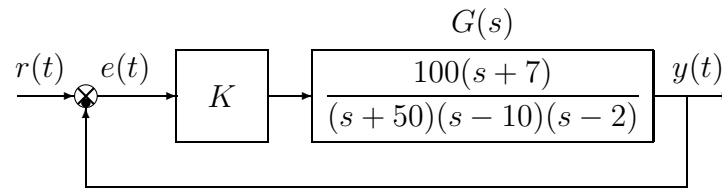


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^* . Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ é mostrato in Fig. 1.

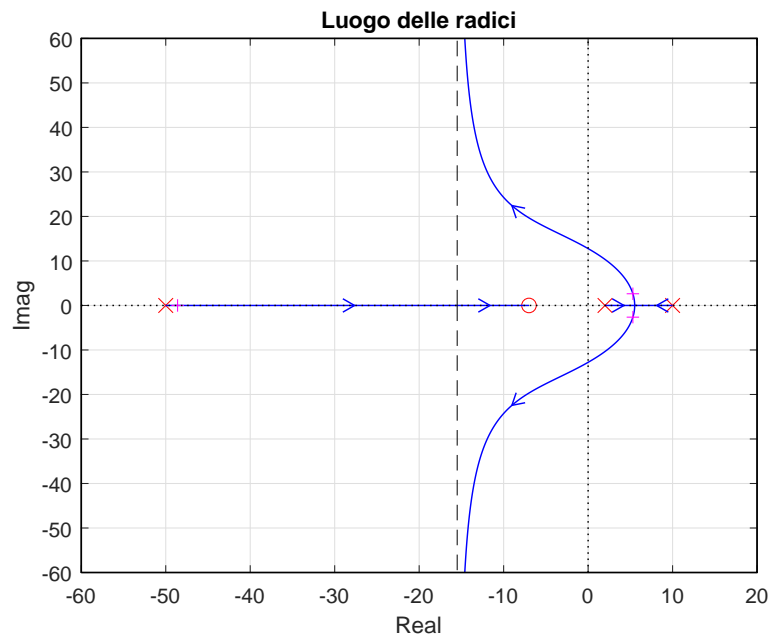


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K_1 > 0$.

Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-50 + 10 + 7 + 2) = -15.5$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K G(s) = 0 \quad \rightarrow \quad (s + 50)(s - 10)(s - 2) + 100 K(s + 7) = 0$$

$$s^3 + 38s^2 + (100K - 580)s + 700K + 1000 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 100K - 580 & \\ 2 & 38 & 700K + 1000 & \\ 1 & 38(100K - 580) - (700K + 1000) & & \\ 0 & 700K + 1000 & & \end{array}$$

Il sistema risulta essere stabile per:

$$K > \frac{23040}{3100} = 7.4323 = K^*$$

L'intersezione con l'asse immaginario si ha alla pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{100K^* - 580} = 12.776$$

a.2) Determinare per quale valore \bar{K} di K il sistema retroazionato "stabile" ha i poli alla massima distanza dall'asse immaginario.

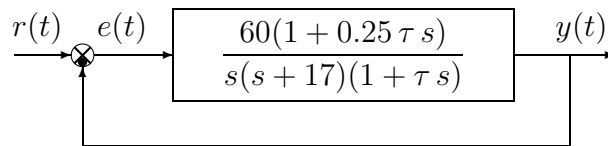
Sol. La massima distanza dei poli dall'asse immaginario si ha quando i 3 poli del sistema retroazionato sono allineati. Tale condizione si calcola facilmente utilizzando il teorema del baricentro:

$$3\sigma_0 = -50 + 10 + 2 \quad \rightarrow \quad \sigma_0 = \frac{-38}{3} = -12.666$$

Il corrispondente valore di \bar{K} si calcola nel modo seguente:

$$\bar{K} = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=\sigma_0} = -\frac{(\sigma_0 + 50)(\sigma_0 - 2)(\sigma_0 - 10)}{100(\sigma_0 + 7)} = 21.9022$$

a.3) Tracciare qualitativamente il contorno delle radici del seguente sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".



Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$s(s + 17)(1 + \tau s) + 60(1 + 0.25 \tau s) = 0 \quad \rightarrow \quad s(s + 17) + 60 + \tau s[s(s + 17) + 15] = 0$$

da cui si ricava l'equazione caratteristica $1 + \tau G_1(s) = 0$:

$$1 + \frac{\tau s[s^2 + 17s + 15]}{s^2 + 17s + 60} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\tau s(s + 0.934)(s + 16.07)}{(s + 5)(s + 12)} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 2.

