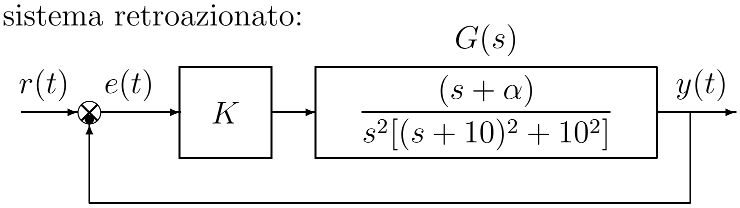
Nr.

Controlli Automatici B - INFO
6 febbraio 2026 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Posto $\alpha = 2$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è stabile. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. Posto $\alpha = 1$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1\, G(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + \frac{K(s+2)}{s^2[(s+10)^2 + 10^2]} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ per $K > 0$ é mostrato in Fig. 1. Il luogo delle radici ha tre asintoti. Il centro degli asintoti è:

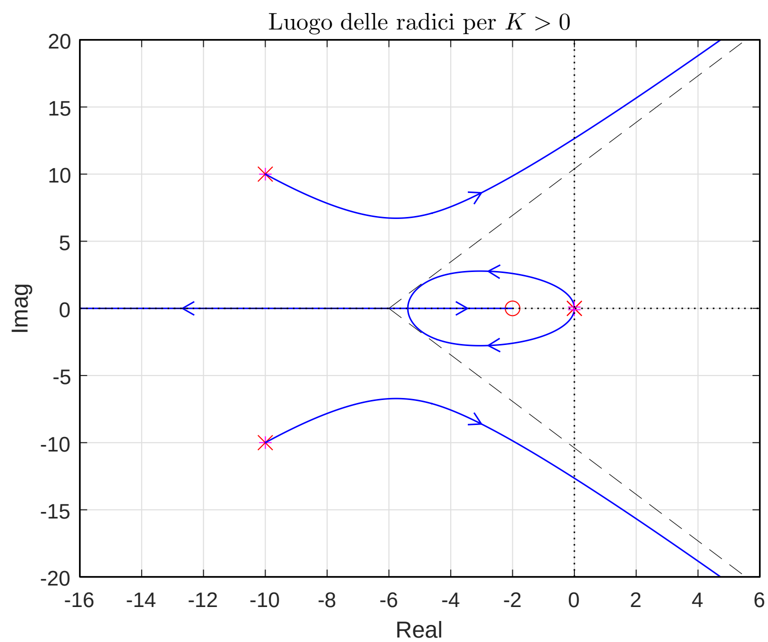


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

$$\sigma_a = \frac{1}{3}\,(-20 + 2) = -6.$$

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{(s+2)}{s^2\,(s^2 + 20\,s + 200)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 20s^3 + 200s^2 + K s + 2K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 200 & 2K \\
3 & 20 & K & \\
2 & 4000 - K & 40K & \\
1 & 3200K - K^2 & & \\
0 & 40K & &
\end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$4000 - K > 0, \quad 3200K - K^2 > 0, \quad 40K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K < 4000, \quad 0 < K < 3200, \quad K > 0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K_1 = 0 < K < 3200 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{40K^*}{4000 - K^*}} = \sqrt{\frac{K^*}{20}} = 12.6491.$$

a.2) Posto $K = 700$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\alpha > 0$. Nella graficazione si tenga conto che: a) la posizione dei poli del sistema retroazionato quando $K = 700$ e $\alpha = 0$ è la seguente: $p_1 = 0$, $p_2 \simeq -6$, $p_{3,4} \simeq -7 \pm 8.2\,j$. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Soluzione. Posto $K = 81$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$s^2(s^2 + 20\,s + 200) + K(s + \alpha) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{\alpha\,K}{s[s(s^2 + 20\,s + 200) + K]} = 0$$

I poli della funzione $G_2(s)$ sono quelli indicati nel testo dell'esercizio:

$$1 + \frac{\alpha\,K}{s(s+6)[(s+7)^2 + 8.2^2]} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + \alpha\,G_2(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 2. Il luogo delle radici

