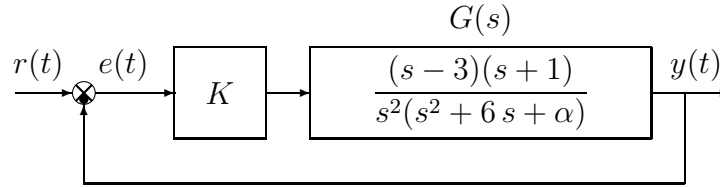


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Posto $\alpha = 81$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato nei seguenti due casi: $K > 0$ e $K < 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

Sol. Posto $\alpha = 81$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K \frac{(s-3)(s+1)}{s^2(s^2+6s+81)} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ per $K > 0$ è mostrato in Fig. 1.

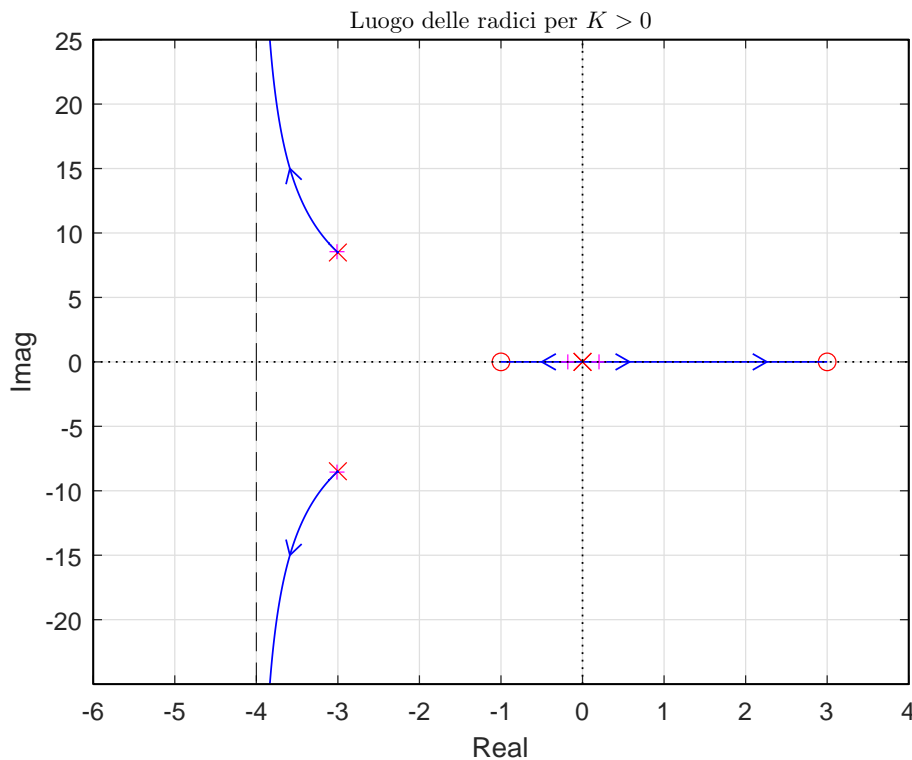


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ per $K > 0$.

L'andamento qualitativo del luogo delle radici per $K < 0$ è mostrato in Fig. 2.

Il luogo delle radici ha due asintoti. Il centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-6 - 3 + 1) = -\frac{8}{2} = -4.$$

a.2) Posto $K = -50$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\alpha > 0$. Nella graficazione si tenga conto che: a) la posizione dei poli del sistema retroazionato quando $K = -50$ e $\alpha = 0$ è: $p_{1,2} \simeq 3 \pm 2j$, $p_3 \simeq -1$ e $p_4 \simeq -11$ e che il sistema retroazionato è stabile per $\alpha > \alpha^*$. Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

