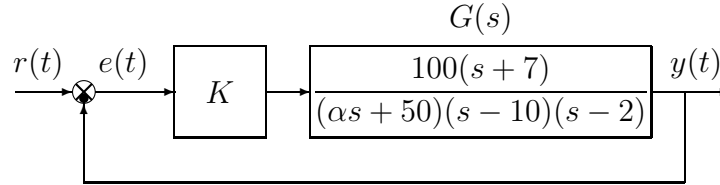


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Posto  $\alpha = 1$ , tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro  $K > 0$ . Determinare per quali valori di  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre la posizione degli asintoti, le intersezioni  $\omega^*$  con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno  $K^*$ . Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

*Sol.* L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema  $G(s)$  al variare del parametro  $K > 0$  è mostrato in Fig. 1.

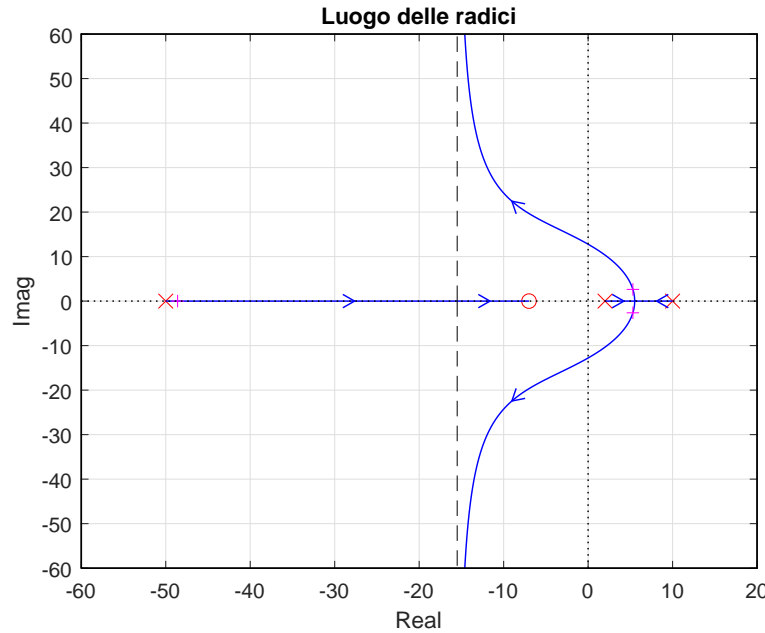


Figura 1: Luogo delle radici del sistema  $G_1(s)$  al variare di  $K_1 > 0$ .

Il centro degli asintoti  $\sigma_a$  è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (-50 + 10 + 7 + 2) = -15.5$$

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{100(s+7)}{(s-2)(s-10)(s+50)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 38s^2 + (100K - 580)s + (700K + 1000) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100K - 580 \\ 2 & 38 & 700K + 1000 \\ 1 & 3100K - 23040 & \\ 0 & 700K + 1000 & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$3100K - 23040 > 0, \quad 700K + 1000 > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > 7.4323, \quad K > -1.4286.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 7.4323 = K_1.$$

La pulsazione  $\omega_1$  corrispondente al valore limite  $K_1$  è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{700K_1 + 1000}{38}} = 12.776.$$

a.2) Posto  $K = 10$  nel sistema retroazionato sopra definito, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro  $\alpha > 0$ . Il calcolo di  $\alpha^*$  non è necessario. Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

*Sol.* Posto  $K = 10$ , l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$1 + K \frac{100(s+7)}{(s-2)(s-10)(\alpha s+50)} = 0 \quad \rightarrow \quad (s-2)(s-10)(\alpha s+50) + 100K(s+7) = 0$$

da cui si ricava la seguente equazione caratteristica  $1 + \alpha G_2(s) = 0$ :

$$1 + \frac{\alpha s(s-2)(s-10)}{50(s-2)(s-10) + 100K(s+7)} = 0$$

Posto  $K = 10$  e mettendo in evidenza i poli della funzione  $G_2(s)$  si ottiene:

$$1 + \frac{\alpha s(s-2)(s-10)}{50[s^2 + (2K-12)s + 20 + 14K]} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \frac{\alpha s(s-2)(s-10)}{50[(s+4)^2 + 12^2]} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro  $\alpha > 0$  è mostrato in Fig. 2.

