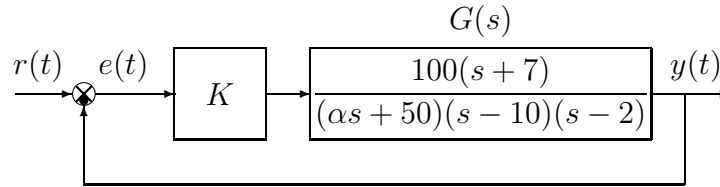


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Posto  $\alpha = 1$ , tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro  $K > 0$ . Determinare per quali valori di  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Determinare inoltre la posizione degli asintoti, le intersezioni  $\omega^*$  con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno  $K^*$ . Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

*Sol.* L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema  $G(s)$  al variare del parametro  $K > 0$  è mostrato in Fig. 1.

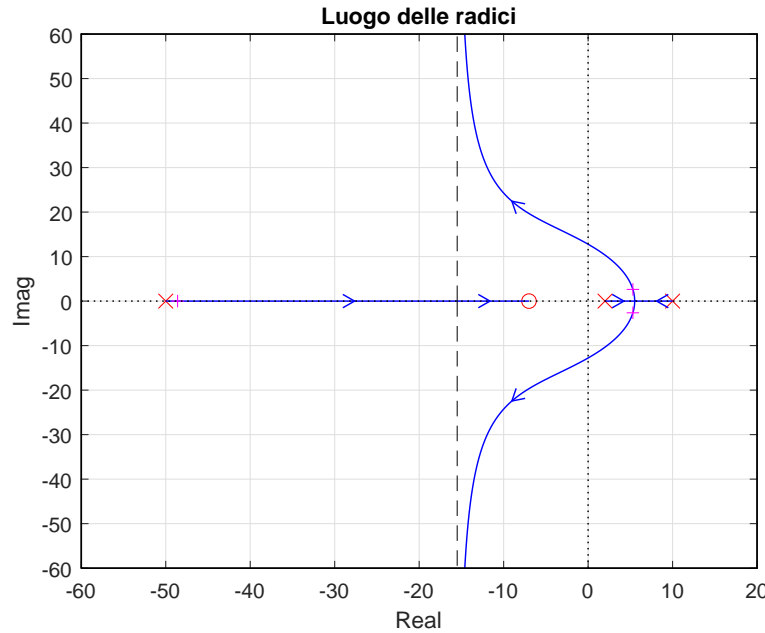


Figura 1: Luogo delle radici del sistema  $G_1(s)$  al variare di  $K_1 > 0$ .

Il centro degli asintoti  $\sigma_a$  è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (-50 + 10 + 7 + 2) = -15.5$$

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{100(s+7)}{(s-2)(s-10)(s+50)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 38s^2 + (100K - 580)s + (700K + 1000) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 100K - 580 & \\ 2 & 38 & 700K + 1000 & \\ 1 & 3100K - 23040 & & \\ 0 & 700K + 1000 & & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$3100K - 23040 > 0, \quad 700K + 1000 > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > 7.4323, \quad K > -1.4286.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 7.4323 = K_1.$$

La pulsazione  $\omega_1$  corrispondente al valore limite  $K_1$  è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{700K_1 + 1000}{38}} = 12.776.$$

a.2) Posto  $K = 10$  nel sistema retroazionato sopra definito, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro  $\alpha > 0$ . Il calcolo di  $\alpha^*$  non è necessario. Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

*Sol.* Posto  $K = 10$ , l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$1 + K \frac{100(s+7)}{(s-2)(s-10)(\alpha s+50)} = 0 \quad \rightarrow \quad (s-2)(s-10)(\alpha s+50) + 100K(s+7) = 0$$

da cui si ricava la seguente equazione caratteristica  $1 + \alpha G_2(s) = 0$ :

$$1 + \frac{\alpha s(s-2)(s-10)}{50(s-2)(s-10) + 100K(s+7)} = 0$$

Posto  $K = 10$  e mettendo in evidenza i poli della funzione  $G_2(s)$  si ottiene:

$$1 + \frac{\alpha s(s-2)(s-10)}{50[s^2 + (2K-12)s + 20 + 14K]} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \frac{\alpha s(s-2)(s-10)}{50[(s+4)^2 + 12^2]} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro  $\alpha > 0$  è mostrato in Fig. 2.

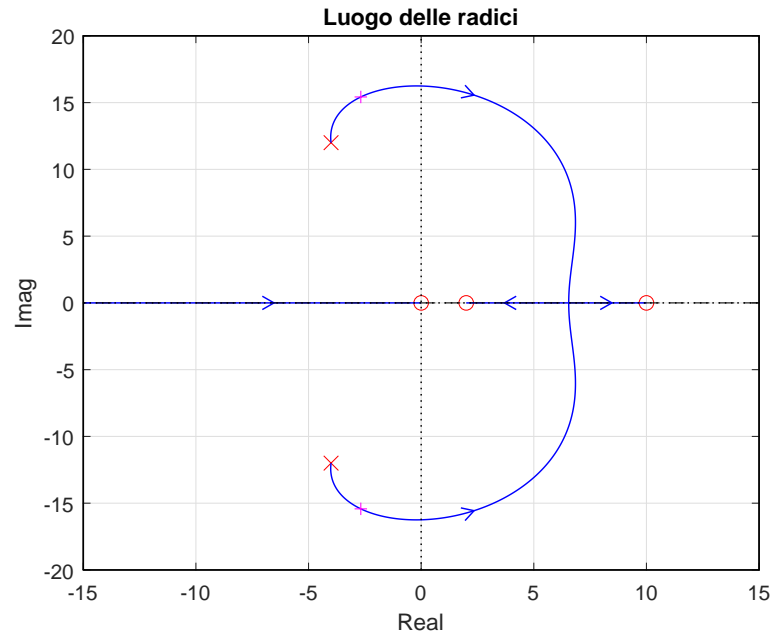


Figura 2: Contorno delle radici del sistema  $G_2(s)$  al variare del parametro  $\alpha > 0$ .