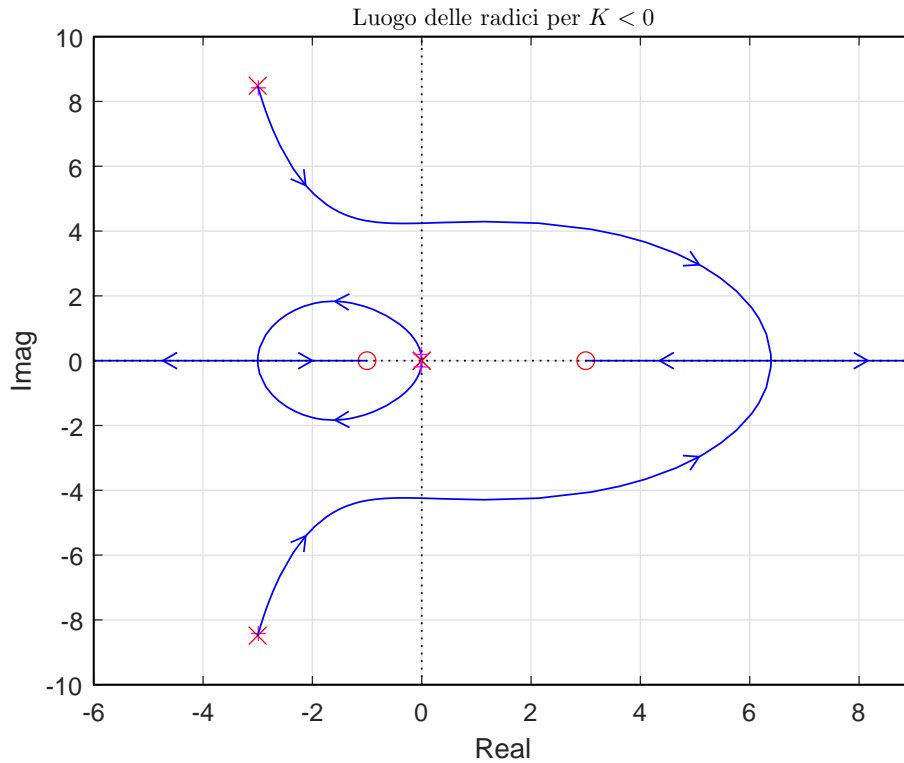


Figura 2: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K < 0$.

Soluzione. Posto $K = -50$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$1 - \frac{50(s-3)(s+1)}{s^2(s^2+6s+\alpha)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^2(s^2+6s+\alpha) - 50(s-3)(s+1) = 0$$

da cui si ricava l'equazione caratteristica $1 + \alpha G_2(s) = 0$:

$$s^3(s+6) - 50(s-3)(s+1) + \alpha s^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\alpha s^2}{s^3(s+6) - 50(s-3)(s+1)} = 0$$

I poli della funzione $G_2(s)$ sono quelli indicati sopra:

$$1 + \frac{\alpha s^2}{((s-3)^2 + 2^2)(s+1)(s+11)} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 3. Il contorno delle radici ha due asintoti. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(6 - 1 - 11) = -3.$$

- a.3) Sia data la seguente funzione di trasferimento che descrive la dinamica di un sistema fisico al variare di un parametro β :

$$G(s) = \frac{\beta}{s^3 + 2s^2 + (2 + \beta)s + \beta}$$

Utilizzando la metodologia del contorno delle radici mostrare come si spostano sul piano complesso i poli della funzione $G(s)$ al variare del parametro $\beta > 0$. Calcolare il valore β^* di β in corrispondenza del quale si ha il minimo tempo di assestamento della risposta al gradino del sistema $G(s)$. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. I poli della funzione $G(s)$ sono le soluzioni della seguente equazione:

$$s^3 + 2s^2 + (2 + \beta)s + \beta = 0$$

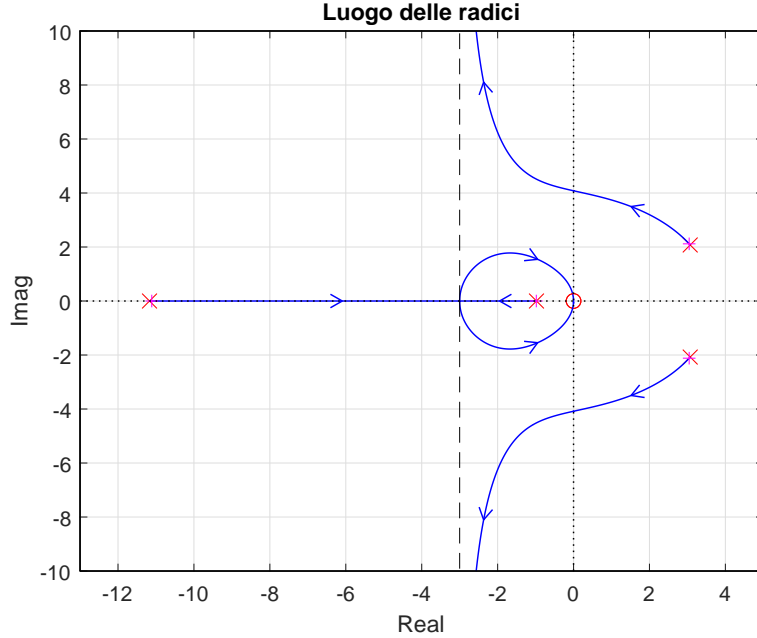


Figura 3: Contorno delle radici del sistema $G_2(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

che può essere riscritta nel seguente modo $1 + \beta G_1(s) = 0$:

$$s^3 + 2s^2 + 2s + \beta(s + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \beta \frac{(s + 1)}{s(s^2 + 2s + 2)} = 0$$

Mettendo in evidenza i poli e gli zeri della funzione $G_1(s)$ si ottiene:

$$1 + \frac{\beta(s + 1)}{s[(s + 1)^2 + 1^2]} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\beta > 0$ è mostrato in Fig. 4. Nel contorno