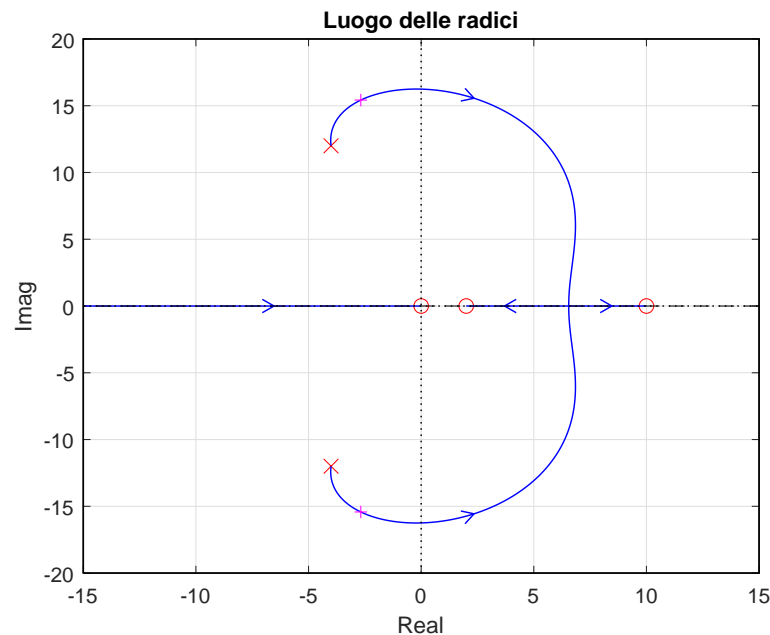


Figura 2: Contorno delle radici del sistema  $G_2(s)$  al variare del parametro  $\alpha > 0$ .

Il contorno delle radici ha un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo e percorso dall'infinito al finito.

b) Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$G_3(s) = \frac{2}{(R + Ls)(s + 2) + 4}$$

b.1) Posto  $R = 1$ , mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione di trasferimento  $G_3(s)$  al variare del parametro  $L > 0$ . Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

*Soluzione.* I poli della funzione di trasferimento  $G_3(s)$  coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$(R + Ls)(s + 2) + 4$$

Posto  $R = 1$  si ottiene la seguente equazione:

$$s + 6 + Ls(s + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + L \frac{s(s + 2)}{s + 6} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + L G_4(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro  $L > 0$  è mostrato in Fig. 3. In questo caso

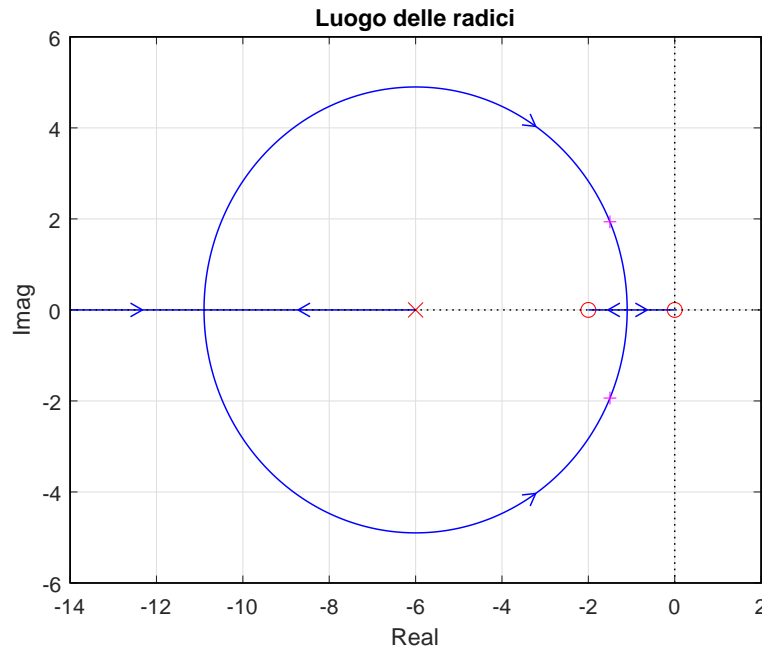


Figura 3: Contorno delle radici del sistema  $G_4(s)$  al variare del parametro  $L > 0$ .