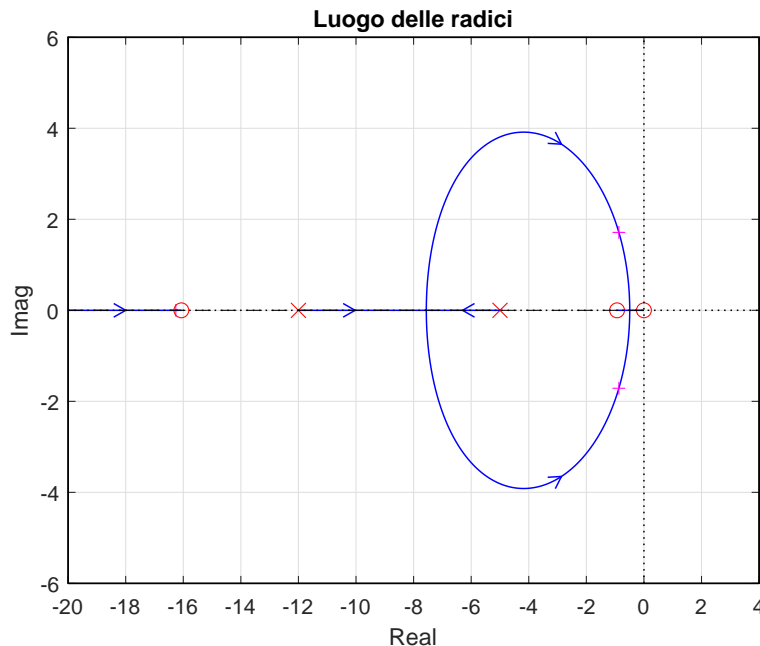
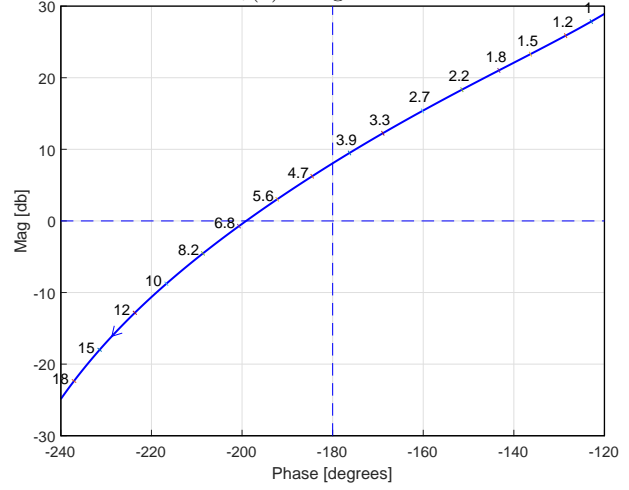
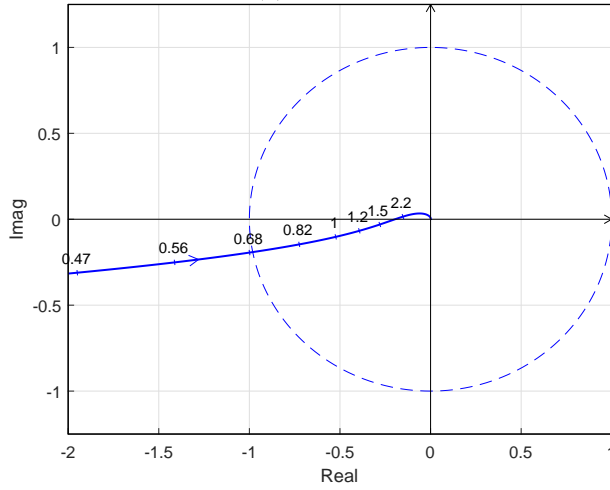


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_2(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:



- b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttiva $C(s)$ in grado di garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 240^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 3. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.3989, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 189.7^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 2.023$ e $\tau_2 = 0.2599$ della rete correttiva $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 2.507, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 50.29^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 2.023 s)}{(1 + 0.2599 s)}.$$

Sintesi della rete correttiva $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [\quad 1 \quad 1.2 \quad 1.5 \quad 2.2] \\ M_A &= [0.5334 \quad 0.3989 \quad 0.2816 \quad 0.1532] \\ \varphi_A &= [191.1 \quad 189.7 \quad 186.2 \quad 174.3] \\ M &= [1.875 \quad 2.507 \quad 3.551 \quad 6.529] \\ \varphi &= [48.93 \quad 50.29 \quad 53.79 \quad 65.69] \\ \tau_1 &= [1.615 \quad 2.023 \quad 2.446 \quad 3.051] \\ \tau_2 &= [0.164 \quad 0.2599 \quad 0.2554 \quad 0.1289] \end{aligned}$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 3.

- b.2) Per il sistema $G_b(s)$ progettare una rete ritardatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = -13.98 \text{ db} = 0.2$ e $\varphi_B = -180^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 4. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 3.3$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 12.25 \text{ db} = 4.096, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -168.9^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