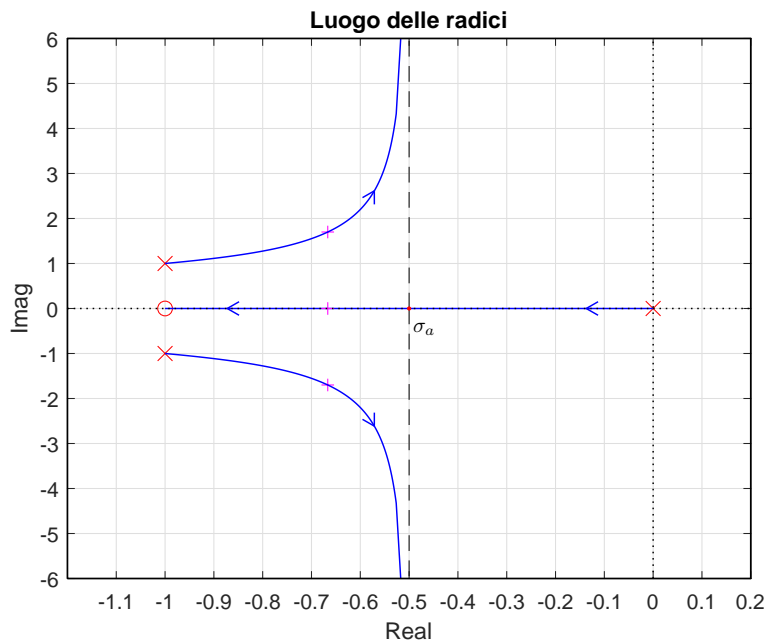


Figura 4: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\beta > 0$.

delle radici sono presenti 2 asintoti. Il centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-2 + 1) = -0.5$$

Il sistema G_s presenta il minimo tempo di assestamento alla risposta al gradino quando è massima la distanza dei poli della $G(s)$ dall'asse immaginario. Tale distanza è massima

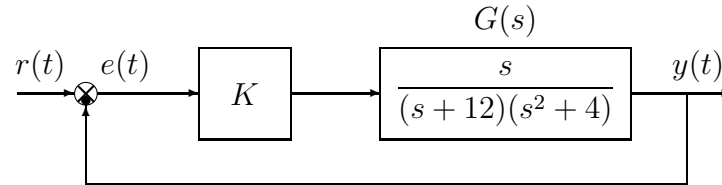
quando i poli sono allineati. In questo caso il sistema ha grado relativo $r = 2$ per cui l'ascissa σ_0 della condizione di allineamento può essere calcolata utilizzando il teorema del baricentro:

$$3\sigma_0 = \sum_{i=1}^3 p_i = -2 \quad \rightarrow \quad \sigma_0 = -\frac{2}{3} = -0.666$$

Il valore $\bar{\beta}$ del parametro β per cui si ha l'allineamento dei poli si calcola nel seguente modo:

$$\bar{\beta} = - \left. \frac{1}{G_2(s)} \right|_{s=\sigma_0} = 2.222$$

b.1) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^* . Tracciare il luogo delle radici tenendo conto che in $\sigma_1 \simeq -2.7$ e $\sigma_2 \simeq -5.1$ sono presenti due punti di diramazione.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{s}{(s+12)(s^2+4)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K_1 G(s) = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 5.

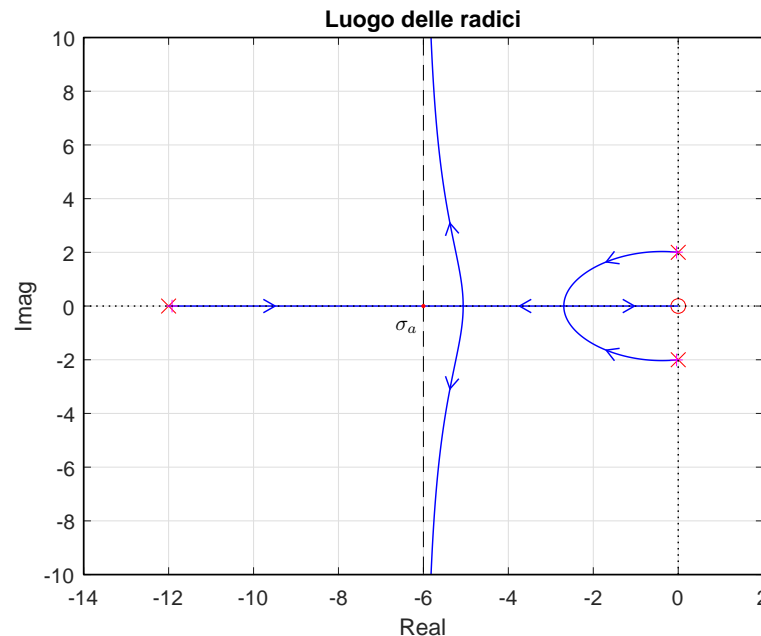


Figura 5: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

Dal luogo delle radici risulta chiaro che il sistema retroazionato è stabile per:

$$K > 0$$

e che le intersezioni con l'asse immaginario si hanno in corrispondenza della pulsazione:

$$\omega^* = 2$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K G(s) = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 12 s^2 + (K + 4)s + 48 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K + 4 \\ 2 & 12 & 48 \\ 1 & 12(K + 4) - 48 & \\ 0 & 48 & \end{array}$$