Il contorno delle radici ha un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo e percorso dall'infinito al finito.

a.3) Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$G_3(s) = \frac{2}{(R + Ls)(s + 2) + 4}$$

Posto  $R = 1$ , mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione di trasferimento  $G_3(s)$  al variare del parametro  $L > 0$ . Determinare esattamente la posizione dei punti di diramazione. Calcolare il valore  $L^*$  a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema  $G_3(s)$  alla risposta al gradino.

*Soluzione.* I poli della funzione di trasferimento  $G_3(s)$  coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$(R + Ls)(s + 2) + 4$$

Posto  $R = 1$  si ottiene la seguente equazione:

$$s + 6 + Ls(s + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + L \frac{s(s + 2)}{s + 6} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + L G_4(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro  $L > 0$  è mostrato in Fig. 3. In questo caso

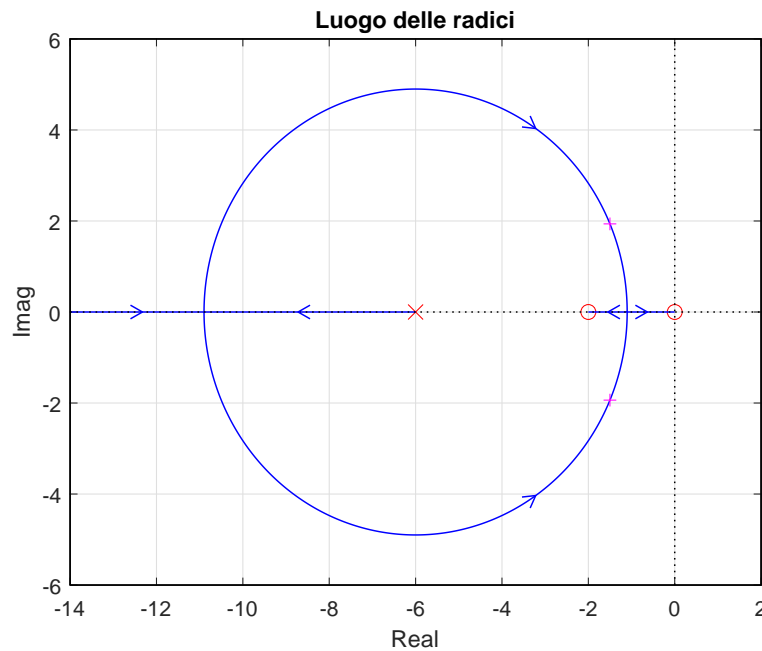


Figura 3: Contorno delle radici del sistema  $G_4(s)$  al variare del parametro  $L > 0$ .

il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in  $z = -6$ . Il raggio  $R$  della circonferenza è il seguente:

$$R = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24} = 4.899$$

I punti di diramazione  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  del contorno delle radici sono:

$$\sigma_1 = -6 - \sqrt{24} = -10.899, \quad \sigma_2 = -6 + \sqrt{24} = -1.101.$$

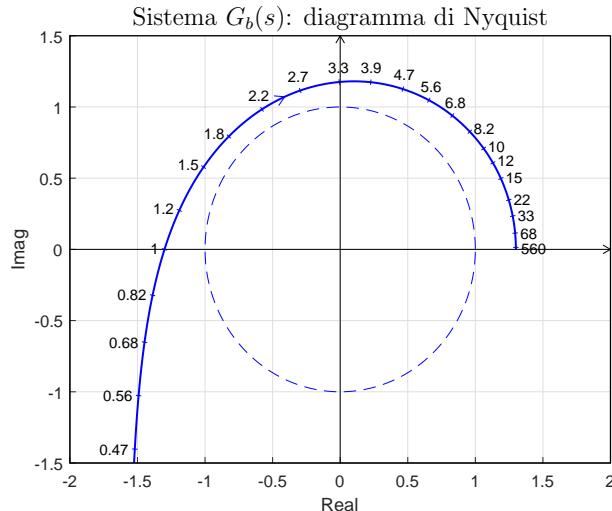
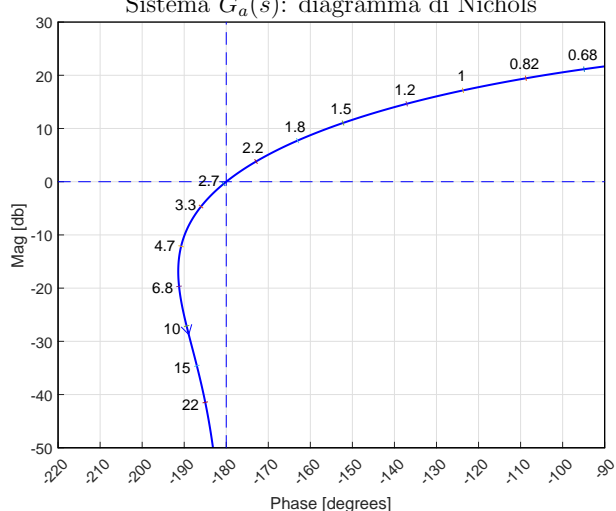
È possibile giungere allo stesso risultato nel seguente modo:

$$\frac{dG_4(s)}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad (2s + 2)(s + 6) - (s^2 + 2s) = s^2 + 12s + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{1,2} = -6 \pm \sqrt{24}.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento si ha in corrispondenza del punto di diramazione  $\sigma_1 = -10.899$  e quindi per il seguente valore del parametro  $L^*$ :

$$L^* = - \left. \frac{1}{G_4(s)} \right|_{s=\sigma_2} = - \left. \frac{s + 6}{s(s + 2)} \right|_{s=-10.899} = 0.0505.$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi  $G_a(s)$  e  $G_b(s)$ :



- b.1) Per il sistema  $G_a(s)$ , progettare una rete anticipatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di fase  $M_\varphi = 50^\circ$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno.