Diagramma di Nyquist

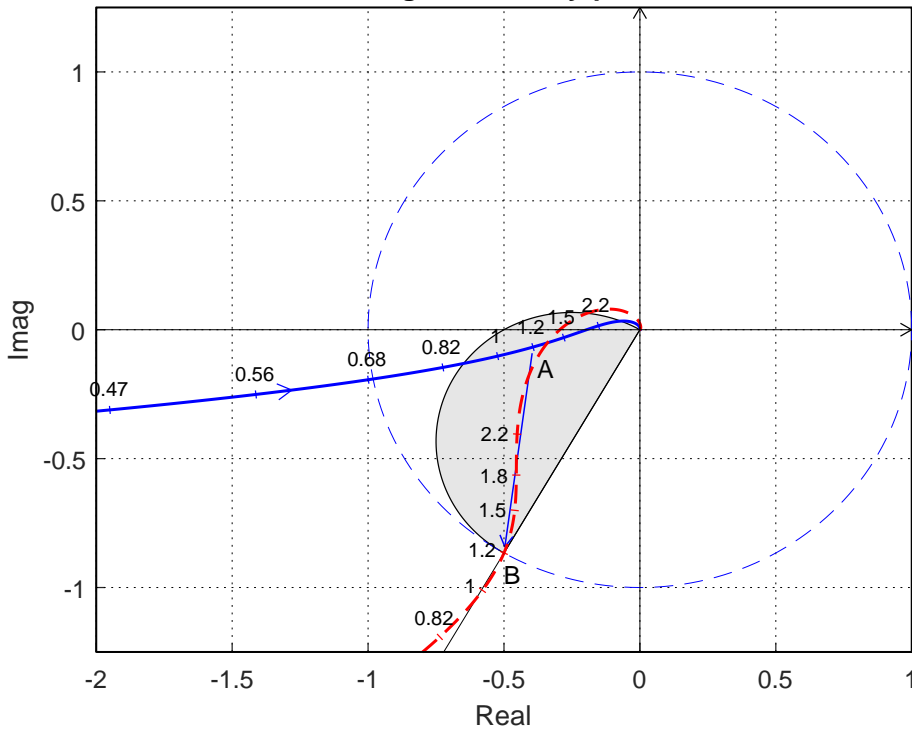


Figura 3: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$.

si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 1.47$ e $\tau_2 = 30.74$ della rete correttiva $C_1(s)$:

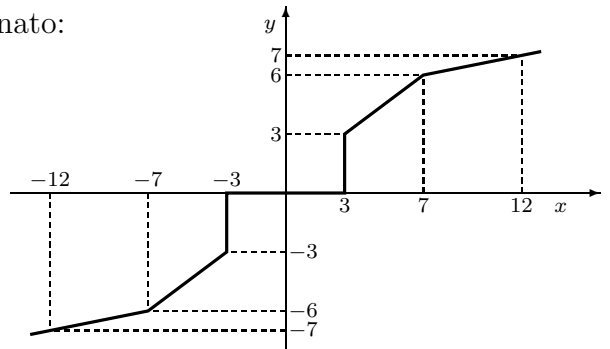
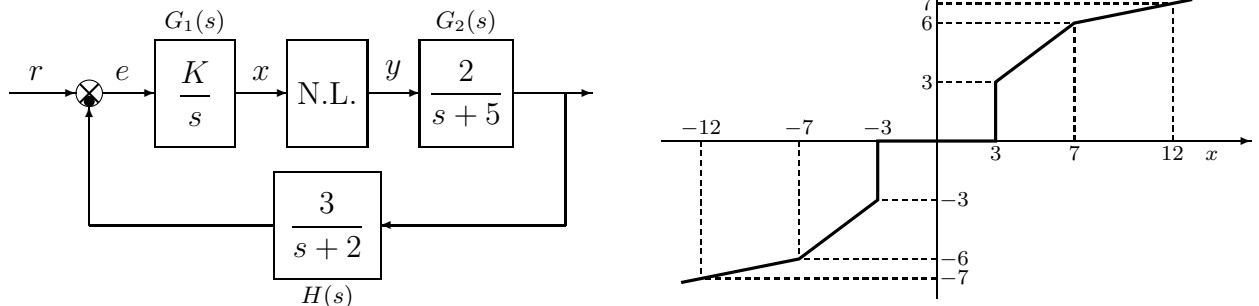
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.04883, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -11.08^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 1.47s)}{(1 + 30.74s)}$$

Sintesi della rete correttiva $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A :

$\omega_A =$	[3.9	3.3	2.7	2.2	1.8	1.5	1.2]
$M_A =$	[2.982	4.096	5.865	8.25	11.25	14.61	19.68]
$\varphi_A =$	[183.7	191.1	199.8	208.5	216.7	223.7	231.4]
$M =$	[0.0670	0.0488	0.0341	0.0242	0.0177	0.0136	0.0101]
$\varphi =$	[-3.721	-11.08	-19.83	-28.54	-36.7	-43.67	-51.44]
$\tau_1 =$	[3.678	1.47	0.9898	0.8128	0.7287	0.6852	0.6534]
$\tau_2 =$	[54.97	30.74	30.99	38.41	51.53	69.85	104.2]

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



c.1) Posto $K = 1$, determinare per quale valore r_1 dell'ingresso r il punto di lavoro del sistema retroazionato è posizionato in $(x_1, y_1) = (5, 4.5)$.

Soluzione. Il sistema è caratterizzato dai seguenti guadagni statici: $K_1 = \infty$, $K_2 = \frac{2}{5}$ e $K_3 = \frac{3}{2}$. La retta di carico della parte lineare del sistema è una retta orizzontale di ordinata:

$$y = \frac{r_1}{K_2 K_3} \quad \rightarrow \quad r_1 = K_2 K_3 y \quad \rightarrow \quad r_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4.5 = 2.7$$