Dalla riga 1 si ottiene:

$$12(K + 4) - 48 > 0 \quad \rightarrow \quad K > 0$$

La pulsazione ω^* si calcola nel seguente modo:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{48}{12}} = \sqrt{4} = 2$$

Il luogo delle radici ha due asintoti verticali. La posizione σ_a del centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-12) = -6.$$

b.2) Sia data il seguente polinomio $D(s)$:

$$D(s) = (1 + L s)(2 + s) + 4$$

Mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso le radici del polinomio $D(s)$ al variare del parametro $L > 0$. Determinare esattamente la posizione dei punti di diramazione.

Soluzione. le radici del polinomio $D(s)$ soddisfano la seguente equazione:

$$(1 + L s)(s + 2) + 4 = 0$$

Questa equazione può essere riscritta nel seguente modo:

$$s + 6 + L s(s + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + L \frac{s(s + 2)}{s + 6} = 0 \rightarrow \quad 1 + L G_4(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $L > 0$ è mostrato in Fig. 6. In questo caso

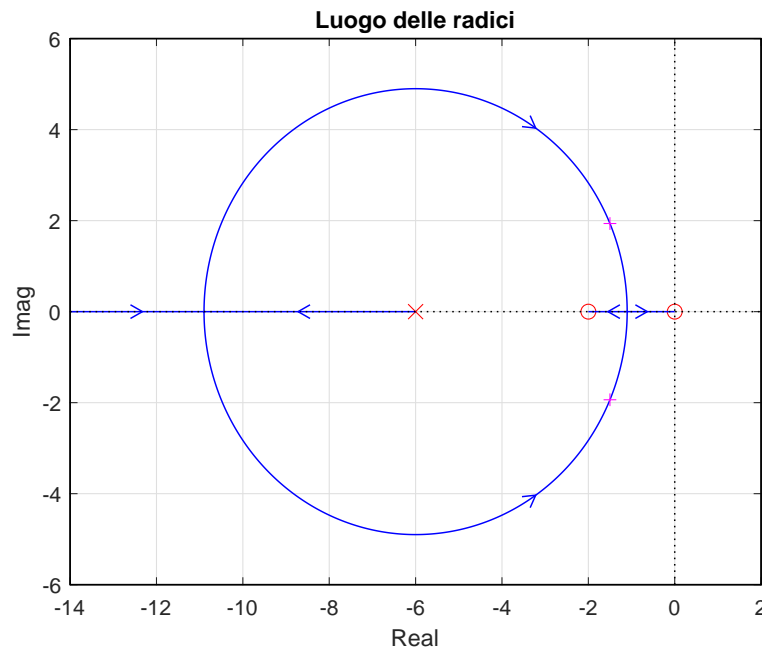


Figura 6: Contorno delle radici del sistema $G_4(s)$ al variare del parametro $L > 0$.

il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $z = -6$. Il raggio R della circonferenza è il seguente:

$$R = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24} = 4.899$$

I punti di diramazione σ_1 e σ_2 del contorno delle radici sono:

$$\sigma_1 = -6 - \sqrt{24} = -10.899,$$

$$\sigma_2 = -6 + \sqrt{24} = -1.101.$$

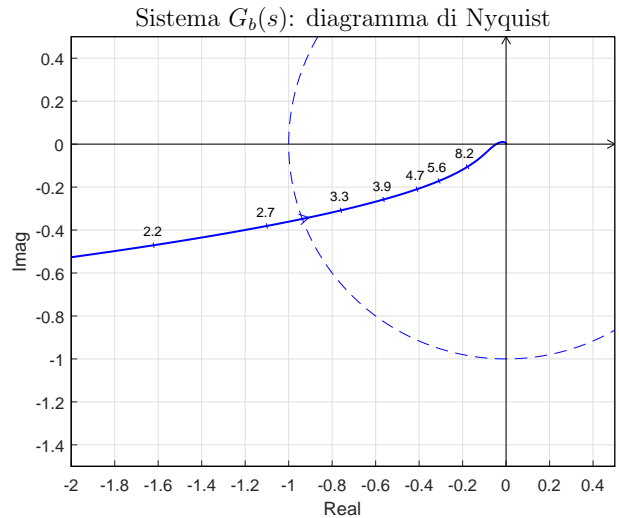
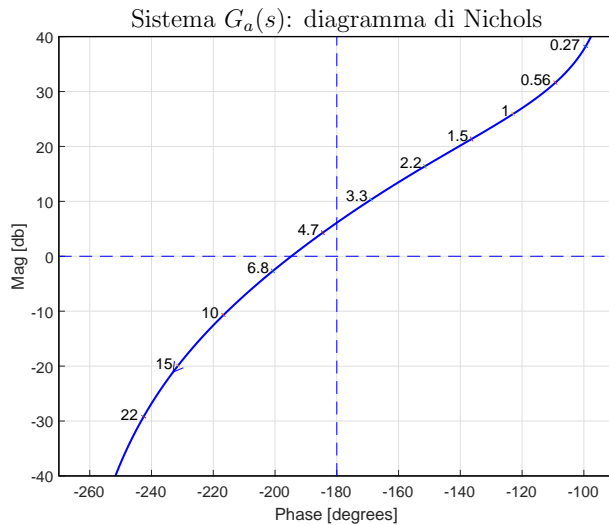
È possibile giungere allo stesso risultato nel seguente modo:

$$\frac{dG_4(s)}{ds} = 0 \rightarrow (2s+2)(s+6) - (s^2+2s) = s^2 + 12s + 12 = 0 \rightarrow \sigma_{1,2} = -6 \pm \sqrt{24}.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento di ha in corrispondenza del punto di diramazione $\sigma_1 = -10.899$ e quindi per il seguente valore del parametro L^* :

$$L^* = - \left. \frac{1}{G_4(s)} \right|_{s=\sigma_1} = - \left. \frac{s+6}{s(s+2)} \right|_{s=-10.899} = 0.0505.$$

c) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:



c.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete ritardatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = -13.98 \text{ db} = 0.2$ e $\varphi_B = -180^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 7. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 3.3$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 10.31 \text{ db} = 3.277, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -168.9^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 1.451$ e $\tau_2 = 24.28$ della rete correttiva $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.06103, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -11.08^\circ \rightarrow C_1(s) = \frac{(1 + 1.451s)}{(1 + 24.28s)}.$$

Sintesi della rete correttiva $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [0.27 & 0.56 & 1 & 1.5 & 2.2 & 3.3] \\ M_A &= [81.53 & 38.14 & 19.75 & 11.69 & 6.6 & 3.277] \\ \varphi_A &= [260.6 & 250.8 & 237.1 & 223.7 & 208.5 & 191.1] \\ M &= [0.0024 & 0.0052 & 0.0101 & 0.0171 & 0.0303 & 0.0610] \\ \varphi &= [-80.59 & -70.8 & -57.09 & -43.67 & -28.54 & -11.08] \\ \tau_1 &= [0.6044 & 0.612 & 0.635 & 0.6819 & 0.807 & 1.451] \\ \tau_2 &= [1530 & 360 & 117 & 55.74 & 30.56 & 24.28] \end{aligned}$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 7.

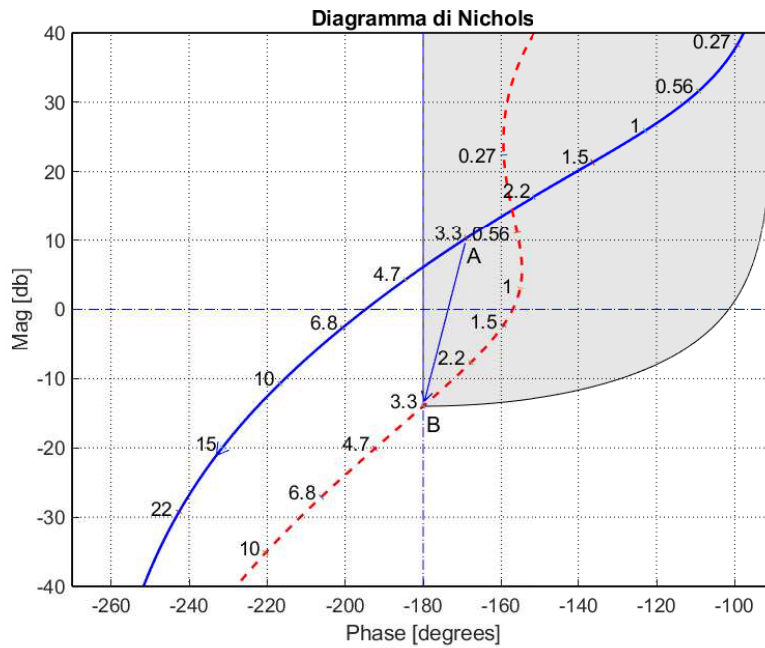


Figura 7: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$.

c.2) Per il sistema $G_b(s)$ progettare una rete correttiva in grado di garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 60$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 240^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 8. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 4.7$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.4599, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 207.1^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 0.5231$ e $\tau_2 = 0.1489$ della rete correttiva $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 2.175, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 32.88^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.5231 s)}{(1 + 0.1489 s)}.$$