Soluzione. La posizione del punto  $B$  è completamente determinata dalla specifica di progetto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = 0 \text{ db} = 1$  e  $\varphi_B = -130^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 4. Il punto  $A = G_a(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 6.8$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = -19.66 \text{ db} = 0.104, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -191.2^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 1.533$  e  $\tau_2 = 0.0633$  della rete corretttrice  $C_1(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 9.617, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 61.23^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 1.533 s)}{(1 + 0.0633 s)}.$$

Sintesi della rete corretttrice  $C_1(s)$  con altri valori della pulsazione  $\omega_A$ :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [ 4.7 \quad 6.8 \quad 10 \quad 15 \quad 22 ] \\ M_A &= [ 0.2474 \quad 0.104 \quad 0.0440 \quad 0.0186 \quad 0.0084 ] \\ \varphi_A &= [ 169.3 \quad 168.8 \quad 170.6 \quad 173 \quad 175 ] \\ M &= [ 4.042 \quad 9.617 \quad 22.7 \quad 53.72 \quad 118.4 ] \\ \varphi &= [ 60.74 \quad 61.23 \quad 59.43 \quad 56.99 \quad 55 ] \\ \tau_1 &= [ 0.8666 \quad 1.533 \quad 2.577 \quad 4.227 \quad 6.536 ] \\ \tau_2 &= [ 0.0588 \quad 0.0633 \quad 0.0539 \quad 0.0418 \quad 0.0313 ] \end{aligned}$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 4.

- b.2) Per il sistema  $G_b(s)$ , progettare una rete corretttrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza  $M_a = 5$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno.

Soluzione. La posizione del punto  $B$  è completamente determinata dalla specifica di progetto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = 0.2$  e  $\varphi_B = 180^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto  $A = G_a(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 0.82$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.425, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 193.1^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

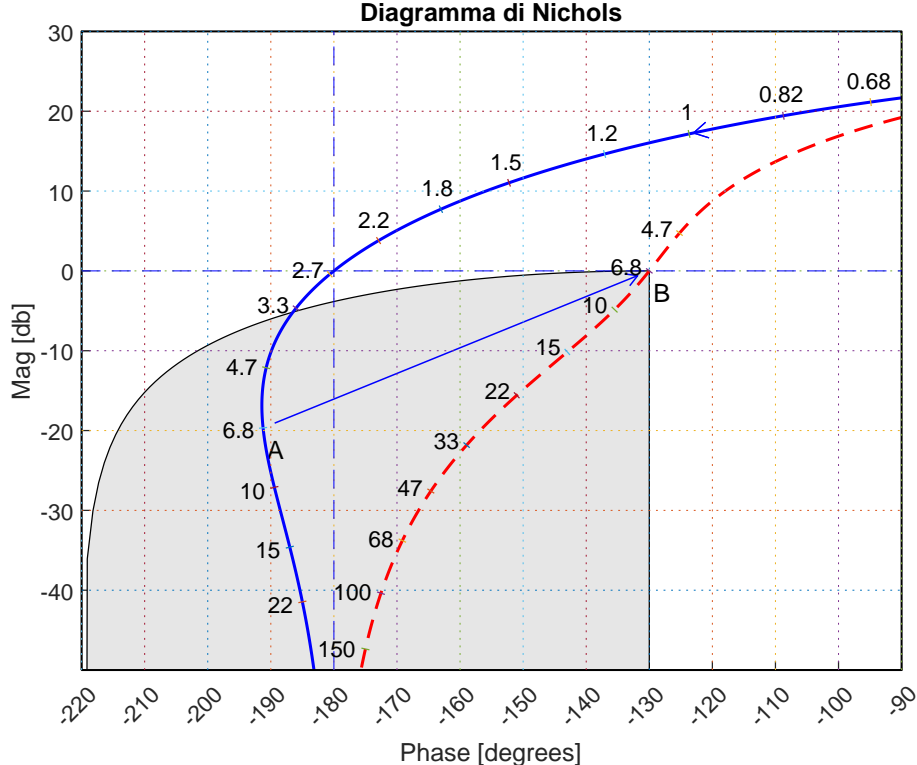


Figura 4: Diagrammi di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$ .

si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 4.497$  e  $\tau_2 = 33.18$  della rete correttiva  $C_1(s)$ :

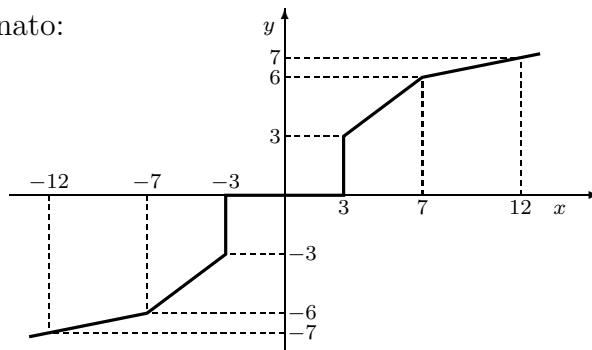
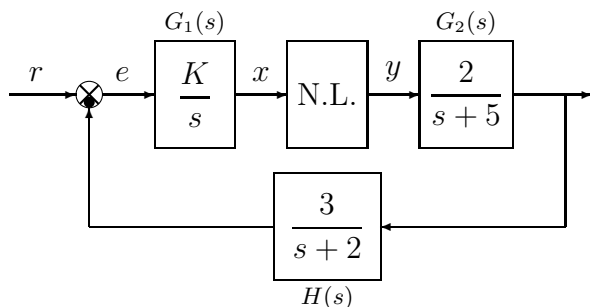
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1404, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -13.07^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 4.497 s)}{(1 + 33.18 s)}.$$

Sintesi della rete correttiva  $C_1(s)$  con altri valori della pulsazione  $\omega_A$ :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [ 0.82 & 0.68 & 0.56 & 0.47 & 0.39 & 0.33 ] \\ M_A &= [ 1.425 & 1.588 & 1.811 & 2.068 & 2.41 & 2.786 ] \\ \varphi_A &= [ 193.1 & 204.2 & 214.5 & 222.7 & 230.3 & 236.1 ] \\ M &= [ 0.1404 & 0.126 & 0.1105 & 0.0967 & 0.0829 & 0.0717 ] \\ \varphi &= [ -13.07 & -24.24 & -34.54 & -42.7 & -50.25 & -56.09 ] \\ \tau_1 &= [ 4.497 & 2.816 & 2.247 & 2.002 & 1.856 & 1.775 ] \\ \tau_2 &= [ 33.18 & 25.17 & 25.92 & 30.13 & 38.05 & 48.83 ] \end{aligned}$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 5.