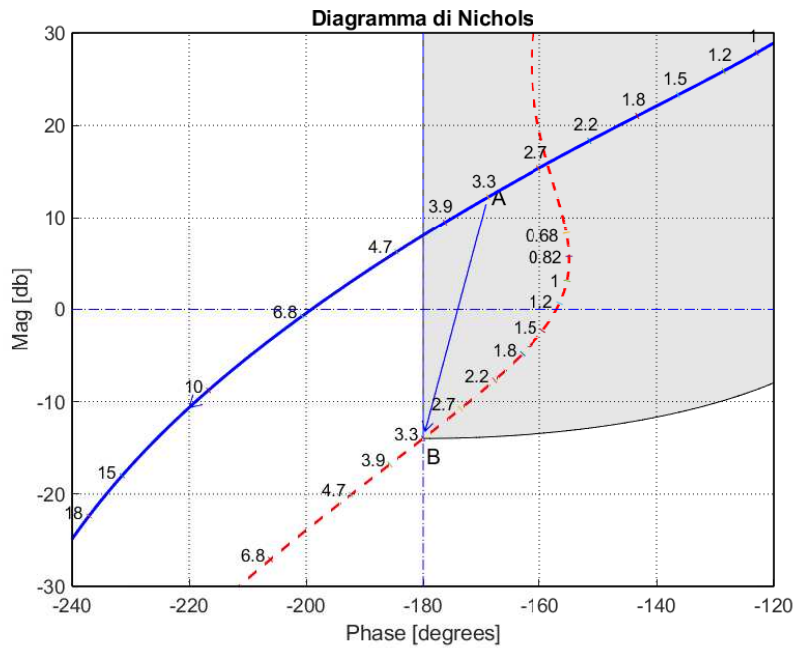


Figura 4: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$.

- c.2) Posto $K = 1$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile o meno nell'intorno del punto $(x_1, y_1) = (5, 4.5)$.

Soluzione. Le pendenze α e β di 2 rette che centrate in $(x_0, y_0) = (5, 4.5)$ racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = \frac{1}{5}, \quad \beta = \frac{4.5}{2} = 2.25.$$

Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -5, \quad -\frac{1}{\beta} = -\frac{2}{4.5} = 0.444.$$

La funzione $G_1(s)$ che descrive la parte lineare del sistema è :

$$G_1(s) = \frac{6}{s(s+2)(s+5)}$$

Il margine di ampiezza \bar{K}^* e la pulsazione ω^* della funzione $G_1(s)$ si determinano nel seguente modo:

$$K^* = \frac{2 \cdot 5 \cdot (2+5)}{6} = \frac{70}{6} = \frac{35}{3} = 11.66, \quad \omega^* = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10} = 3.1623$$

Il valore di \bar{K}^* è maggiore di β :

$$\bar{K}^* > \beta$$

per cui in base al criterio del cerchio si può concludere che il sistema retroazionato è globalmente asintoticamente stabile nell'intorno del punto di lavoro $(5, 4.5)$. In Fig. 5 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ sovrapposto al cerchio critico.

- c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0, 0)$. Utilizzare delle variabili (per esempio: m_1, m_2, \dots) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

Soluzione. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 6.

Il valore m_1 del massimo intermedio può essere calcolato solo conoscendo la $F(X)$ per $X > 3$. Per $X \rightarrow \infty$ la $F(X)$ tende al valore finale minimo $m_3 = 0.2$.

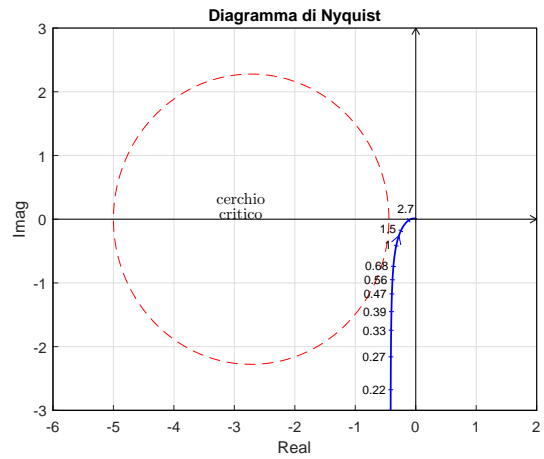
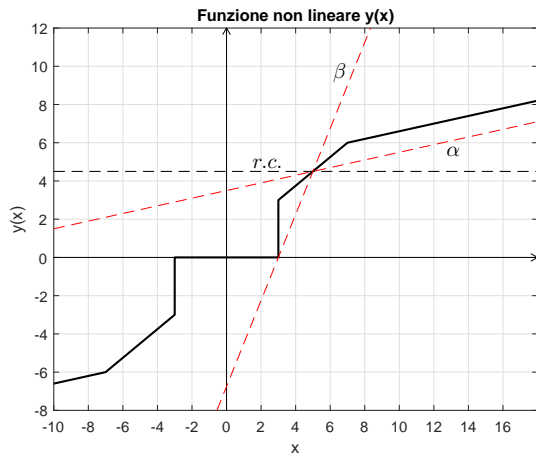


Figura 5: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ e cerchio critico.

