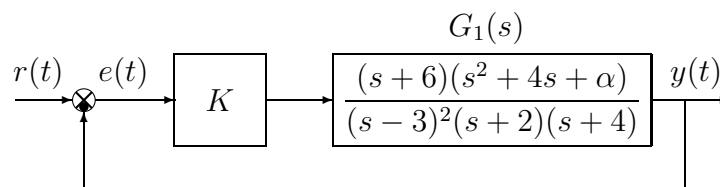


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a1) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Posto  $\alpha = 20$ , tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro  $K$ . **Tracciare il luogo delle radici sia per  $K > 0$  che per  $K < 0$ .** Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”. Nota: non é necessario calcolare le intersezioni con l’asse immaginario.

*Soluzione.* Posto  $\alpha = 20$ , l’equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K \frac{(s+6)(s^2+4s+20)}{(s-3)^2(s+2)(s+4)} = 0$$

dove  $K_1 = K$ . L’andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema  $G_1(s)$  per  $K > 0$  é mostrato in Fig. 1. Il luogo delle radici è caratterizzato da un solo asintoto che coincide con il

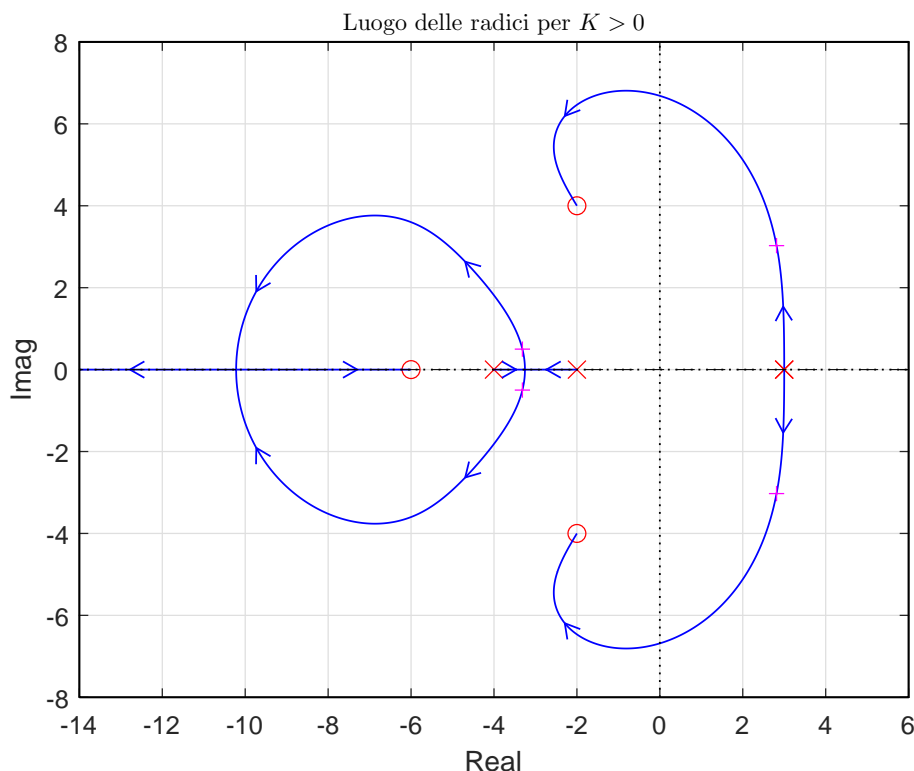


Figura 1: Luogo delle radici del sistema  $G_1(s)$  al variare di  $K > 0$

semiasse negativo. L’andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema  $G_1(s)$  per  $K < 0$  é mostrato in Fig. 2.

a.2) Posto  $K = 15$ , tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro  $\alpha > 0$ . Nella graficazione si tenga conto che: a) la posizione dei poli del sistema retroazionato quando  $K = 15$  e  $\alpha = 0$  è:  $p_1 \simeq -0.2$ ,  $p_2 \simeq -4$  e  $p_{3,4} \simeq -5.4 \pm 9.2j$ . Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