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



c.1) Posto  $K = 1$ , determinare per quale valore  $r_1$  dell'ingresso  $r$  il punto di lavoro del sistema retroazionato è posizionato in  $(x_1, y_1) = (5, 4.5)$ .

*Soluzione.* Il sistema è caratterizzato dai seguenti guadagni statici:  $K_1 = \infty$ ,  $K_2 = \frac{2}{5}$  e  $K_3 = \frac{3}{2}$ . La retta di carico della parte lineare del sistema è una retta orizzontale di ordinata:

$$y = \frac{r_1}{K_2 K_3} \quad \rightarrow \quad r_1 = K_2 K_3 y \quad \rightarrow \quad r_1 = \frac{2}{5} \frac{3}{2} 4.5 = 2.7$$

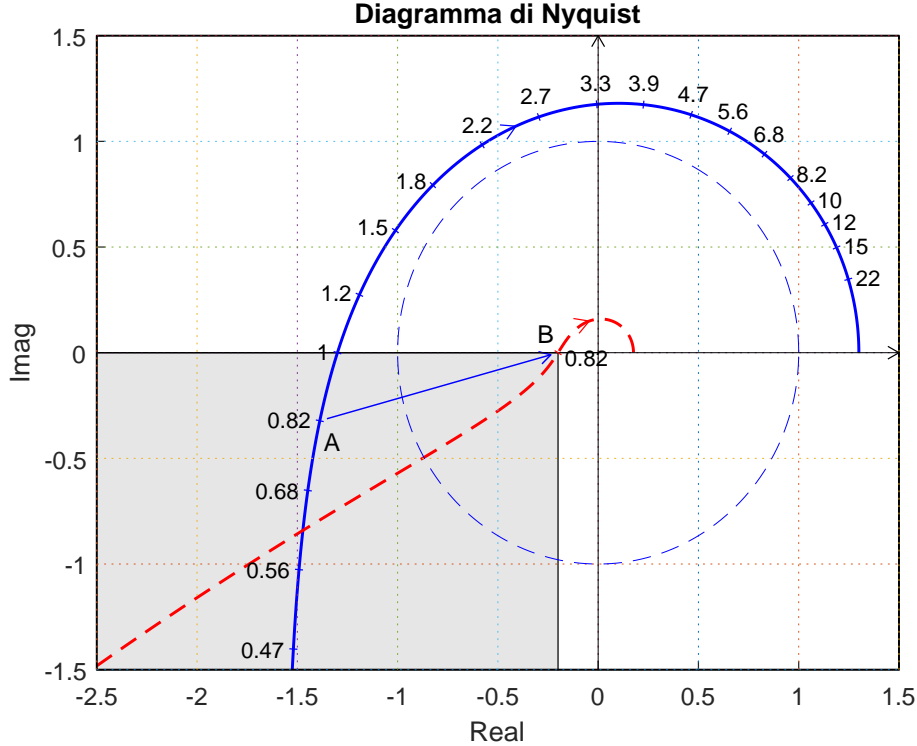


Figura 5: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_b(s)$  e  $C_2(s)G_b(s)$ .

- c.2) Posto  $K = 1$  ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile o meno nell'intorno del punto  $(x_1, y_1) = (5, 4.5)$ .

*Soluzione.* Le pendenze  $\alpha$  e  $\beta$  di 2 rette che centrate in  $(x_0, y_0) = (5, 4.5)$  racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = \frac{1}{5}, \quad \beta = \frac{4.5}{2} = 2.25.$$

Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -5, \quad -\frac{1}{\beta} = -\frac{2}{4.5} = 0.444.$$

La funzione  $G_1(s)$  che descrive la parte lineare del sistema è :

$$G_1(s) = \frac{6}{s(s+2)(s+5)}$$

Il margine di ampiezza  $\bar{K}^*$  e la pulsazione  $\omega^*$  della funzione  $G_1(s)$  si determinano nel seguente modo:

$$K^* = \frac{2 \cdot 5 \cdot (2+5)}{6} = \frac{70}{6} = \frac{35}{3} = 11.66, \quad \omega^* = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10} = 3.1623$$

Il valore di  $\bar{K}^*$  è maggiore di  $\beta$ :

$$\bar{K}^* > \beta$$

per cui in base al criterio del cerchio si può concludere che il sistema retroazionato è globalmente asintoticamente stabile nell'intorno del punto di lavoro  $(5, 4.5)$ . In Fig. 6 è mostrato il diagramma di Nyquist della funzione  $G_1(s)$  sovrapposto al cerchio critico.

- c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva  $F(X)$  della non linearità  $y(x)$  nell'intorno del punto  $(0, 0)$ . Utilizzare delle variabili (per esempio:  $m_1, m_2, \dots$ ) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione  $F(X)$ .

*Soluzione.* L'andamento qualitativo della funzione descrittiva  $F(X)$  è mostrato in Fig. 7.

Il valore  $m_1$  del massimo intermedio può essere calcolato solo conoscendo la  $F(X)$  per  $X > 3$ . Per  $X \rightarrow \infty$  la  $F(X)$  tende al valore finale minimo  $m_3 = 0.2$ .