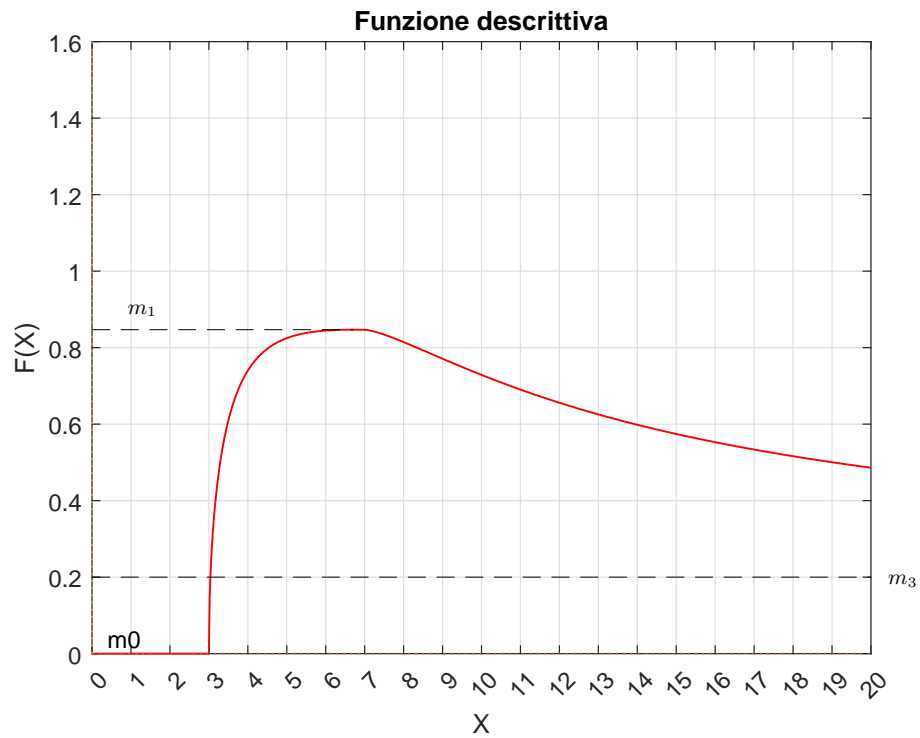


Figura 6: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

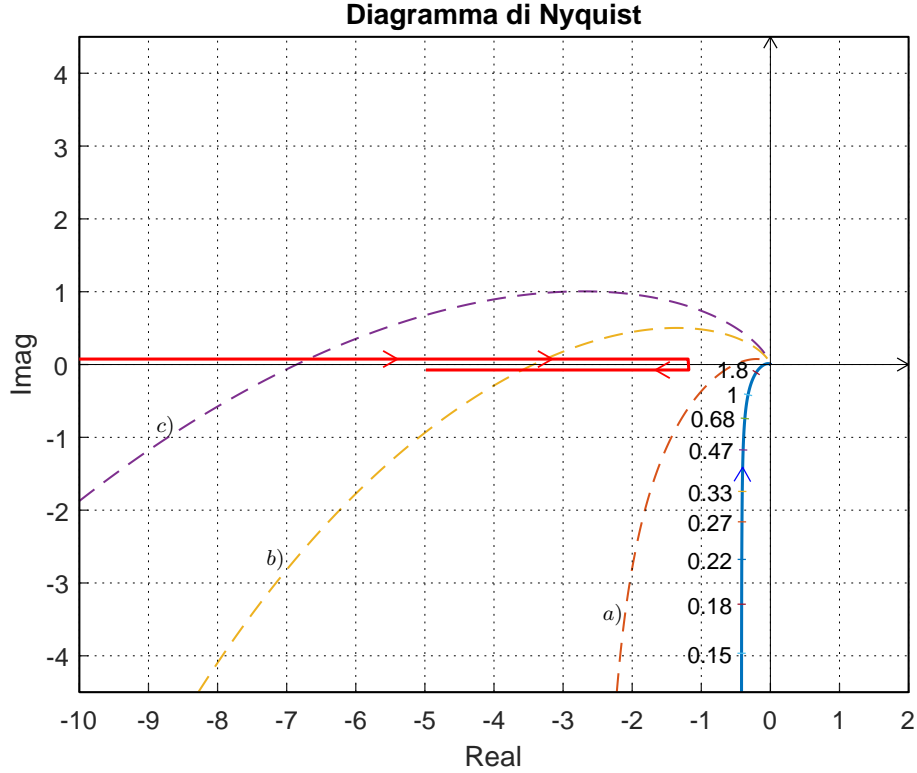


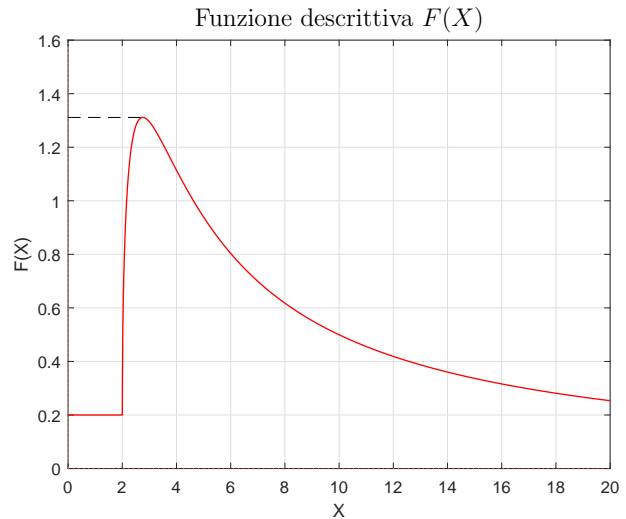
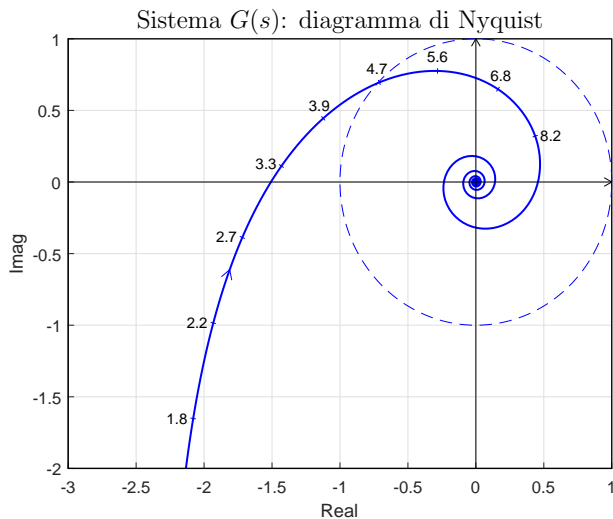
Figura 7: Discussione grafica al variare di K .