Sintesi della rete correttiva $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [3.9 \quad 4.7 \quad 5.6 \quad 8.2] \\ M_A &= [0.6197 \quad 0.4599 \quad 0.3524 \quad 0.2059] \\ \varphi_A &= [204.6 \quad 207.1 \quad 209.1 \quad 210.7] \\ M &= [1.614 \quad 2.175 \quad 2.837 \quad 4.857] \\ \varphi &= [35.43 \quad 32.88 \quad 30.93 \quad 29.31] \\ \tau_1 &= [0.3534 \quad 0.5231 \quad 0.6877 \quad 0.9926] \\ \tau_2 &= [0.0863 \quad 0.1489 \quad 0.1756 \quad 0.1659] \end{aligned}$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 8.

d) In base al legame teorico a tra il piano s e il piano z , tracciare qualitativamente sul piano z le posizioni dei poli 1, 2, 3, ..., 6 che sono stati evidenziati con delle crocette sul piano s :

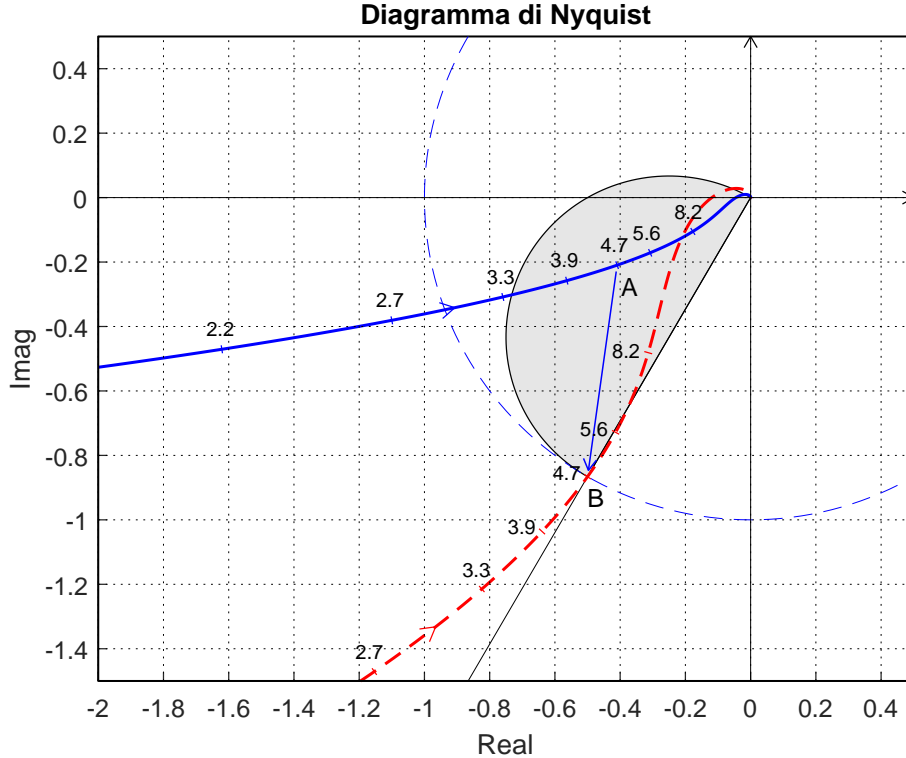
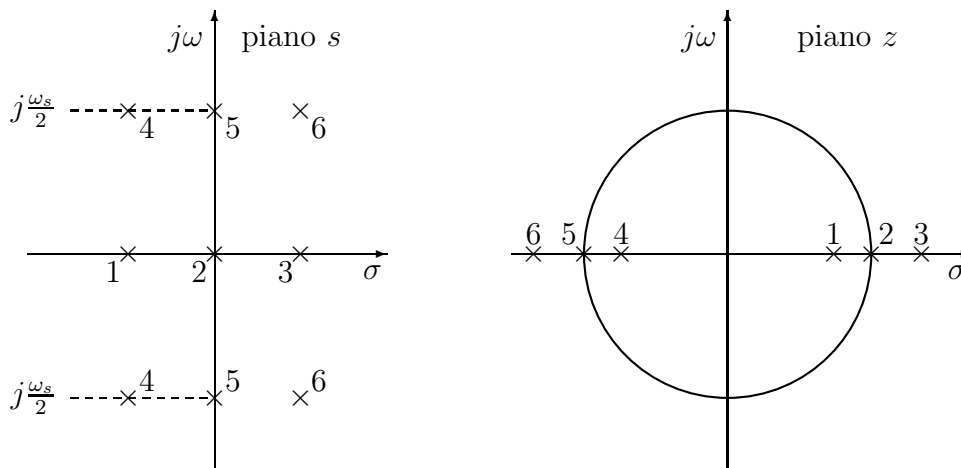


Figura 8: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$.



e) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare il seguente sistema tempo-continuo:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+1)}{s(s+3)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Soluzione. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \frac{(s+1)}{s(s+3)} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{-T(T+1) + (T)z^{-1}}{-3T-1 + (3T+2)z^{-1} - z^{-2}}$$

Sostituendo $T = 0.1$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{-0.11 + 0.1z^{-1}}{-1.3 + 2.3z^{-1} - z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze ha la forma seguente:

$$m_k = \frac{1}{-1.3} [-2.3 m_{k-1} + m_{k-2} - 0.11 e_k + 0.1 e_{k-1}]$$

cioè:

$$m_k = 1.7692 m_{k-1} - 0.76923 m_{k-2} + 0.084615 e_k - 0.076923 e_{k-1}$$

f) Partendo da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta $y(n)$ della seguente equazione alle differenze:

$$y(n+1) = 0.6 y(n) + 4 x(n)$$

quando in ingresso è presente il gradino unitario $x(n) = 1$.

Soluzione. L'equazione alle differenze genera la seguente funzione discreta $G(z)$:

$$y(n+1) - 0.6 y(n) = 4 x(n) \quad \leftrightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{4}{z - 0.6}.$$

La \mathcal{Z} -trasformata del segnale di ingresso $x(n) = 1$ è:

$$X(z) = z/(z - 1).$$

La \mathcal{Z} -trasformata $Y(z)$ del segnale di uscita è quindi la seguente:

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{4z}{(z - 0.6)(z - 1)}.$$

Mediante il metodo della scomposizione in fratti semplici si ricava:

$$Y(z) = z \left[\frac{4}{(z - 1)(z - 0.6)} \right] = z \left[\frac{10}{(z - 1)} - \frac{10}{(z - 0.6)} \right]$$

e quindi:

$$Y(z) = \frac{10z}{(z - 1)} - \frac{10z}{(z - 0.6)} \quad \rightarrow \quad y(n) = 10 [1 - 0.6^n].$$

Controlli Automatici B
6 Giugno 2025 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

1. Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 5z^{-1} + 3z^{-2}}{2 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + z^{-3}} \quad \rightarrow \quad 2y_k + 4y_{k-1} + 6y_{k-2} + y_{k-3} = x_k + 5x_{k-1} + 3x_{k-2}$$

2. Calcolare le successioni discrete $x(k)$ corrispondenti alle seguenti funzioni complesse $X(z)$:

$$X(z) = \frac{2z}{(z - e^{-3T})} \quad \rightarrow \quad x(k) = 2e^{-3kT} \qquad X(z) = \frac{5Tz}{(z - 1)^2} \quad \rightarrow \quad x(k) = 5kT$$

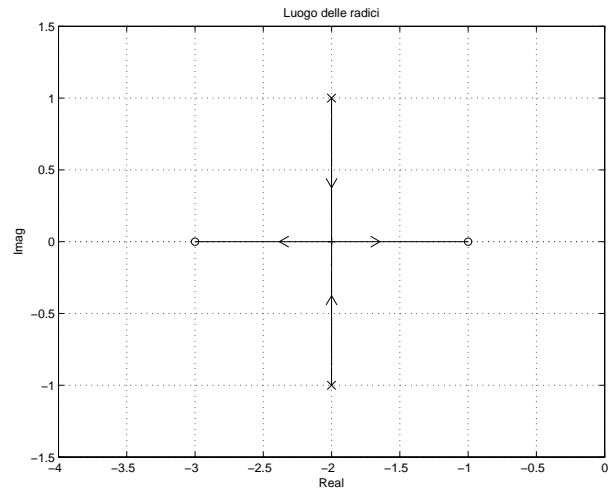
3. A fianco é riportato il luogo delle radici del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{(s + 1)(s + 3)}{(s + 2)^2 + 1}$$

al variare del parametro $K > 0$.

Determinare per quale valore di K i due poli del sistema retroazionato si trovano nel punto di diramazione:

$$\bar{K} = - \left. \frac{1}{G(s)} \right|_{s=-2} = - \left. \frac{(s+2)^2+1}{(s+1)(s+3)} \right|_{s=-2} = 1$$



4. Nel metodo di discretizzazione per “corrispondenza poli/zeri” applicato alla funzione $D(s)$, il calcolo del guadagno k alle alte frequenze prevede l'utilizzo della relazione:

- | | |
|--|--|
| <input checked="" type="radio"/> $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{z \rightarrow -1} G(z)$ | <input type="radio"/> $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$ |
| <input type="radio"/> $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z)$ | <input type="radio"/> $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{z \rightarrow -1} G(z)$ |