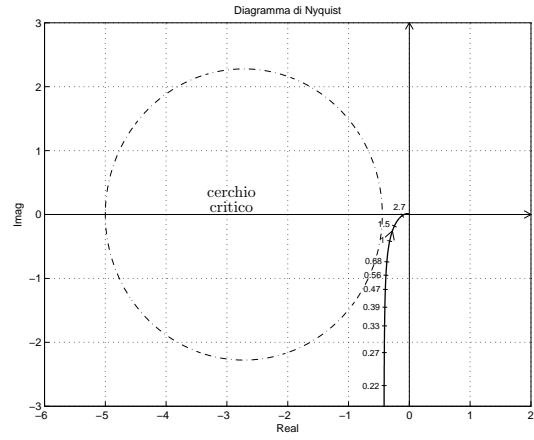
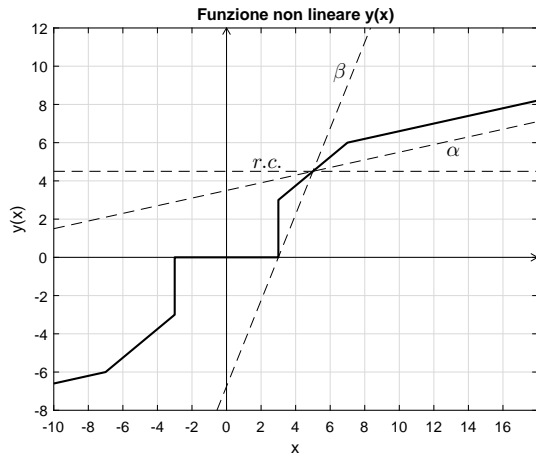


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  e cerchio critico.

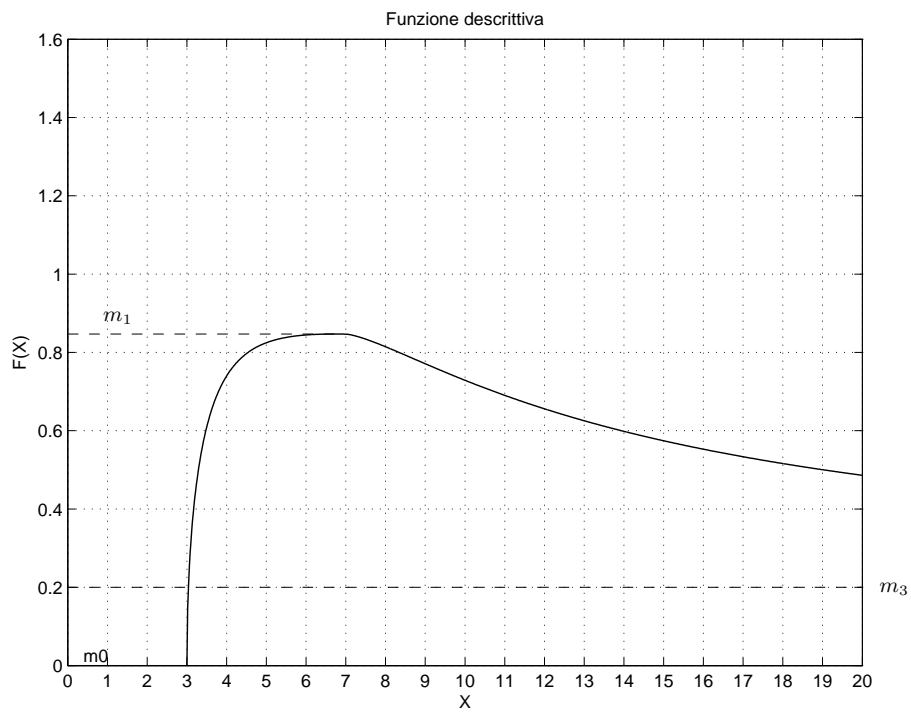


Figura 7: Andamento della funzione descrittiva  $F(X)$ .