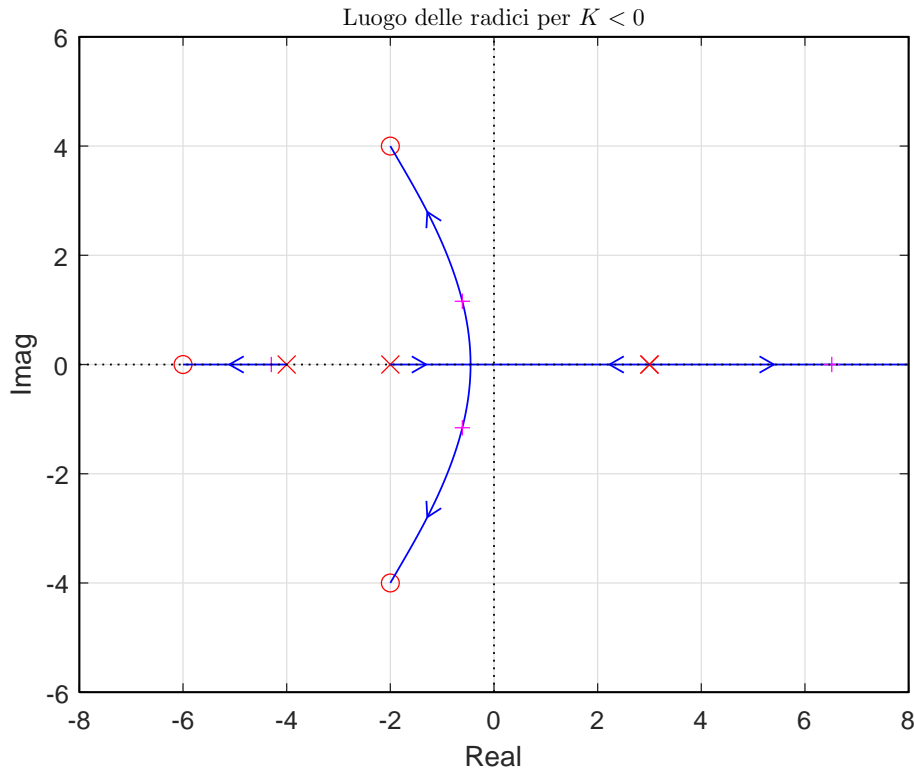


Figura 2: Luogo delle radici del sistema  $G_1(s)$  al variare di  $K < 0$

*Soluzione.* Posto  $K = 15$ , l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$1 + 15 \frac{(s+6)(s^2+4s+\alpha)}{(s+4)(s+2)(s-3)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad (s+4)(s+2)(s-3)^2 + 15(s+6)(s^2+4s+\alpha) = 0$$

da cui si ottiene la seguente equazione:

$$1 + \frac{\alpha 15 (s+6)}{(s+4)(s+2)(s-3)^2 + 15s(s+6)(s+4)} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \alpha G_2(s) = 0$$

I poli della funzione  $G_2(s)$  sono i seguenti:

$$1 + \frac{\alpha 15 (s+6)}{(s+0.2)(s+4)[(s+5.4)^2 + 9.2^2]} = 0$$

I poli indicati nel testo dell'esercizio sono "approssimati". Il contorno delle radici al variare del parametro  $\alpha > 0$  è mostrato in Fig. 3.

Il contorno delle radici ha tre asintoti. Il centro degli asintoti  $\sigma_a$  è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{3} (-0.2 - 4 - 5.4 - 5.4 + 6) = -3$$

a.3) Sia data la seguente funzione di trasferimento  $G_3(s)$ :

$$G_3(s) = \frac{(s+1)}{K s^2 + (1+3K)s + 4}$$

mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione di trasferimento  $G_3(s)$  al variare del parametro  $K > 0$ . Calcolare il valore  $K^*$  a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema  $G_3(s)$  alla risposta al gradino unitario.