il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in  $z = -6$ . Il raggio  $R$  della circonferenza è il seguente:

$$R = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24} = 4.899$$

I punti di diramazione  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  del contorno delle radici sono:

$$\sigma_1 = -6 - \sqrt{24} = -10.899, \quad \sigma_2 = -6 + \sqrt{24} = -1.101.$$

È possibile giungere allo stesso risultato nel seguente modo:

$$\frac{dG_4(s)}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad (2s + 2)(s + 6) - (s^2 + 2s) = s^2 + 12s + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{1,2} = -6 \pm \sqrt{24}.$$

b.2) Posto  $L = 1$ , mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione di trasferimento  $G_3(s)$  al variare del parametro  $R > 0$ . Determinare esattamente la posizione dei punti di diramazione. Calcolare il valore  $R^*$  a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema  $G_3(s)$  alla risposta al gradino.

*Soluzione.* Posto  $L = 1$ , il denominatore della funzione  $G_3(s)$  può essere riscritta nel seguente modo:

$$(R + s)(s + 2) + 4 = 0$$

che, in modo equivalente, può essere riscritta nel seguente modo:

$$1 + R \frac{(s+2)}{s^2 + 2s + 4} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + R \frac{(s+2)}{(s+1)^2 + \sqrt{3}^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + R G_5(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro  $R > 0$  è mostrato in Fig. 4. In questo caso

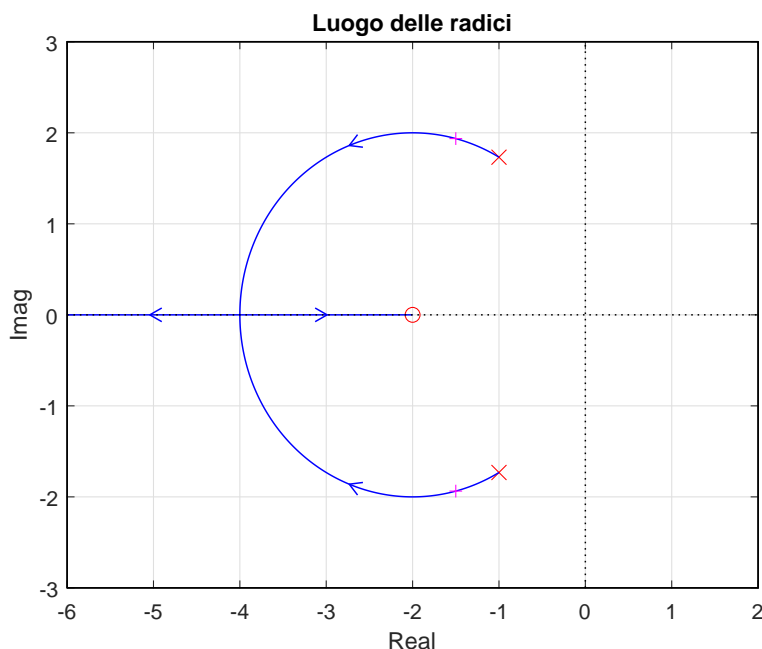


Figura 4: Contorno delle radici del sistema  $G_5(s)$  al variare del parametro  $R > 0$ .

il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in  $z = -2$ . Il raggio  $R$  della circonferenza è il seguente:

$$R = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

I punti di diramazione  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  del contorno delle radici sono:

$$\sigma_1 = -2 - 2 = -4, \quad \sigma_2 = -2 + 2 = 0.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento di ha in corrispondenza del punto di diramazione  $\sigma_1 = -4$  e quindi per il seguente valore del parametro  $R^*$ :

$$R^* = - \frac{1}{G_5(s)} \Big|_{s=\sigma_2} = - \frac{s^2 + 2s + 4}{(s+2)} \Big|_{s=-4} = 6.$$

b.3) Si faccia riferimento alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + K G_3(s) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{2K}{(R+Ls)(s+2) + 4} = 0$$