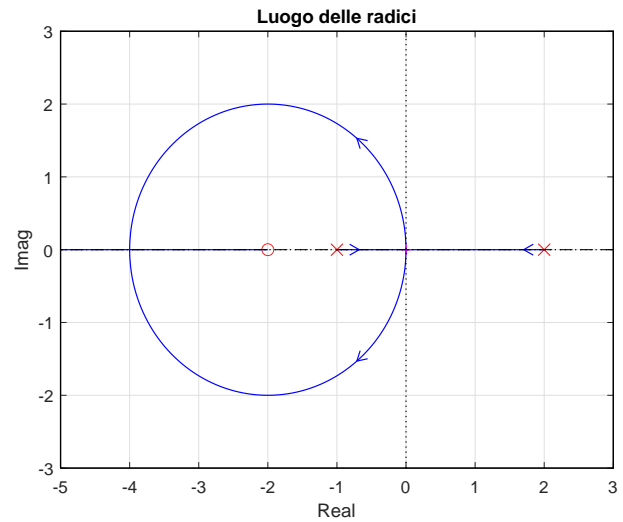
5. Il valore a regime $x(\infty)$ della sequenza $x(k)$ corrispondente alla funzione $X(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z-0.5)}$ è:

- $x(\infty) = 0$
 $x(\infty) = 1$
 $x(\infty) = 2$
 $x(\infty) = 4$

6. Il luogo delle radici di un sistema caratterizzato da guadagno d'anello $K G(s)$, con $G(s)$ in forma fattorizzata poli-zeri:

- | | |
|---|---|
| <input checked="" type="radio"/> può presentare intersezioni con l'asse immaginario che, se presenti, si possono determinare con il Criterio di Routh | <input type="radio"/> è simmetrico rispetto agli assi reale ed immaginario |
| <input type="radio"/> ha tanti rami quanti sono i poli di $K G(s)$ meno gli zeri di $K G(s)$ | <input checked="" type="radio"/> può presentare degli asintoti che, se presenti, formano una stella di raggi centrati in un punto dell'asse reale |

7. A fianco è riportato il luogo delle radici di **un sistema discreto** $G(z)$ posto in retroazione negativa al variare del parametro $K > 0$. È possibile affermare che:



- Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per $\bar{K} < K < K^*$
- Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per $K > \bar{K}$
- Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per $K < K^*$
- La funzione $G(z)$ presenta due poli reali semplici

8. Indicare, tra i seguenti sistemi discreti $G(z)$, quello che ha la risposta impulsiva che tende a zero “più rapidamente”:

- $G(z) = \frac{1}{z(z+0.5)}$
 $G(z) = \frac{1}{z(3z-1)}$
 $G(z) = \frac{1}{z(3z+2)}$
 $G(z) = \frac{1}{z(z-0.3)}$

9. Posto $T = 1$ e utilizzando la corrispondenza tra piano- s e piano- z , calcolare il tempo di assestamento T_a della risposta impulsiva $g(k)$ del sistema discreto $G(z) = \frac{z}{z-0.5}$:

$$T_a = \frac{3}{|\ln(0.5)|} = 4.32 \text{ s.}$$

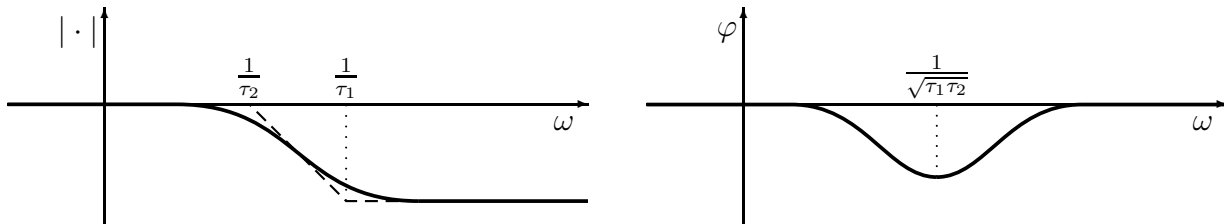
10. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine 0:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

11. Scrivere il margine di ampiezza K^* e la pulsazione ω^* di attraversamento del semiasse reale negativo del seguente sistema a ritardo finito:

$$G(s) = \frac{\alpha e^{-t_0 s}}{s} \quad \rightarrow \quad K^* = \frac{\pi}{2\alpha t_0} \quad \omega^* = \frac{\pi}{2t_0}$$

12. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete ritardatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\tau_2 s)}$, ($\tau_1 < \tau_2$):



13. La trasformazione bilineare è definita come segue:

- $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
 $s = \frac{2}{T} \frac{z+1}{z-1}$
 $s = \frac{2}{T} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$
 $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

14. Sia data una rete correttiva $G(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$. Si scelgano le affermazioni corrette fra le seguenti:

- il guadagno statico della rete è $\frac{\tau_1}{\tau_2}$
- la rete influirà sulle specifiche di precisione del sistema controllato
- la rete è a fase minima se $\tau_1 > 0$ e $\tau_2 > 0$
- la rete influirà sulle specifiche di velocità di risposta del sistema controllato