*Soluzione.* I poli della funzione di trasferimento  $G_3(s)$  coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$K s^2 + (1+3K)s + 4 = 0.$$

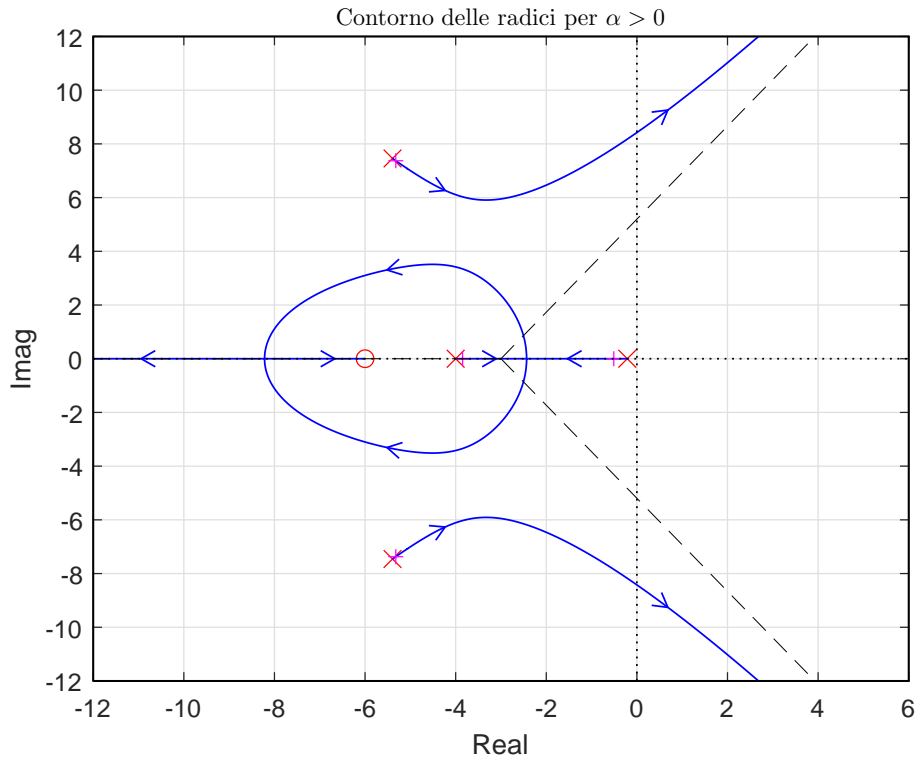


Figura 3: Contorno delle radici del sistema  $G_2(s)$  al variare del parametro  $\alpha > 0$ .

Questa equazione polinomiale può essere riscritta nel seguente modo:

$$(s + 4) + K s(s + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{K s(s + 3)}{(s + 4)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K G_4(s) = 0.$$

Il contorno delle radici al variare del parametro  $K > 0$  è mostrato in Fig. 4. Nel contorno delle radici è presente un solo asintoto che coincide con il semiasse reale negativo. Tale asintoto è percorso dall'infinito al finito. In questo caso il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in  $p = -4$ . Il raggio  $R_c$  della circonferenza è:

$$R_c = \sqrt{d_1 \cdot d_2} = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$$

I due punti di diramazione  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  del contorno delle radici sono i seguenti:

$$\sigma_1 = -4 - 2 = -6, \quad \sigma_2 = -4 + 2 = -2.$$

La condizione a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema  $G_4(s)$  alla risposta al gradino coincide con la condizione di massima distanza di tutte le radici dell'equazione dall'asse immaginario: tale condizione si ha in corrispondenza del punto di diramazione  $\sigma_1 = -6$ . Il corrispondente valore  $K^*$  si calcola nel seguente modo:

$$K^* = - \left. \frac{1}{G_4(s)} \right|_{s=\sigma_1} = - \left. \frac{(s + 4)}{s(s + 3)} \right|_{s=-6} = \frac{1}{9} = 0.1111.$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi  $G_a(s)$  e  $G_b(s)$ :