c.4) Discutere “qualitativamente” (in funzione anche dei parametri m_1, m_2, \dots) l’esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Soluzione. Per $K = 1$, il margine di ampiezza \bar{K}^* del sistema $G_1(s)$ è $\bar{K}^* = 11.66$. Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K G_1(s)$ è $K^* = \frac{\bar{K}^*}{K}$. Al variare di K^* si possono avere le seguenti condizioni di funzionamento:

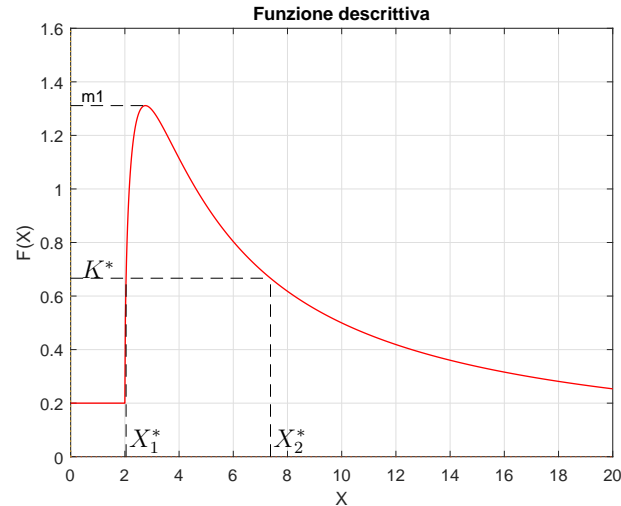
- Per $K^* > m_1$, il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ non interseca la funzione $-1/F(X)$ per cui il sistema retroazionato è globalmente asintoticamente stabile perchè la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma polare completo.
- Per $m_3 < K^* < m_1$, il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in due punti: il primo punto corrisponde a un ciclo limite instabile, il secondo punto corrisponde a un ciclo limite stabile.
- Per $K^* < m_3$ il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite instabile.

d) Dato il diagramma di Nyquist di un sistema $G(s)$ posto in retroazione negativa su di una non linearità $y = y(x)$ di cui viene fornita la funzione descrittiva $F(X)$.



d.1) Nei limiti della precisione dei grafici forniti, determinare l'ampiezza X^* , la pulsazione ω^* e la stabilità degli eventuali cicli limite stabili presenti nel sistema retroazionato.

Sol. Dal diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ si ricava (in modo approssimato) il margine di ampiezza $K^* \simeq \frac{1}{1.5} = 0.666$ e la pulsazione $\omega^* \simeq 3.1$.



Utilizzando la funzione descrittiva $F(X)$ che è stata fornita ed imponendo $F(X^*) = K^*$ si ricava:

$$X_1^* \simeq 2.1, \quad X_2^* \simeq 7.4.$$

d.2) Progettare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete correttiva $C(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ da mettere in cascata al sistema $G(s)$ in modo che nel sistema retroazionato sia presente un ciclo limite stabile di ampiezza $X^* = 3$ in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 2.2$.

Sol. Nel sistema retroazionato sarà presente un ciclo limite stabile di ampiezza $X^* = 3$ solo se il margine di ampiezza \bar{K}^* del sistema compensato $C(s)G(s)$ ha il valore $\bar{K}^* \simeq 1.31$ che si ricava dalla $F(X)$ in corrispondenza del valore $X^* = 3$. Il sistema compensato dovrà quindi passare per il punto $B = -\frac{1}{\bar{K}^*}$:

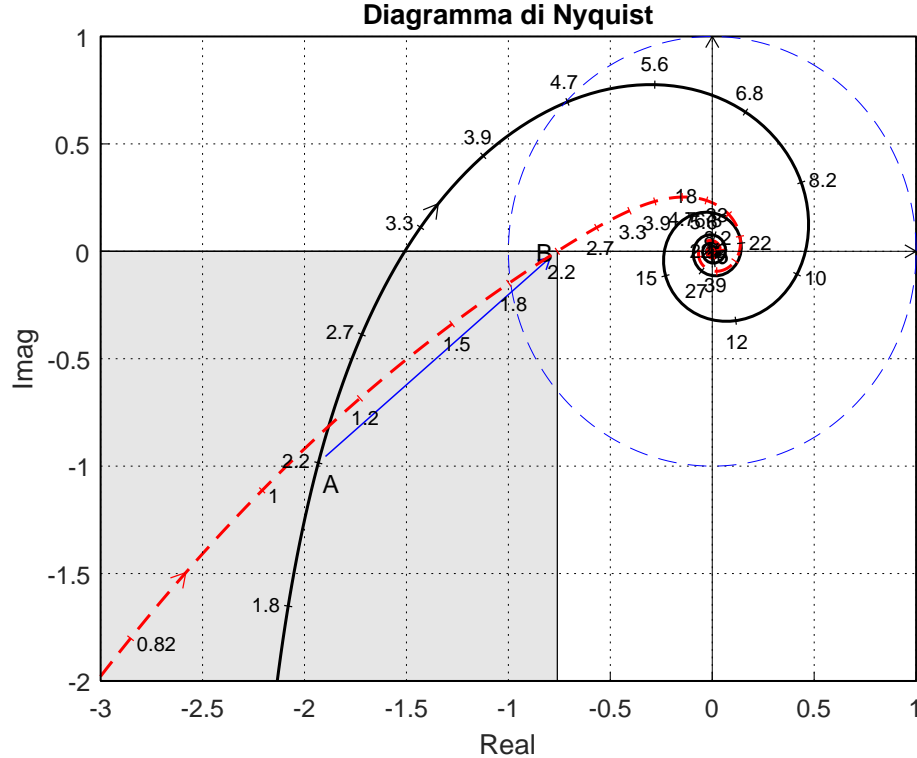
$$M_B = 0.76, \quad \varphi_B = 180^\circ$$

Un punto A che deve essere portato in B è quello caratterizzato dalla pulsazione $\omega = 2.2$:

$$M_A = 2.1687, \quad \varphi_A = 207^\circ \quad \longrightarrow \quad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.3504, \quad \varphi = -27^\circ$$

La rete ritardatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.5412, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 1.965 \quad \longrightarrow \quad C(s) = \frac{1 + 0.5412 s}{1 + 1.965 s}$$



e) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete correttiva

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s + 7)}{(s + 2)(s + 1)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \frac{(s + 7)}{(s + 2)(s + 1)} \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T(1 - z^{-1} + 7T)}{(1 - z^{-1} + 2T)(1 - z^{-1} + T)}$$

Per $T = 0.1$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.17 - 0.1 z^{-1}}{(1.2 - z^{-1})(1.1 - z^{-1})} = \frac{0.17 - 0.1 z^{-1}}{1.32 - 2.3 z^{-1} + z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = \frac{1}{1.32} [2.3 m(k - 1) - m(k - 2) + 0.17 e(k) - 0.1 e(k - 1)]$$

cioè:

$$m(k) = 1.7424 m(k - 1) - 0.7576 m(k - 2) + 0.1288 e(k) - 0.0758 e(k - 1)]$$

f) Partendo dalla condizione iniziale non nulla $y(0) = 1$, calcolare la risposta $y(n)$ al gradino unitario $x(n) = (1, 1, 1, \dots)$ del seguente sistema dinamico discreto:

$$y(n + 1) - y(n) = 3x(n)$$

Sol. Applicando la Z-trasformata alla precedente equazione alle differenze si ottiene:

$$z Y(z) - z y(0) - Y(z) = 3 X(z)$$

Esprimendo $Y(z)$ in funzione di $X(z)$ e della condizione iniziale $y(0)$ si ottiene:

$$Y(z) = \frac{3}{z - 1} X(z) + \frac{y(0) z}{z - 1} = \frac{3 z}{(z - 1)^2} + \frac{z}{z - 1}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = 3n + 1$$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

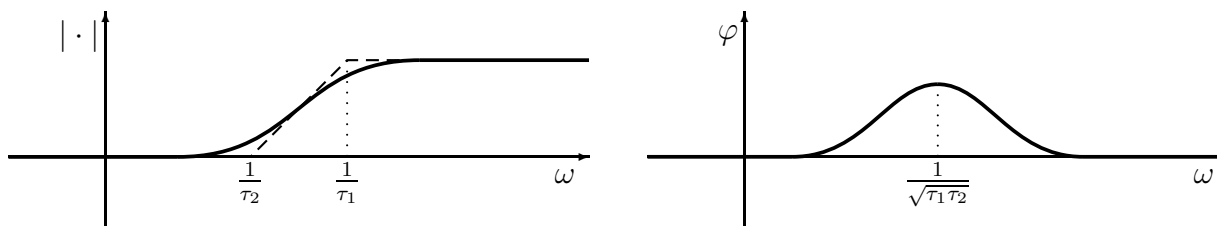
1. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y_{n+3} + 4y_{n+2} + 5y_{n+1} + 3y_n = 7x_{n+2} + 2x_{n+1} \quad \rightarrow \quad G(z) = \frac{7z^2 + 2z}{z^3 + 4z^2 + 5z + 3}$$

2. Sia $G(z)$ la \mathcal{Z} -trasformata della successione numerica $g(k)$. Scrivere gli enunciati dei teoremi del valore iniziale e del valore finale:

$$g(0) = g(k)|_{k=0} = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z), \quad g(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})G(z).$$

3. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete anticipatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\tau_2 s)}$, ($\tau_1 > \tau_2$):



4. Fornire l'enunciato del Teorema del baricentro: *La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta con ... polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.*

5. In un sistema discreto a segnali campionati, qual è il legame che lega la variabile discreta z e la variabile s di Laplace?

$$z = e^{sT}.$$

6. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine 0:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