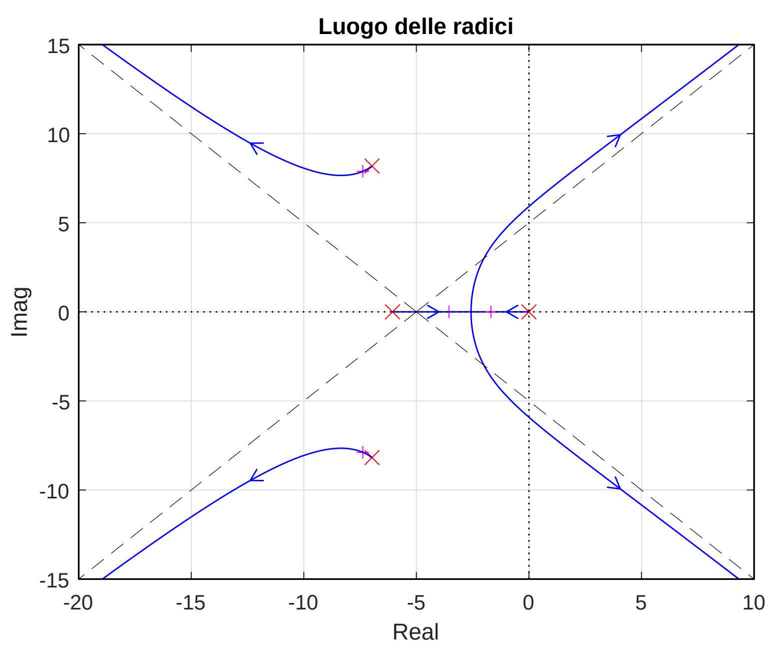


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\tau > 0$.

ha quattro asintoti. Il centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{4}(-6 - 14) = -5.$$

a.3) Sia data la seguente funzione di trasferimento che descrive la dinamica di un sistema fisico al variare di un parametro β:

$$G(s) = \frac{4}{(4+s)(\beta+s) + 16}$$

Utilizzando la metodologia del contorno delle radici mostrare come si spostano sul piano complesso i poli della funzione $G(s)$ al variare del parametro $\beta > 0$. Calcolare il valore β^* a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino.

Sol. I poli della funzione $G(s)$ sono le soluzioni della seguente equazione:

$$(4+s)(\beta+s)+16=0$$

che puó essere riscritta nel seguente modo $1+\beta\, G_1(s)=0$:

$$s^2+4s+16+\beta(s+4)=0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1+\beta\,\frac{(s+4)}{s^2+4s+16}=0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1+\beta\, G_1(s)=0$$

Mettendo in evidenza i poli della funzione $G_1(s)$ si ottiene:

$$1+\beta\,\frac{(s+4)}{(s+2)^2+3.464^2}=0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\beta > 0$ è mostrato in Fig. 3.

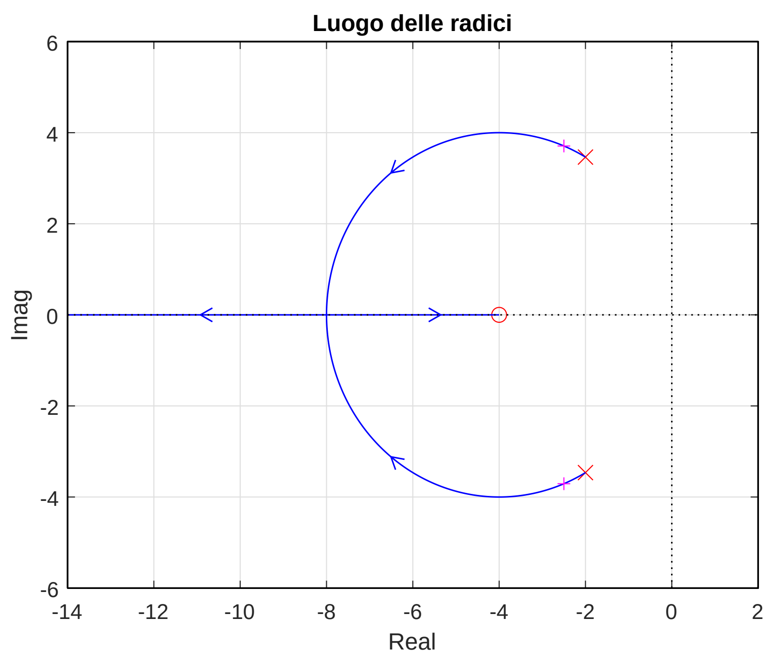


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\beta > 0$.