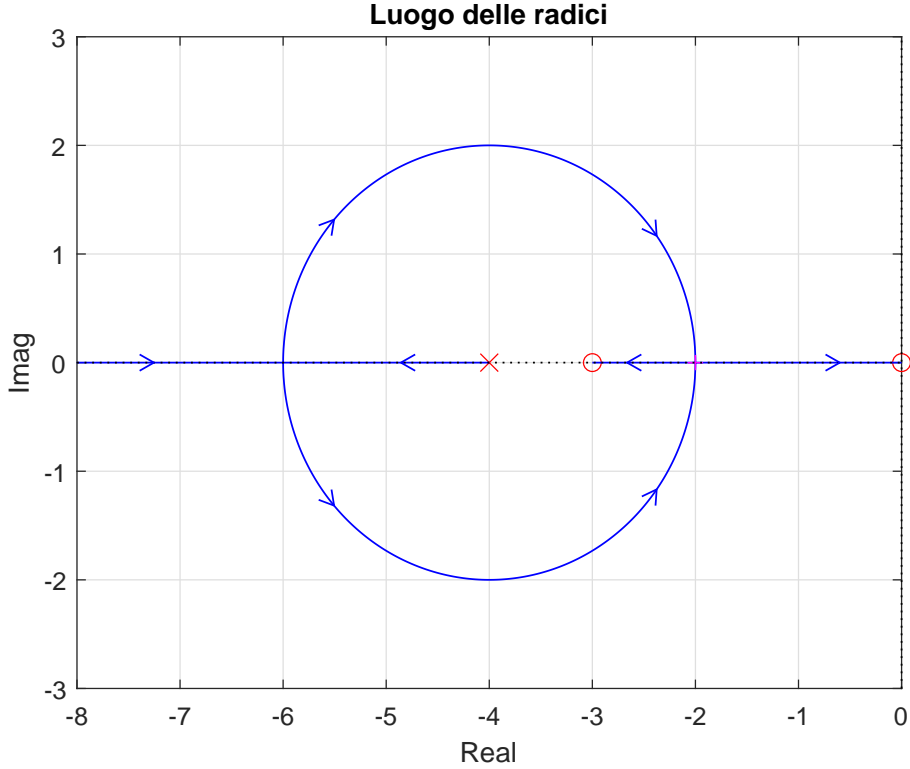
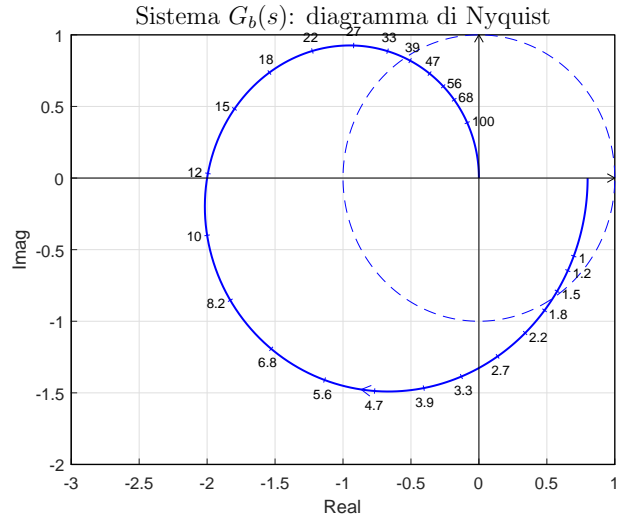
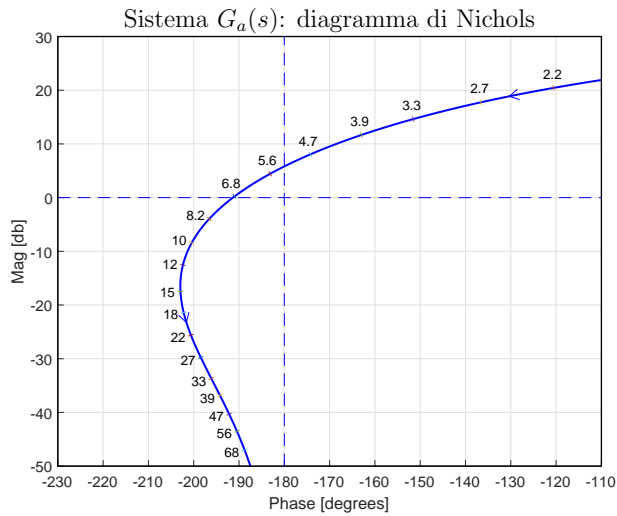


Figura 4: Contorno delle radici del sistema  $G_4(s)$  al variare del parametro  $K > 0$ .



b.1) Per il sistema  $G_a(s)$  progettare una rete ritardatrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza  $M_\alpha = 10$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno;

Soluzione. La posizione del punto  $B$  è completamente determinata dalla specifica di progetto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = -20$  db = 0.1 e  $\varphi_B = -180^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto  $A = G_a(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 3.9$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 11.68 \text{ db} = 3.836, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -163^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 0.8134$  e  $\tau_2 = 32.71$  della rete correttiva  $C_1(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = -31.68 \text{ db} = 0.0261, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -17.05^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.8134 s)}{(1 + 32.71 s)}.$$