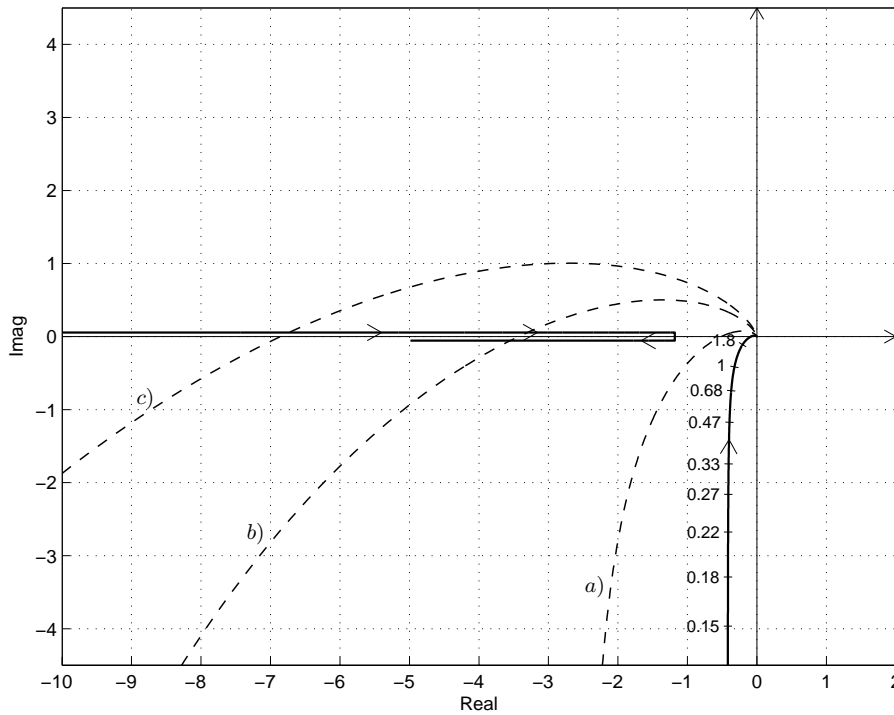


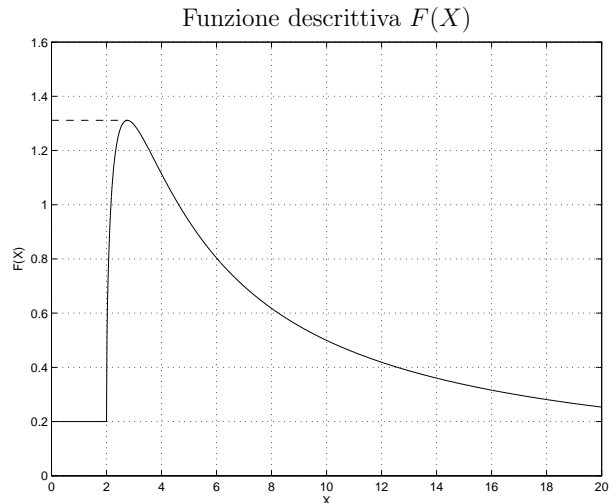
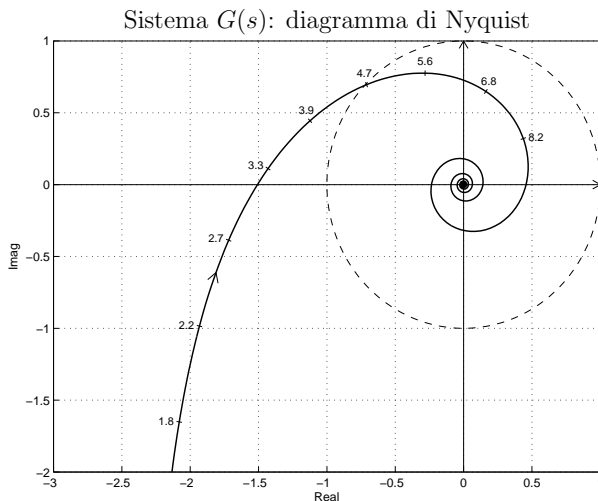
Figura 8: Discussione grafica al variare di  $K$ .

c.4) Discutere “qualitativamente” (in funzione anche dei parametri  $m_1, m_2, \dots$ ) l’esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno  $K > 0$ .

*Soluzione.* Per  $K = 1$ , il margine di ampiezza  $\bar{K}^*$  del sistema  $G_1(s)$  è  $\bar{K}^* = 11.66$ . Per  $K \neq 1$ , il margine di ampiezza  $K^*$  del sistema  $K G_1(s)$  è  $K^* = \frac{\bar{K}^*}{K}$ . Al variare di  $K^*$  si possono avere le seguenti condizioni di funzionamento:

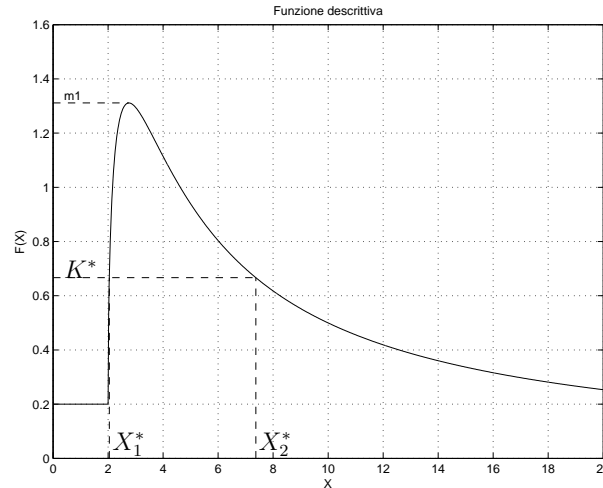
- a) Per  $K^* > m_1$ , il diagramma di Nyquist della  $G_1(s)$  non interseca la funzione  $-1/F(X)$  per cui il sistema retroazionato è globalmente asintoticamente stabile perchè la funzione  $-1/F(X)$  è tutta esterna al diagramma polare completo.
- b) Per  $m_3 < K^* < m_1$ , il diagramma di Nyquist della  $G_1(s)$  interseca la funzione  $-1/F(X)$  in due punti: il primo punto corrisponde a un ciclo limite instabile, il secondo punto corrisponde a un ciclo limite stabile.
- c) Per  $K^* < m_3$  il diagramma di Nyquist della  $G_1(s)$  interseca la funzione  $-1/F(X)$  in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite instabile.

d) Dato il diagramma di Nyquist di un sistema  $G(s)$  posto in retroazione negativa su di una non linearità  $y = y(x)$  di cui viene fornita la funzione descrittiva  $F(X)$ .



d.1) Nei limiti della precisione dei grafici forniti, determinare l'ampiezza  $X^*$ , la pulsazione  $\omega^*$  e la stabilità degli eventuali cicli limite stabili presenti nel sistema retroazionato.

*Sol.* Dal diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  si ricava (in modo approssimato) il margine di ampiezza  $K^* \simeq \frac{1}{1.5} = 0.666$  e la pulsazione  $\omega^* \simeq 3.1$ .



Utilizzando la funzione descrittiva  $F(X)$  che è stata fornita ed imponendo  $F(X^*) = K^*$  si ricava:

$$X_1^* \simeq 2.1, \quad X_2^* \simeq 7.4.$$

d.2) Progettare i parametri  $\tau_1$  e  $\tau_2$  di una rete correttiva  $C(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$  da mettere in cascata al sistema  $G(s)$  in modo che nel sistema retroazionato sia presente un ciclo limite stabile di ampiezza  $X^* = 3$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega^* = 2.2$ .