In questo caso il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $z=-4$. Il raggio R della circonferenza è:

$$R=\sqrt{2^2+3.464^2}=\sqrt{16}=4$$

I punto di diramazione σ_1 del contorno delle radici è:

$$\sigma_1=-4-4=-8.$$

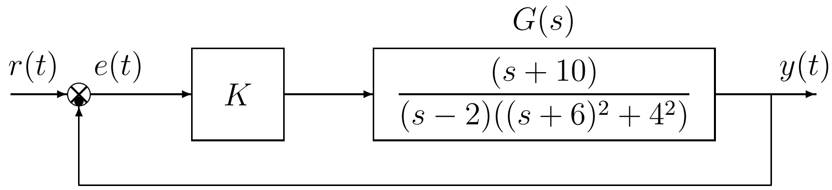
I punto di diramazione σ_1 poteva essere calcolato anche nel seguente modo:

$$\frac{dG_4(s)}{ds}=0 \qquad \rightarrow \qquad (2s+4)(s+4)-(s^2+4s+16)=s^2+8s=0 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_1=-8,\;\; \sigma_2=0.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento del sistema $G_1(s)$ alla risposta al gradino si ha in corrispondenza del punto di diramazione $\sigma_1=-8$ e quindi in corrispondenza del seguente valore del parametro β^*:

$$\beta^*=-\left.\frac{1}{G_1(s)}\right|_{s=\sigma_1}=-\left.\frac{s^2+4s+16}{s+4}\right|_{s=-8}=12.$$

b) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



b.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare per quale valore K_0 il sistema retroazionato presenta il minimo tempo di assestamento alla risposta al gradino.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s+10)}{(s-2)((s+6)^2+4^2)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + K_1\, G(s) = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ è mostrato in Fig. 4. Il luogo delle radici ha due asintoti verticali. La posizione

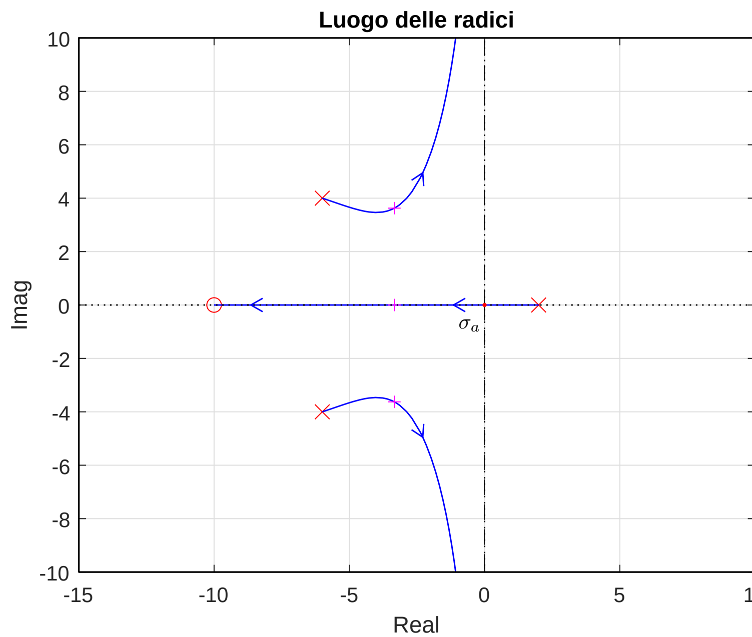


Figura 4: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$.

σ_a del centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-12 + 2 + 10) = 0.$$

Il sistema retroazionato presenta il minimo tempo di assestamento alla risposta al gradino quando è massima la distanza dei poli della $G(s)$ dall'asse immaginario. Tale distanza è massima quando i poli sono allineati. In questo caso l'ascissa σ_0 della condizione di allineamento può essere calcolata utilizzando il teorema del baricentro:

$$3\,\sigma_0 = \sum_{i=1}^{3} p_i = -10 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_0 = -\frac{12}{3} = -\frac{10}{3} = -3.33$$

Il valore K_0 a cui corrisponde minimo tempo di assestamento é il seguente:

$$K_0 = -\left.\frac{1}{G_1(s)}\right|_{s=\sigma_0} = 18.488.$$

b.2) Sia data la seguente funzione di trasferimento $G_3(s)$:

$$G_3(s) = \frac{1}{s^2 + \alpha\, s + 4}$$

Mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

Soluzione. I poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$s^2 + \alpha\, s + 4 = 0$$

che può essere riscritta nel seguente modo equivalente:

$$1 + \alpha \frac{s}{s^2+4} = 0 \rightarrow \qquad 1 + \alpha\, G_4(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 5. In questo caso