Sintesi della rete correttrice  $C_1(s)$  con altri valori della pulsazione  $\omega_A$ :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [ 2.2 & 2.7 & 3.3 & 3.9 & 4.7 ] \\ M_A &= [ 10.51 & 7.722 & 5.387 & 3.836 & 2.532 ] \\ \varphi_A &= [ 239.4 & 223.4 & 208.5 & 197 & 185.8 ] \\ M &= [ 0.0095 & 0.0129 & 0.0185 & 0.0260 & 0.0395 ] \\ \varphi &= [ -59.44 & -43.43 & -28.47 & -17.05 & -5.786 ] \\ \tau_1 &= [ 0.2634 & 0.3842 & 0.547 & 0.8134 & 2.017 ] \\ \tau_2 &= [ 55.21 & 41.21 & 33.69 & 32.71 & 51.33 ] \end{aligned}$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 5.

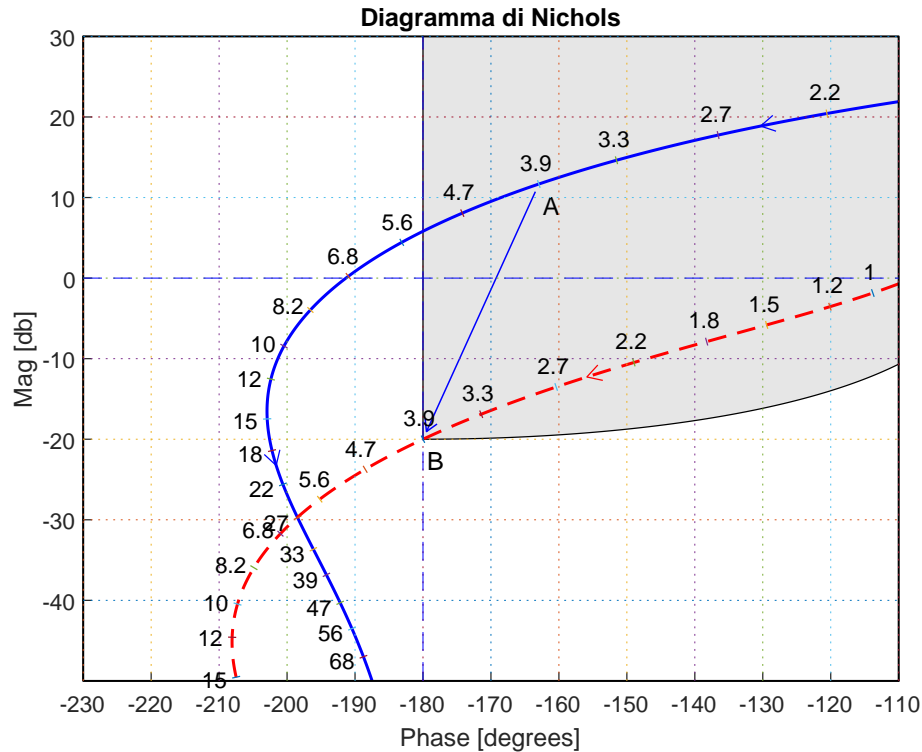


Figura 5: Diagrammi di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$ .

- b.2) Per il sistema  $G_b(s)$  progettare una rete correttrice in grado di far passare la funzione di risposta armonica del sistema  $C(s)G_b(s)$  per il punto  $B = (-0.3, -0.3)$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno;

Soluzione. La posizione del punto  $B$  è completamente determinata dalla specifica di progetto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = 0.4243$  e  $\varphi_B = 225^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 6. Il punto  $A = G_a(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 4.7$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.673, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 242.7^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 0.4891$  e  $\tau_2 = 2.093$  della rete correttrice  $C_1(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.2535, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -17.7^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.4891 s)}{(1 + 2.093 s)}.$$