Si determini, in funzione di  $L > 0$  e di  $R > 0$ , per quali valori di  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

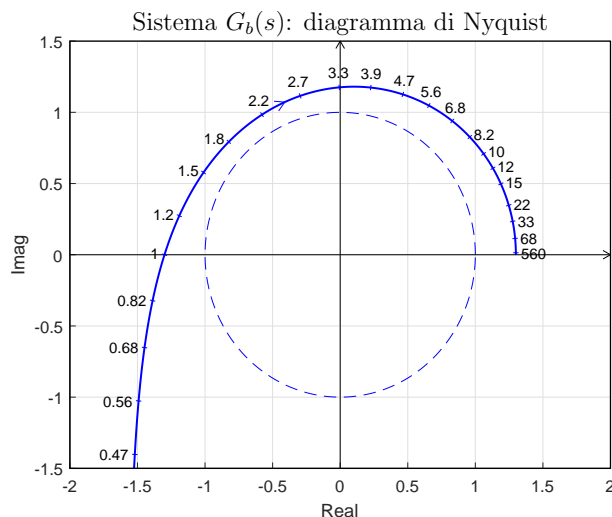
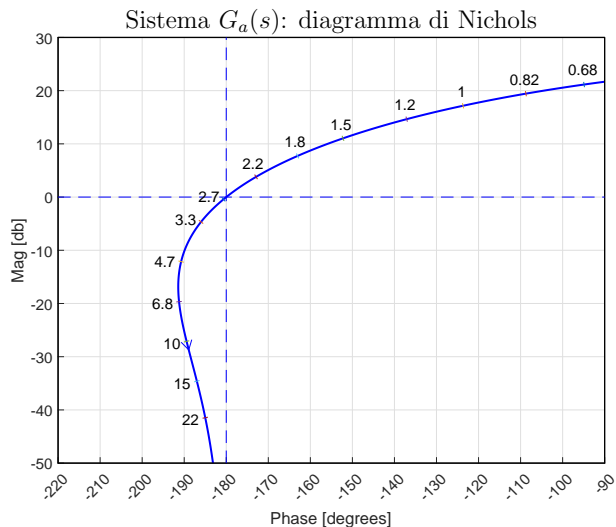
*Sol.* L'equazione caratteristica del sistema può essere riscritta nel seguente modo:

$$(R+Ls)(s+2) + 4 + 2K = 0 \quad \rightarrow \quad Ls^2 + (R+2L)s + 2R+4+2K = 0$$

L'equazione caratteristica è del secondo ordine. I poli dell'equazione caratteristica sono a parte reale negativa se e sole se i coefficienti dell'equazione hanno tutti lo stesso segno. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > -R - 2.$$

c) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi  $G_a(s)$  e  $G_b(s)$ :



c.1) Per il sistema  $G_a(s)$ , progettare una rete anticipatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di fase  $M_\varphi = 50^\circ$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno.

Soluzione. La posizione del punto  $B$  è completamente determinata dalla specifica di progetto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = 0 \text{ db} = 1$  e  $\varphi_B = -130^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto  $A = G_a(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 6.8$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = -19.66 \text{ db} = 0.104, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -191.2^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 1.533$  e  $\tau_2 = 0.0633$  della rete corretttrice  $C_1(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 9.617, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 61.23^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 1.533s)}{(1 + 0.0633s)}.$$

Sintesi della rete corretttrice  $C_1(s)$  con altri valori della pulsazione  $\omega_A$ :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [ 4.7 & 6.8 & 10 & 15 & 22 ] \\ M_A &= [ 0.2474 & 0.104 & 0.0440 & 0.0186 & 0.0084 ] \\ \varphi_A &= [ 169.3 & 168.8 & 170.6 & 173 & 175 ] \\ M &= [ 4.042 & 9.617 & 22.7 & 53.72 & 118.4 ] \\ \varphi &= [ 60.74 & 61.23 & 59.43 & 56.99 & 55 ] \\ \tau_1 &= [ 0.8666 & 1.533 & 2.577 & 4.227 & 6.536 ] \\ \tau_2 &= [ 0.0588 & 0.0633 & 0.0539 & 0.0418 & 0.0313 ] \end{aligned}$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 5.

c.2) Per il sistema  $G_b(s)$ , progettare una rete corretttrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza  $M_a = 5$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno.