7. Calcolare la soluzione $y(n)$ della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale $y(0) = y_0$:

$$y(n+1) + 0.4y(n) = 0 \quad \rightarrow \quad y(n) = y_0 (-0.4)^n.$$

8. Calcolare la \mathcal{Z} -trasformata $X(z)$ delle seguenti due successioni numeriche $x(k)$:

$$x(k) = 3k \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{3z}{(z-1)^2}, \quad x(k) = e^{2kT} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z - e^{2T}}.$$

9. Nel piano z i luoghi dei punti a coefficiente di smorzamento δ costante

- sono rette uscenti dall'origine sono tratti di spirali verso l'origine
 sono circonferenze centrate nell'origine nessuna delle precedenti risposte

10. L'uso di un regolatore standard di tipo PI è consigliato:

- Se si desidera introdurre un anticipo di fase
- Se si desidera amplificare alle basse frequenze
- Se si desidera introdurre un ritardo di fase alle alte frequenze
- Se si desidera avere errore a regime nullo per ingresso a gradino

11. Si consideri il sistema

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+12)}{(s^2+4)(s+10)}$$

e il corrispondente luogo delle radici rappresentato in figura.

1) Determinare per quali valori di $K > 0$ il sistema retroazionato è stabile.

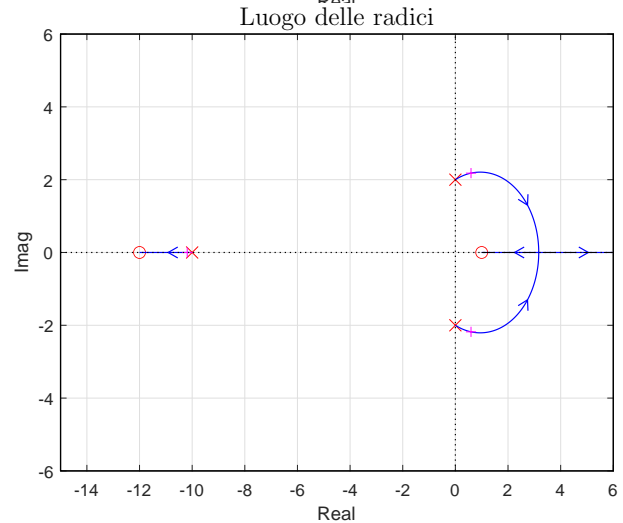
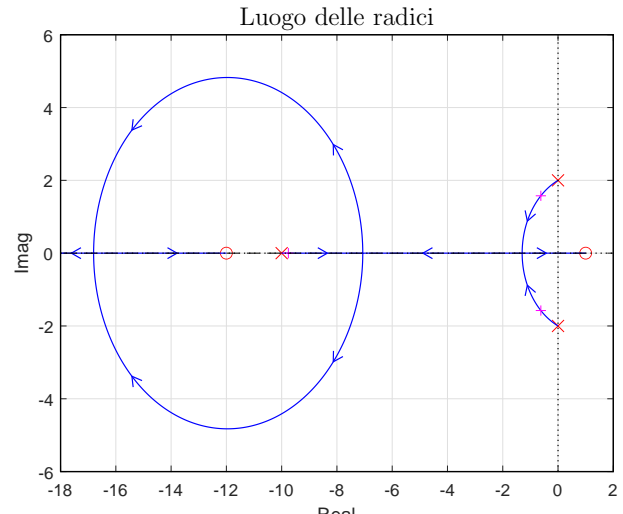
$$0 < K < - \frac{1}{G(s)} \Big|_{s=0} = 3.333$$

2) Nei limiti della precisione consentita dal grafico riportato sopra, calcolare il minimo tempo di assestamento ottenibile al variare di $K > 0$.

$$\sigma_1 = -1.298, \quad T_a = \frac{3}{|\sigma_1|} = 2.31$$

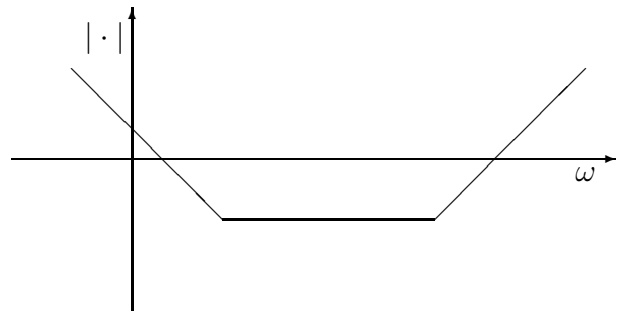
essendo σ_1 il punto di diramazione più vicino all'asse immaginario.

3) Nella figura a fianco, tracciare il luogo delle radici per valori $K < 0$.

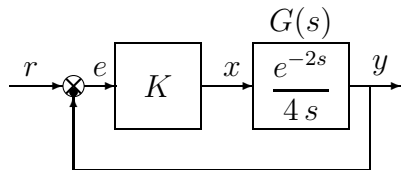


12. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PID e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

$$G(s) = K \left(1 + T_s s + \frac{1}{T_i s} \right)$$



13. Sia dato il seguente sistema retroazionato. Per quale valore di K il sistema retroazionato è stabile con un margina di fase $M_\varphi = 60^\circ$?



$$K = \frac{4}{t_0} \left(\frac{\pi}{2} - M_\varphi \right) = \frac{4}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3} = 1.0472$$