Sintesi della rete correttrice  $C_1(s)$  con altri valori della pulsazione  $\omega_A$ :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [ 2.2 & 2.7 & 3.3 & 3.9 & 4.7 & 5.6 ] \\ M_A &= [ 1.134 & 1.253 & 1.392 & 1.522 & 1.673 & 1.811 ] \\ \varphi_A &= [ 287.5 & 276.3 & 264.7 & 254.5 & 242.7 & 231.2 ] \\ M &= [ 0.374 & 0.3387 & 0.3048 & 0.2788 & 0.2535 & 0.2343 ] \\ \varphi &= [ -62.46 & -51.31 & -39.69 & -29.54 & -17.7 & -6.156 ] \\ \tau_1 &= [ 0.0453 & 0.1359 & 0.2205 & 0.3075 & 0.4891 & 1.265 ] \\ \tau_2 &= [ 1.134 & 1.104 & 1.192 & 1.413 & 2.093 & 5.451 ] \end{aligned}$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 6.

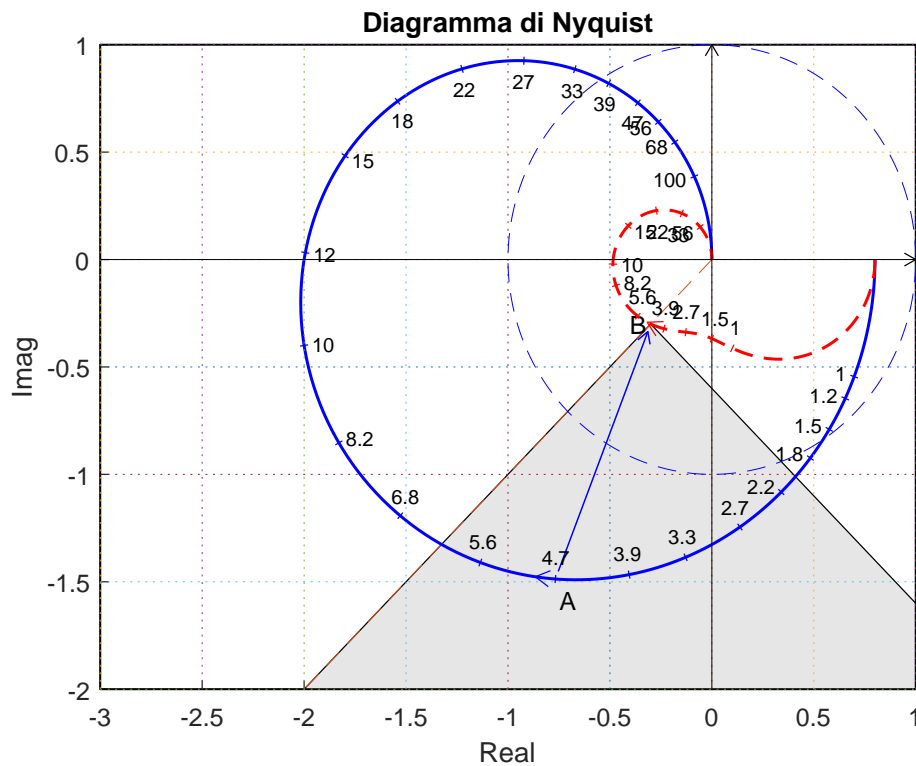
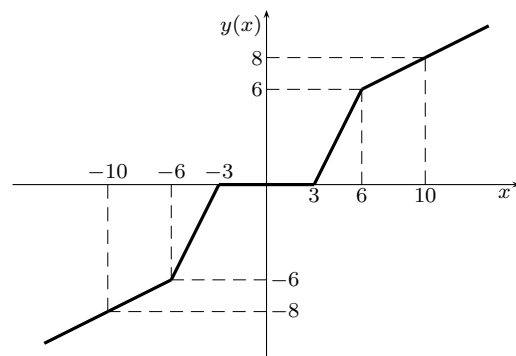
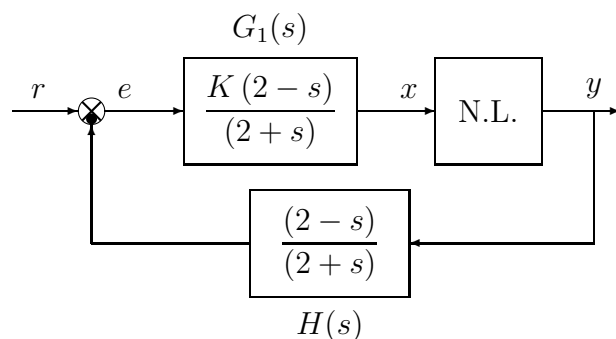


Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_b(s)$  e  $C_2(s)G_b(s)$ .

