ ○ $G(z) = \frac{1}{z(3z-1)}$ ⊗ $G(z) = \frac{1}{z(z+0.8)}$ ○ $G(z) = \frac{1}{z(z-0.4)}$

6. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro α interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}\;\frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

7. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali tempo continui $x(t)$ quando $t = k\,T$:

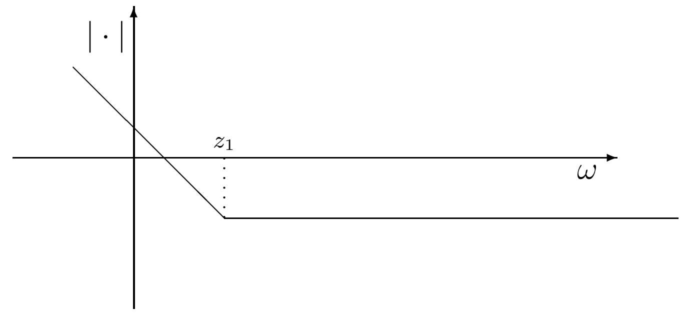
$$x(t) = 3^{-2t} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{(z - 3^{-2T})} \qquad\qquad x(t) = 4\,t \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{4\,T\,z}{(z-1)^2}$$

8. Sia $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$. Enunciare il teorema della traslazione "in anticipo" nel tempo:

$$\mathcal{Z}[x(t+nT)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k}\right]$$

9. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PI e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

$$G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$



10. Come si determina la funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema discreto $G(z)$?

○ $F(\omega) = G(e^{j\omega})$ ○ $F(\omega) = G(j\omega)$ ○ $F(\omega) = G(j\omega T)$ ⊗ $F(\omega) = G(e^{j\omega T})$

11. Il metodo di Ziegler-Nichols per determinare i valori di primo tentativo dei parametri di un regolatore standard PID

○ è applicabile solo al controllo di sistemi lineari
⊗ richiede la conoscenza della risposta al gradino del sistema da controllare
○ richiede la conoscenza della risposta impulsiva del sistema da controllare
○ richiede la conoscenza esatta del modello dinamico del sistema da controllare

12. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare (da 0 all'infinito)

○ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero;
○ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
⊗ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica.

13. Quale dei seguenti parametri della risposta al gradino di un sistema $G(s)$ è maggiormente influenzato dalla larghezza di banda ω_f del sistema stesso:

⊗ tempo di salita T_s ○ tempo di assestamento T_a
○ tempo di ritardo T_r ○ massima sovraelongazione S

14. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{2(s+2)}{(s-1)((s+2)^2+1)}$ al variare del parametro $K > 0$. Calcolare:

1) L'ascissa σ_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

$$\sigma_0 = -1$$

2) Il valore K_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

$$K_0 = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=-1} = 2$$

3) Il valore limite K^* per la stabilità del sistema retroazionato:

$$K^* = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=0} = \frac{5}{4}$$