*Sol.* Nel sistema retroazionato sarà presente un ciclo limite stabile di ampiezza  $X^* = 3$  solo se il margine di ampiezza  $\bar{K}^*$  del sistema compensato  $C(s)G(s)$  ha il valore  $\bar{K}^* \simeq 1.31$  che si ricava dalla  $F(X)$  in corrispondenza del valore  $X^* = 3$ . Il sistema compensato dovrà quindi passare per il punto  $B = -\frac{1}{K^*}$ :

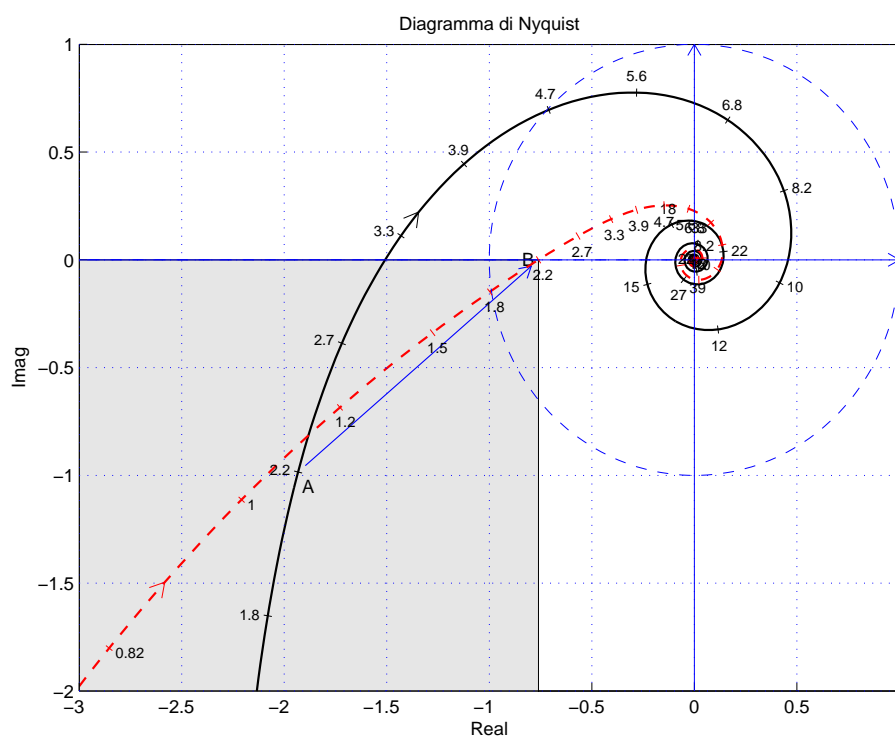
$$M_B = 0.76, \quad \varphi_B = 180^\circ$$

Un punto  $A$  che deve essere portato in  $B$  è quello caratterizzato dalla pulsazione  $\omega = 2.2$ :

$$M_A = 2.1687, \quad \varphi_A = 207^\circ \quad \longrightarrow \quad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.3504, \quad \varphi = -27^\circ$$

La rete ritardatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.5412, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 1.965 \quad \longrightarrow \quad C(s) = \frac{1 + 0.5412 s}{1 + 1.965 s}$$



e) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare il seguente sistema tempo-continuo:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s + 1)}{(s + 4)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.1$ .

*Soluzione.* Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \left. \frac{(s + 1)}{(s + 4)} \right|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T + 1 - z^{-1}}{4T + 1 - z^{-1}}$$

Sostituendo  $T = 0.1$  si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.1 - z^{-1}}{1.4 - z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze ha la forma seguente:

$$m_k = \frac{1}{1.4} [m_{k-1} + 1.1 e_k - e_{k-1}]$$

cioè:

$$m_k = 0.71429 m_{k-1} + 0.78571 e_k - 0.71429 e_{k-1}$$

f) Partendo da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta  $y(n)$  della seguente equazione alle differenze:

$$y(n + 1) = -0.4 y(n) + 7 x(n)$$

quando in ingresso è presente il gradino unitario  $x(n) = 1$ .

*Soluzione.* L'equazione alle differenze genera la seguente funzione discreta  $G(z)$ :

$$y(n + 1) + 0.4 y(n) = 7 x(n) \quad \leftrightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{7}{z + 0.4}.$$

La  $\mathcal{Z}$ -trasformata del segnale di ingresso  $x(n) = 1$  è:

$$X(z) = z/(z - 1).$$

La  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $Y(z)$  del segnale di uscita è quindi la seguente:

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{7z}{(z+0.4)(z-1)}.$$

Mediante il metodo della scomposizione in fratti semplici si ricava:

$$Y(z) = z \left[ \frac{7}{(z-1)(z+0.4)} \right] = z \left[ \frac{5}{(z-1)} - \frac{5}{(z+0.4)} \right]$$

e quindi:

$$Y(z) = \frac{5z}{(z-1)} - \frac{5z}{(z+0.4)} \quad \rightarrow \quad y(n) = 5[1 - (-0.4)^n].$$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

1. Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{5z^2 + 3z + 2}{4z^3 + 2z^2 + 2z + 2} \quad \rightarrow \quad 4y_{k+3} + 2y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = 5x_{k+2} + 3x_{k+1} + 2x_k$$

2. La funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  di un sistema discreto  $G(z)$  si determina nel seguente modo:

$F(\omega) = G(e^{j\omega T})$      
  $F(\omega) = G(e^{j\omega})$      
  $F(\omega) = G(j\omega T)$      
  $F(\omega) = G(j\omega)$

3. L'uso di una rete anticipatrice è consigliato

- per stabilizzare sistemi con margini di fase fortemente negativi
- se si desidera aumentare il coefficiente di smorzamento  $\delta$  dei poli dominanti
- se si desidera aumentare la larghezza di banda del sistema

4. La trasformazione bilineare è definita come segue:

$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$      
  $s = \frac{2}{T} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$      
  $s = \frac{2}{T} \frac{z+1}{z-1}$      
  $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