Soluzione. La posizione del punto  $B$  è completamente determinata dalla specifica di progetto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = 0.2$  e  $\varphi_B = 180^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 6. Il punto  $A = G_b(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 0.82$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.425, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 193.1^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

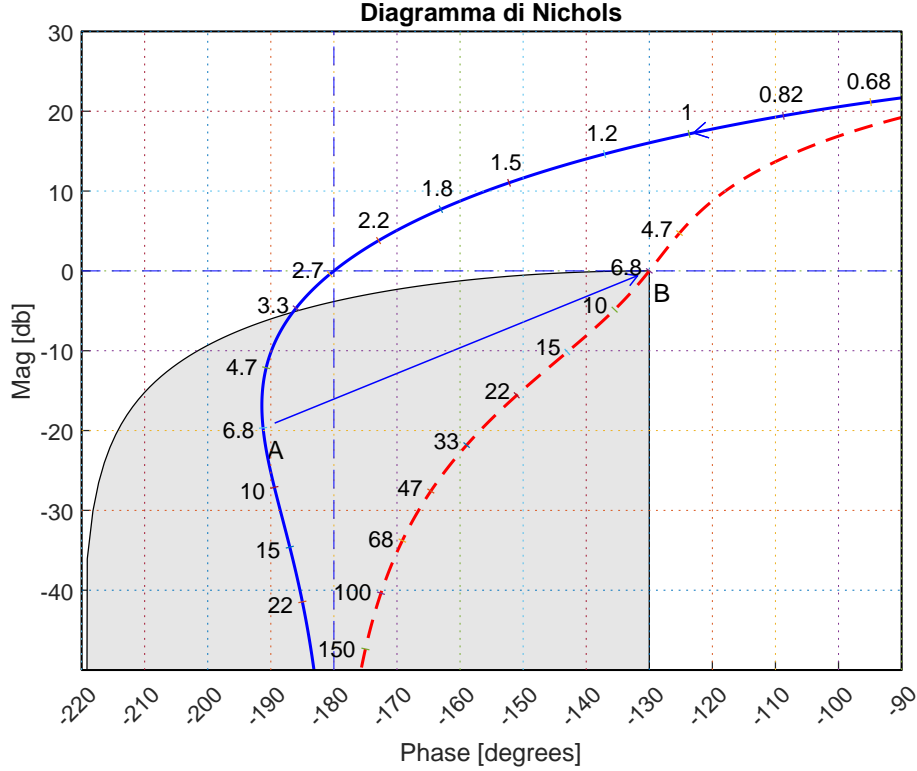


Figura 5: Diagrammi di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$ .

si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 4.497$  e  $\tau_2 = 33.18$  della rete correttiva  $C_1(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1404, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -13.07^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 4.497s)}{(1 + 33.18s)}.$$

Sintesi della rete correttiva  $C_1(s)$  con altri valori della pulsazione  $\omega_A$ :

$\omega_A =$	0.82	0.68	0.56	0.47	0.39	0.33
$M_A =$	1.425	1.588	1.811	2.068	2.41	2.786
$\varphi_A =$	193.1	204.2	214.5	222.7	230.3	236.1
$M =$	0.1404	0.126	0.1105	0.0967	0.0829	0.0717
$\varphi =$	-13.07	-24.24	-34.54	-42.7	-50.25	-56.09
$\tau_1 =$	4.497	2.816	2.247	2.002	1.856	1.775
$\tau_2 =$	33.18	25.17	25.92	30.13	38.05	48.83

I diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 6.

d) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare il seguente sistema tempo-continuo:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+1)}{(s+4)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.1$ .