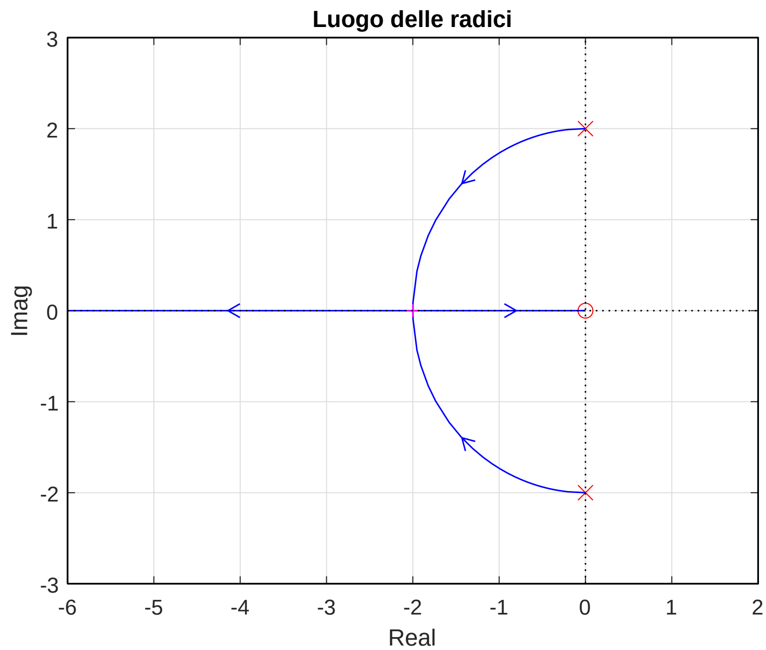
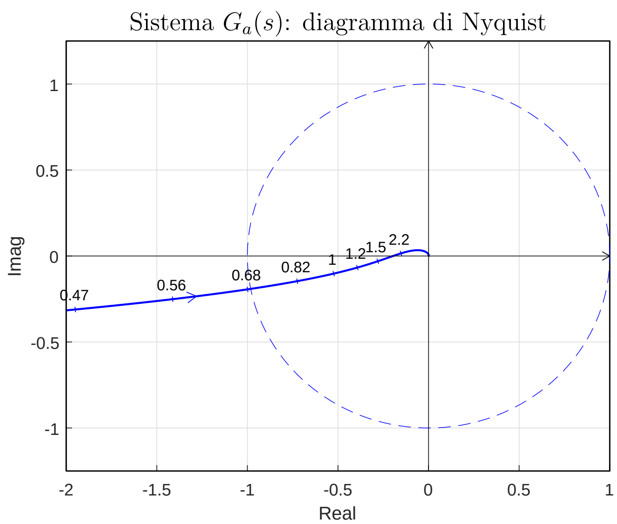


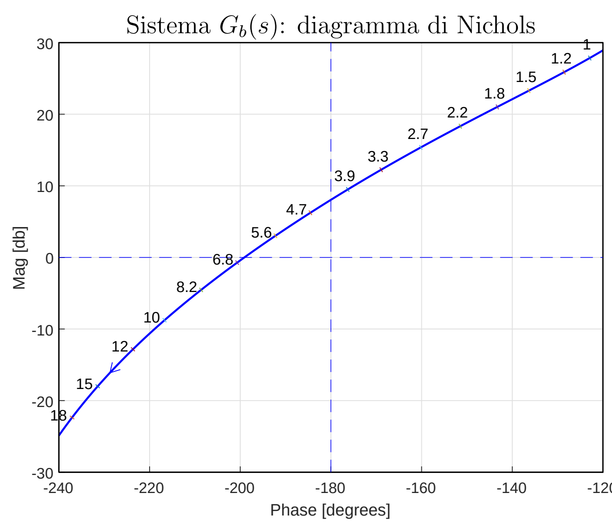
Figura 5: Contorno delle radici del sistema $G_4(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $p = -2$. Il punto di diramazione σ_1 del contorno delle radici è:

$$\sigma_1 = -2,$$

c) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:





c.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttrice $C(s)$ in grado di garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 60°$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 240°$. La regione di ammissibilitá è mostrata in grigio in Fig. 6. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.3989, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 189.7°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e ω all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi}, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi}$$

si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 2.023$ e $\tau_2 = 0.2599$ della rete correttrice $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 2.507, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 50.29° \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 2.023\, s)}{(1 + 0.2599\, s)}.$$

Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$\begin{aligned}
\omega_A &= [\; 1 \quad 1.2 \quad 1.5 \quad 2.2 \;]\\
M_A &= [\; 0.5334 \quad 0.3989 \quad 0.2816 \quad 0.1532 \;]\\
\varphi_A &= [\; 191.1 \quad 189.7 \quad 186.2 \quad 174.3 \;]\\
M &= [\; 1.875 \quad 2.507 \quad 3.551 \quad 6.529 \;]\\
\varphi &= [\; 48.93 \quad 50.29 \quad 53.79 \quad 65.69 \;]\\
\tau_1 &= [\; 1.615 \quad 2.023 \quad 2.446 \quad 3.051 \;]\\
\tau_2 &= [\; 0.164 \quad 0.2599 \quad 0.2554 \quad 0.1289 \;]
\end{aligned}$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 6.

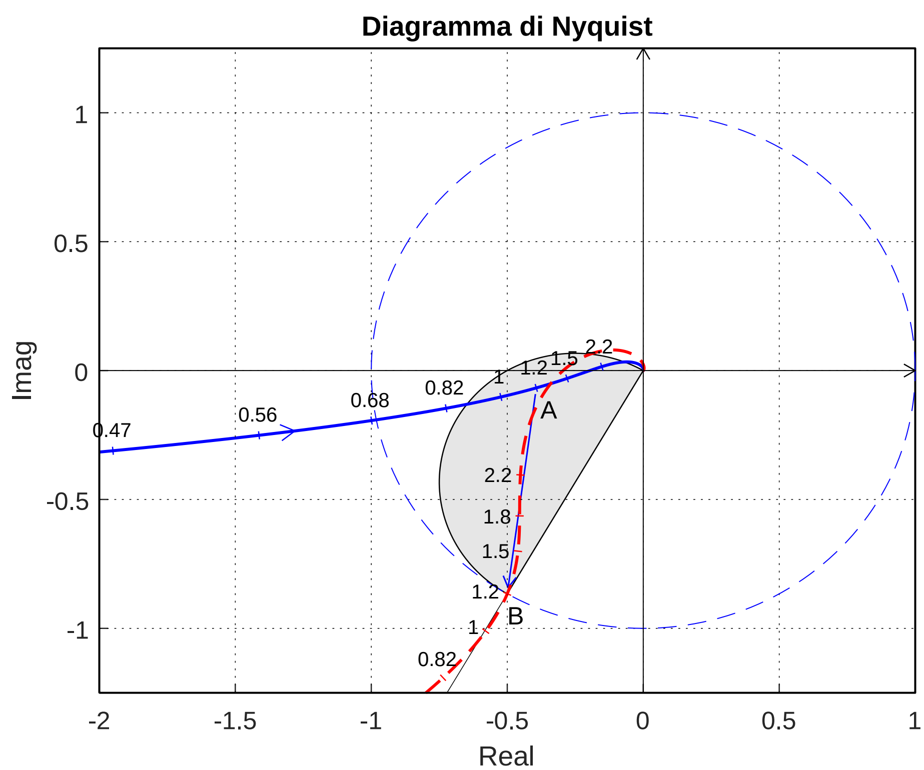


Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)\, G_b(s)$.

c.2) Per il sistema $G_b(s)$ progettare una rete ritardatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B \simeq -14$ db $= 0.2$ e $\varphi_B = -180°$. La regione di ammissibilitá è mostrata in grigio in Fig. 7. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 3.3$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 12.25 \text{ db} = 4.096, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -168.9^\circ.$$

Sostituendo i valori di M, φ e ω all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi}, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi}$$

si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 1.47$ e $\tau_2 = 30.74$ della rete correttrice $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.04883, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -11.08^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 1.47\, s)}{(1 + 30.74\, s)}.$$

Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$\begin{array}{r} \omega_A = [\\ M_A = [\\ \varphi_A = [\\ M = [\\ \varphi = [\\ \tau_1 = [\\ \tau_2 = [\end{array}
\begin{array}{rrrrrrr}
3.9 & 3.3 & 2.7 & 2.2 & 1.8 & 1.5 & 1.2\\
2.982 & 4.096 & 5.865 & 8.25 & 11.25 & 14.61 & 19.68\\
183.7 & 191.1 & 199.8 & 208.5 & 216.7 & 223.7 & 231.4\\
0.0670 & 0.0488 & 0.0341 & 0.0242 & 0.0177 & 0.0136 & 0.0101\\
-3.721 & -11.08 & -19.83 & -28.54 & -36.7 & -43.67 & -51.44\\
3.678 & 1.47 & 0.9898 & 0.8128 & 0.7287 & 0.6852 & 0.6534\\
54.97 & 30.74 & 30.99 & 38.41 & 51.53 & 69.85 & 104.2
\end{array}
\begin{array}{l}]\\ ]\\ ]\\ ]\\ ]\\ ]\\ ] \end{array}$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 7.

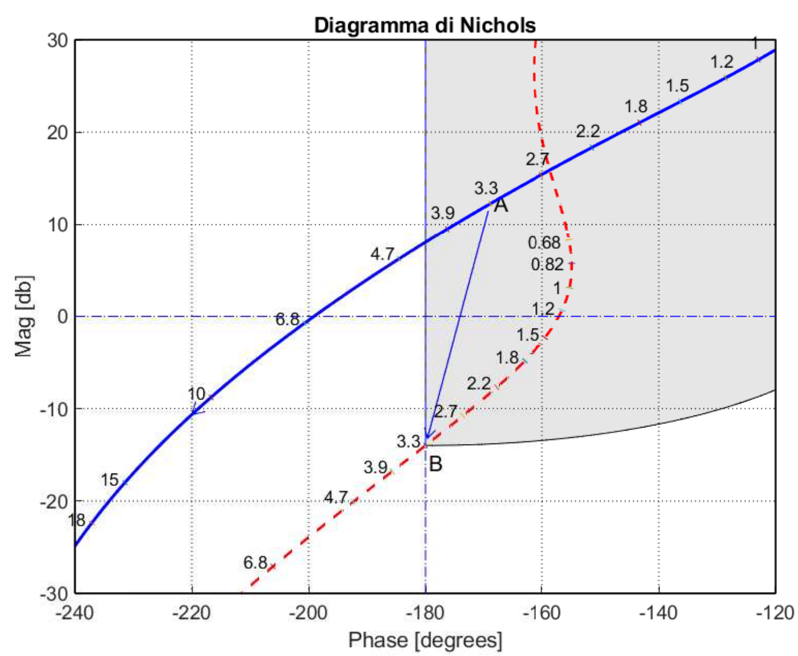
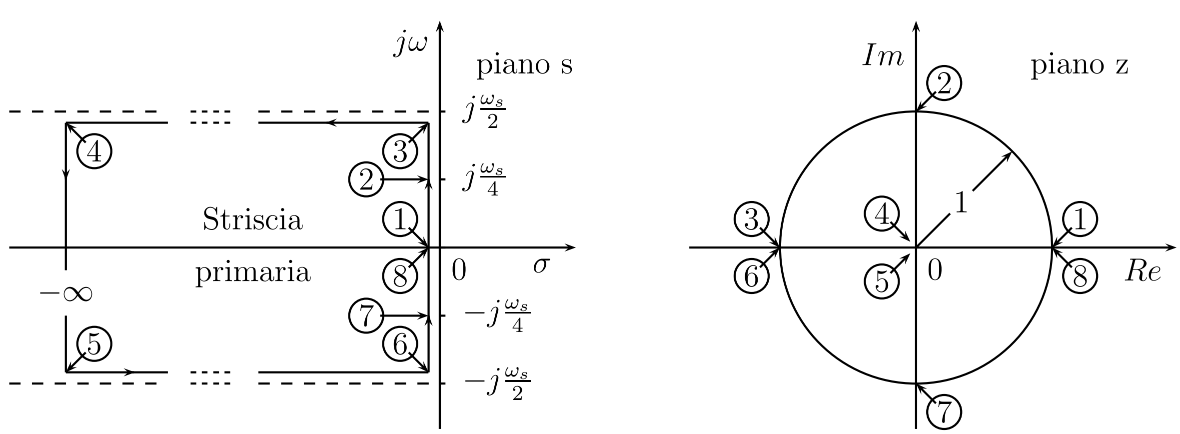


Figura 7: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)\, G_b(s)$.

d) Indicare sul piano z dove sono collocati i punti della striscia primaria numerati da 1 a 8:



e) Partendo da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta $y(n)$ della seguente equazione alle differenze:

$$y(n+1) = 0.3\, y(n) + 7\, x(n)$$

quando in ingresso è presente il gradino unitario $x(n) = 1$.