5. In corrispondenza di una radice multipla di ordine  $h$  il luogo delle radici

- presenta  $h$  rami entranti
- presenta  $h$  rami uscenti
- le tangenti ai rami entranti dividono il piano in settori uguali
- le tangenti ai rami uscenti coincidono con le tangenti ai rami entranti

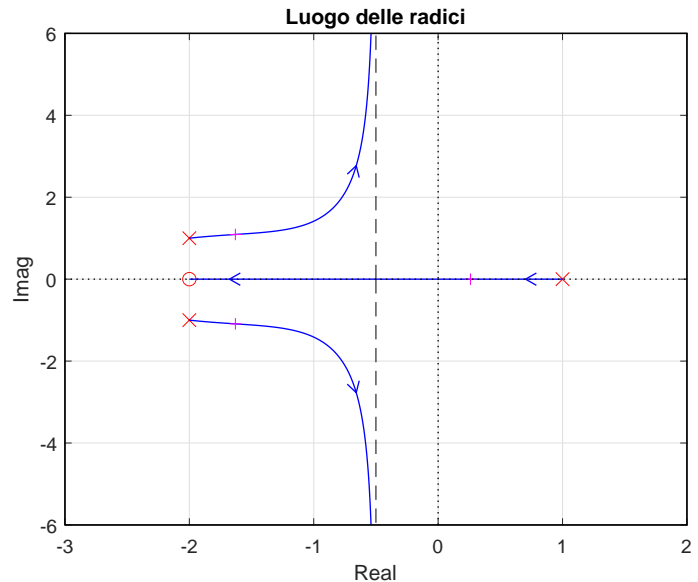
6. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema  $G(s) = \frac{2(s+2)}{(s-1)((s+2)^2+1)}$  al variare del parametro  $K > 0$ . Calcolare:

1) L'ascissa  $\sigma_0$  corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

$$\sigma_0 = -1$$

2) Il valore  $K_0$  corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

$$K_0 = - \left. \frac{1}{G(s)} \right|_{s=-1} = 2$$



7. Calcolare la  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $X(z)$  dei seguenti segnali  $x(n)$ :

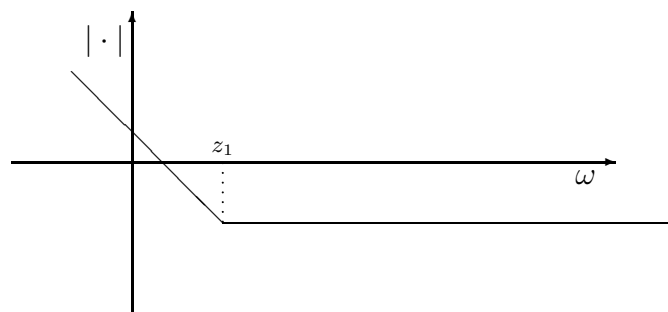
$$x(n) = (-1)^n \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z+1} \qquad x(n) = 2n \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{2z}{(z-1)^2}$$

8. Posto  $T = 0.5$  e utilizzando la corrispondenza tra piano- $s$  e piano- $z$ , calcolare il tempo di assestamento  $T_a$  della risposta impulsiva  $g(k)$  del sistema discreto  $G(z) = \frac{z}{z-0.8}$ :

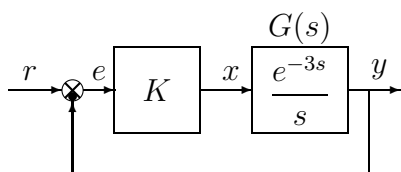
$$T_a = \frac{3}{\left|\frac{1}{T} \ln(p)\right|} = \frac{3}{\left|\frac{1}{0.5} \ln(0.8)\right|} = 6.72 \text{ s.}$$

9. Scrivere la funzione di trasferimento  $G(s)$  di un regolatore standard PI e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

$$G(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$



10. Sia dato il seguente sistema retroazionato. Per quale valore di  $K$  il sistema retroazionato è stabile con un margina di fase  $M_\varphi = 45^\circ$ ?

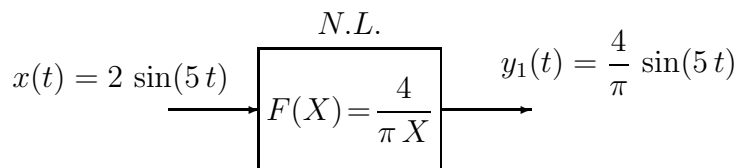


$$K = \frac{1}{t_0} \left( \frac{\pi}{2} - M_\varphi \right) = \frac{\pi}{12} = 2.356$$

11. Calcolare il valore iniziale  $y_0 = \lim_{k \rightarrow 0} y(k)$  e il valore finale  $y_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k)$  del segnale  $y(k)$  corrispondente alla seguente funzione  $Y(z)$ :

$$Y(z) = \frac{z(2+6z)}{(z-1)(z-0.6)} \quad \rightarrow \quad y_0 = 6, \quad y_\infty = \frac{8}{0.4} = 20$$

12. Sia  $x(t) = 2 \sin(5t)$  un segnale periodico posto in ingresso ad un elemento non lineare N.L. caratterizzato da una funzione descrittiva  $F(X) = \frac{4}{\pi X}$ . Indicare qual è l'andamento temporale  $y_1(t)$  della fondamentale del segnale periodico che si ha all'uscita del blocco non lineare:



13. Fornire una stima della larghezza di banda  $\omega_f$  e del tempo di salita  $t_r$  del sistema  $G_1(s)$  di cui a fianco è riportato il diagramma di Bode dei moduli:

$$\omega_f \simeq 0.3 \quad t_r \simeq 3.33$$

Fornire inoltre una stima della larghezza di banda  $\omega_{f0}$  e del tempo di salita  $t_{r0}$  del corrispondente sistema retroazionato:

$$\omega_{f0} \simeq 7 \quad t_{r0} \simeq \frac{1}{7}$$