*Soluzione.* Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \left. \frac{(s+1)}{(s+4)} \right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T+1-z^{-1}}{4T+1-z^{-1}}$$

Sostituendo  $T = 0.1$  si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.1-z^{-1}}{1.4-z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze ha la forma seguente:

$$m_k = \frac{1}{1.4} [m_{k-1} + 1.1 e_k - e_{k-1}]$$

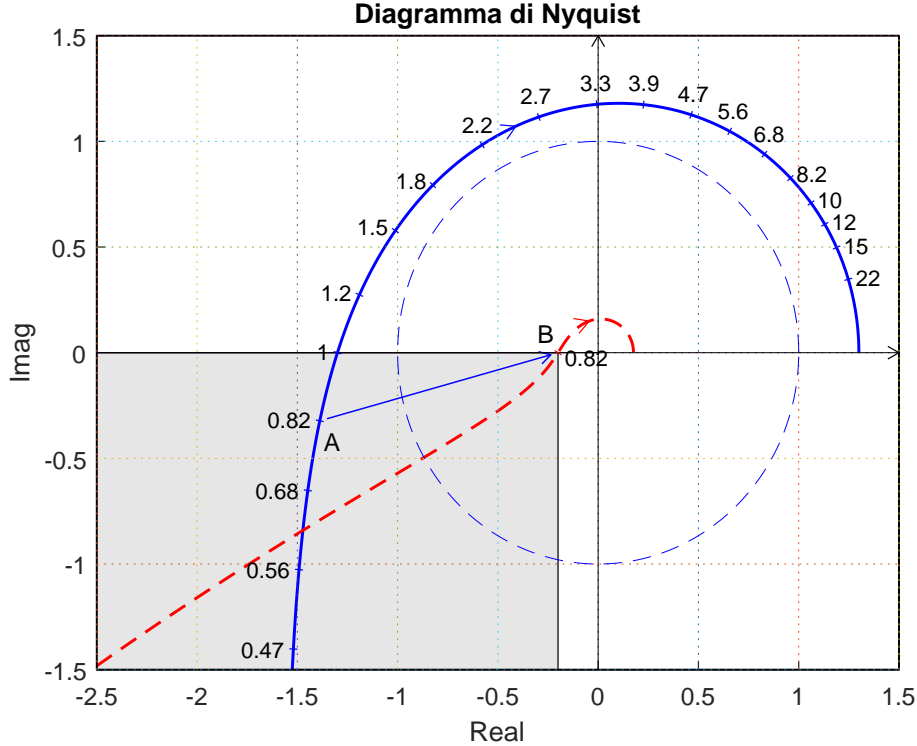


Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_b(s)$  e  $C_2(s)G_b(s)$ .

cioè:

$$m_k = 0.71429 m_{k-1} + 0.78571 e_k - 0.71429 e_{k-1}$$

- e) Partendo da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta  $y(n)$  della seguente equazione alle differenze:

$$y(n+1) = -0.4y(n) + 7x(n)$$

quando in ingresso è presente il gradino unitario  $x(n) = 1$ .

*Soluzione.* L'equazione alle differenze genera la seguente funzione discreta  $G(z)$ :

$$y(n+1) + 0.4y(n) = 7x(n) \quad \leftrightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{7}{z+0.4}$$

La  $\mathcal{Z}$ -trasformata del segnale di ingresso  $x(n) = 1$  è:

$$X(z) = z/(z-1).$$

La  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $Y(z)$  del segnale di uscita è quindi la seguente:

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{7z}{(z+0.4)(z-1)}.$$

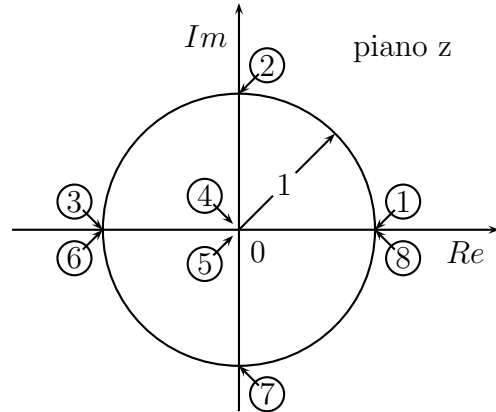
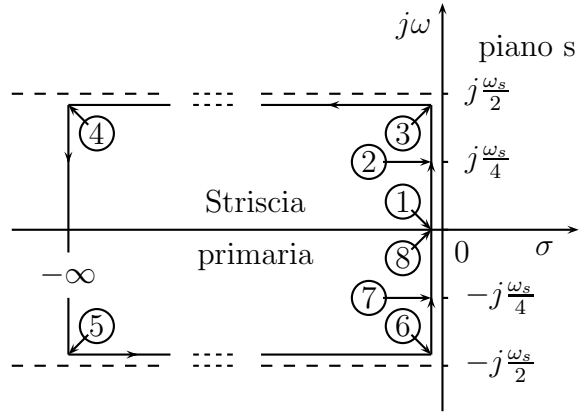
Mediante il metodo della scomposizione in fratti semplici si ricava:

$$Y(z) = z \left[ \frac{7}{(z-1)(z+0.4)} \right] = z \left[ \frac{5}{z-1} - \frac{5}{z+0.4} \right]$$

e quindi:

$$Y(z) = \frac{5z}{z-1} - \frac{5z}{z+0.4} \quad \rightarrow \quad y(n) = 5[1 - (-0.4)^n].$$

- f) Indicare sul piano  $z$  dove sono collocati i punti della striscia primaria numerati da 1 a 8:



Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

1. Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{5z^2 + 3z + 2}{4z^3 + 2z^2 + 2z + 2} \quad \rightarrow \quad 4y_{k+3} + 2y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = 5x_{k+2} + 3x_{k+1} + 2x_k$$

2. La funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  di un sistema discreto  $G(z)$  si determina nel seguente modo:

$F(\omega) = G(e^{j\omega T})$     
  $F(\omega) = G(e^{j\omega})$     
  $F(\omega) = G(j\omega T)$     
  $F(\omega) = G(j\omega)$

3. L'uso di una rete anticipatrice è consigliato

- per stabilizzare sistemi con margini di fase fortemente negativi
- se si desidera aumentare il coefficiente di smorzamento  $\delta$  dei poli dominanti
- se si desidera aumentare la larghezza di banda del sistema

4. La trasformazione bilineare è definita come segue:

$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$     
  $s = \frac{2}{T} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$     
  $s = \frac{2}{T} \frac{z+1}{z-1}$     
  $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

5. In corrispondenza di una radice multipla di ordine  $h$  il luogo delle radici

- presenta  $h$  rami entranti
- presenta  $h$  rami uscenti
- le tangenti ai rami entranti dividono il piano in settori uguali
- le tangenti ai rami uscenti coincidono con le tangenti ai rami entranti

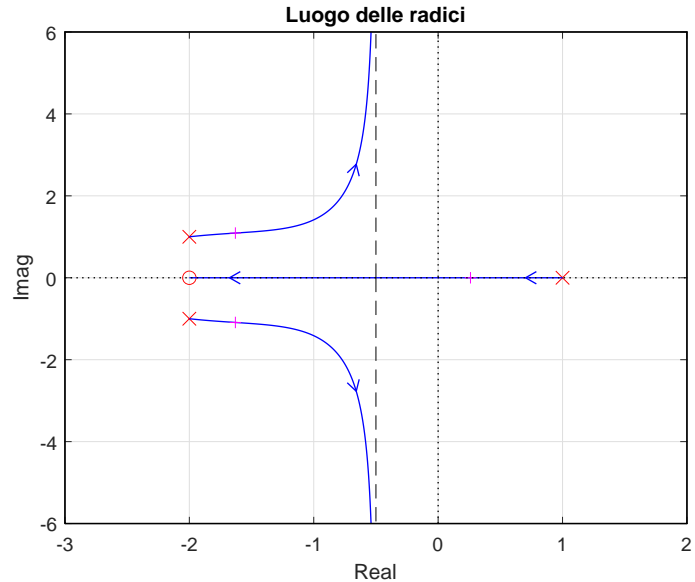
6. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema  $G(s) = \frac{2(s+2)}{(s-1)((s+2)^2+1)}$  al variare del parametro  $K > 0$ . Calcolare:

1) L'ascissa  $\sigma_0$  corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