Soluzione. L'equazione alle differenze genera la seguente funzione discreta $G(z)$:

$$y(n+1) - 0.3\, y(n) = 7\, x(n) \qquad \leftrightarrow \qquad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{7}{z - 0.3}.$$

La $\mathcal{Z}$-trasformata del segnale di ingresso $x(n) = 1$ è:

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)}.$$

La $\mathcal{Z}$-trasformata $Y(z)$ del segnale di uscita è quindi la seguente:

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{7\, z}{(z-0.3)(z-1)}.$$

Mediante il metodo della scomposizione in fratti semplici si ricava:

$$Y(z) = z\left[\frac{7}{(z-1)(z-0.3)}\right] = z\left[\frac{10}{(z-1)} - \frac{10}{(z-0.3)}\right]$$

e quindi:

$$Y(z) = \frac{10\, z}{(z-1)} - \frac{10\, z}{(z-0.3)} \qquad \rightarrow \qquad y(n) = 10\left[1 - 0.3^n\right].$$

f) Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare il seguente sistema tempo-continuo:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+4)}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Soluzione. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene:

$$D(z) = \left.\frac{(s+4)}{s}\right|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{2T + 1 + (2T-1)\, z^{-1}}{1 - \, z^{-1}}$$

Sostituendo $T = 0.1$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.2 - 0.8\, z^{-1}}{1 - \, z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze ha la forma seguente:

$$m_k = m_{k-1} + 1.2\, e_k - 0.8\, e_{k-1}$$

Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B - INFO

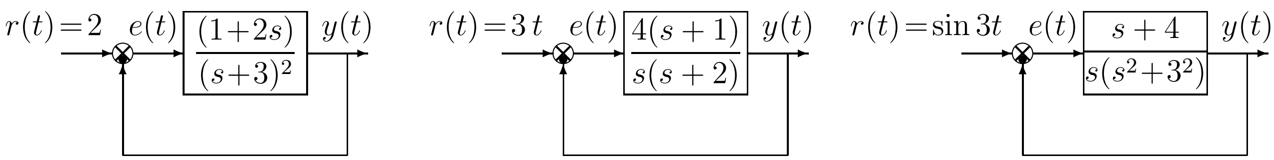
6 febbraio 2026 - Domande Teoriche

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

1. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$6\,y_k + 4\,y_{k-1} + 5\,y_{k-2} + 3\,y_{k-3} = 2\,x_{k-1} + x_{k-2} \qquad \rightarrow \qquad G(z) = \frac{2\,z^{-1} + z^{-2}}{6 + 4\,z^{-1} + 5\,z^{-2} + 3\,z^{-3}}$$

2. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{2}{1+\frac{1}{9}} = \frac{18}{10} = 1.8 \qquad e(\infty) = \frac{3}{2} = 1.5 \qquad e(\infty) = 0$$

3. Nel progetto di una rete correttrice del primo ordine $G(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$, le formule di inversione:

- ○ consentono di calcolare τ_1 e τ_2 in modo che la rete sia sempre stabile
- ○ si possono utilizzare solo se sono note le regioni di ammissibilità
- ⊗ consentono di calcolare τ_1 e τ_2 in funzione dell'amplificazione M e dello sfasamento φ desiderati alla pusazione ω
- ○ nessuna delle precedenti

4. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali tempo continui $x(t)$ quando $t = k\,T$:

$$x(t) = 3 \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{3\,z}{(z-1)} \qquad\qquad x(t) = 2\,e^{-3t} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{2\,z}{(z - e^{-3T})}$$

5. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{2(s-1)}{(s+2)(s^2+4)}$ al variare del parametro $K > 0$. Calcolare:

1) L'ascissa σ_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

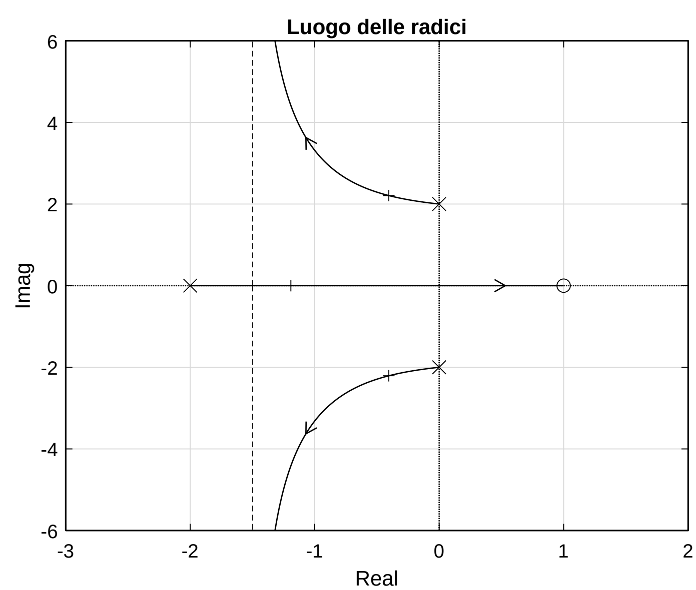
$$\sigma_0 = -\tfrac{2}{3}$$

2) Il valore K_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

$$K_0 = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=-\frac{2}{3}} = 1.777$$

3) Il valore minimo K_1^* e il valore massimo K_2^* del parametro K per la stabilità asintotica del sistema retroazionato:

$$0 < K < 4 = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=0}$$



6. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{k\to 0} y(k)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{k\to\infty} y(k)$ del segnale $y(k)$ corrispondente alla seguente funzione $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z(1+2\,z)}{(z-1)(z-0.5)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = 2, \qquad y_\infty = 6$$

7. Sia $1 + KG(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato. Il numero di asintoti presenti nel luogo delle radici al variare di K:

⊗ coincide con il grado relativo di $G(s)$
○ coincide con il tipo di $G(s)$
○ coincide con il numero di poli di $G(s)$
○ coincide con il numero di zeri di $G(s)$

8. Nota la relazione fondamentale $z = e^{sT}$ fra le variabili complesse $s = \sigma + j\omega$ e $z = M\,e^{j\varphi}$, è possibile affermare che:

⊗ il modulo M di z è funzione della parte reale σ di s
○ la fase φ di z è funzione della parte reale σ di s
○ il modulo M di z è funzione della parte immaginaria ω di s
⊗ la fase φ di z è funzione della parte immaginaria ω di s

9. Sia dato il sistema discreto $G(z)$ caratterizzato dal periodo di campionamento T. Fornire l'espressione analitica della funzione di risposta armonica $F(\omega)$ della funzione discreta $G(z)$:

$$G(z) = \frac{z}{z-0.5} \qquad \rightarrow \qquad F(\omega) = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - 0.5}$$

10. Indicare quale dei seguenti sistemi discreti $G(z)$ tende a zero "più rapidamente":

○ $G(z) = \frac{1}{z(z+0.5)}$
⊗ $G(z) = \frac{1}{z(4\,z+1)}$
○ $G(z) = \frac{1}{z(2\,z+1)}$
○ $G(z) = \frac{1}{z(z+2)}$

11. Il metodo delle differenze in avanti per discretizzare un sistema $G(s)$:

○ garantisce che $G(z)$ sia stabile se $G(s)$ è stabile
⊗ approssima s tramite un rapporto incrementale
⊗ consiste nel sostituire $s = (z-1)/T$
○ consiste nel sostituire $s = (1-z^{-1})/T$

12. Fornire l'enunciato del Teorema del baricentro: *La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta con ...*
polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.

13. Nel piano z i luoghi dei punti a coefficiente di smorzamento δ costante

○ sono rette uscenti dall'origine
⊗ sono tratti di spirali verso l'origine
○ sono circonferenze centrate nell'origine
○ nessuna delle precedenti risposte

14. La presenza della funzione $e^{-t_0\,s}$ nel guadagno d'anello:

○ altera il modulo del guadagno d'anello
⊗ significa che il guadagno d'anello è una funzione trascendente
○ non consente di utilizzare il criterio di Nyquist
⊗ rappresenta un ritardo finito

15. Sia $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della successione $x(k)$. Per $n = 1, 2, \ldots$, enunciare il teorema della traslazione in ritardo nel tempo:

$$\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n} X(z)$$