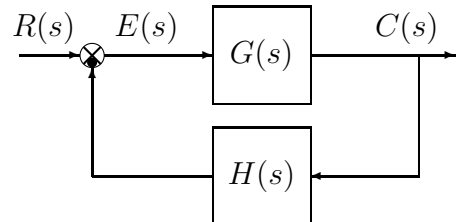
$$\sigma_0 = -1$$

2) Il valore  $K_0$  corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

$$K_0 = - \left. \frac{1}{G(s)} \right|_{s=-1} = 2$$



7. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema  $G(s)$  alla variazione relativa del sistema retroazionato  $G_0(s)$  quando varia un parametro  $\alpha$  interno alla funzione di trasferimento  $G(s)$ :



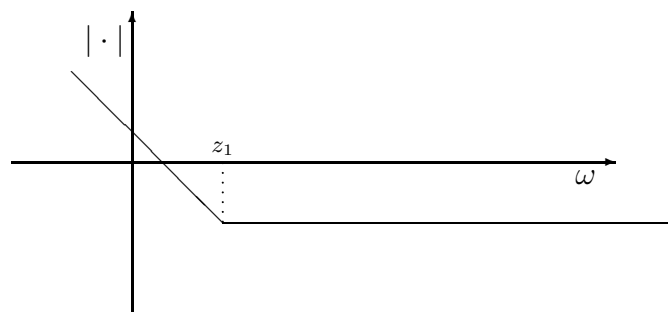
$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

8. Posto  $T = 0.5$  e utilizzando la corrispondenza tra piano- $s$  e piano- $z$ , calcolare il tempo di assestamento  $T_a$  della risposta impulsiva  $g(k)$  del sistema discreto  $G(z) = \frac{z}{z-0.8}$ :

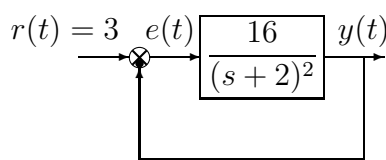
$$T_a = \frac{3}{\left| \frac{1}{T} \ln(p) \right|} = \frac{3}{\left| \frac{1}{0.5} \ln(0.8) \right|} = 6.72 \text{ s.}$$

9. Scrivere la funzione di trasferimento  $G(s)$  di un regolatore standard PI e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

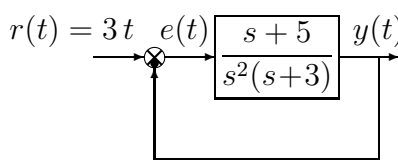
$$G(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$



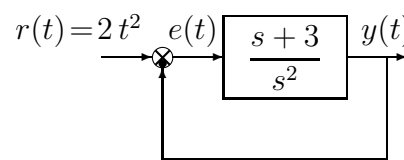
10. Calcolare l'errore a regime  $e(\infty)$  per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{R_0}{1 + K_p} = \frac{3}{5}$$



$$e(\infty) = \frac{R_0}{K_v} = 0$$



$$e(\infty) = \frac{R_0}{K_a} = \frac{4}{3}$$

11. Calcolare il valore iniziale  $y_0 = \lim_{k \rightarrow 0} y(k)$  e il valore finale  $y_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k)$  del segnale  $y(k)$  corrispondente alla seguente funzione  $Y(z)$ :

$$Y(z) = \frac{z(2+6z)}{(z-1)(z-0.6)} \quad \rightarrow \quad y_0 = 6, \quad y_\infty = \frac{8}{0.4} = 20$$

12. Calcolare la  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $X(z)$  dei seguenti segnali  $x(n)$ :

$$x(n) = (-1)^n \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z+1}$$

$$x(n) = 2n \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{2z}{(z-1)^2}$$

13. Fornire una stima della larghezza di banda  $\omega_f$  e del tempo di salita  $t_r$  del sistema  $G_1(s)$  di cui a fianco è riportato il diagramma di Bode dei moduli:

$$\omega_f \simeq 0.3 \quad t_r \simeq 3.33$$

Fornire inoltre una stima della larghezza di banda  $\omega_{f0}$  e del tempo di salita  $t_{r0}$  del corrispondente sistema retroazionato:

$$\omega_{f0} \simeq 7 \quad t_{r0} \simeq \frac{1}{7}$$