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



c.1) Posto  $K = 1$ , determinare per quale valore  $r_1$  dell'ingresso  $r$  il punto di lavoro del sistema retroazionato è posizionato in  $(x_1, y_1) = (10, 8)$ .

*Soluzione.* Posto  $K = 1$ , i guadagni statici del sistema retroazionato sono:  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 1$  e  $K_3 = 1$ . La retta di carico della parte lineare del sistema è la seguente:

$$x = K_1(r_1 - K_2 K_3 y) = r_1 - y \quad \rightarrow \quad r_1 = x + y = 18.$$

c.2) Posto  $K = 1$  ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile o meno nell'intorno del punto  $(x_1, y_1) = (10, 8)$ .

*Soluzione.* Le pendenze  $\alpha$  e  $\beta$  delle due rette che centrate nel punto  $(x_1, y_1) = (10, 8)$  racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = \frac{1}{2} = 0.5, \quad \beta = \frac{8}{7} = 1.1429.$$

Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -2, \quad -\frac{1}{\beta} = -\frac{7}{8} = -0.875.$$

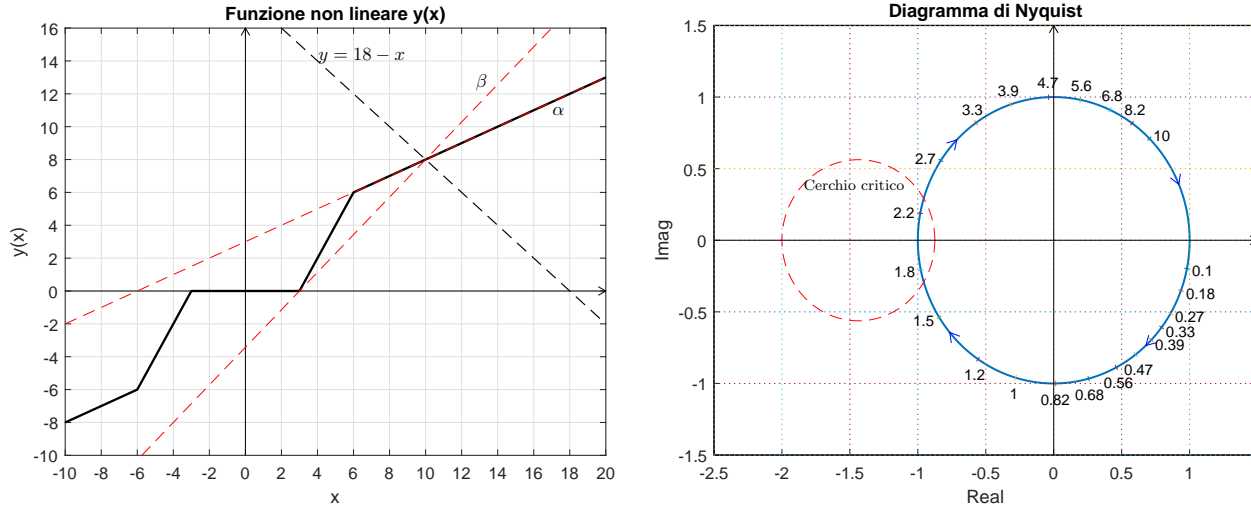


Figura 7: Settore che racchiude la non linearità e cerchio critico.

Il margine di ampiezza  $K_1^*$  e la pulsazione  $\omega^*$  della funzione  $G(s) = G_1(s)G_2(s)$  si determinano applicando il criterio di Routh. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{(2-s)^2}{(s+2)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad (K+1)s^2 + (4-4K)s + (4K+4) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & K+1 & 4K+4 \\ 1 & 4-4K & \\ 0 & 4K+4 & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$K+1 > 0, \quad 4-4K > 0, \quad 4K+4 > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -1, \quad K < 1, \quad K > -1.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$-1 < K < 1 = K^*.$$

La pulsazione  $\omega^*$  corrispondente al valore limite  $K^*$  è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{4K^*+4}{K^*+1}} = 2.$$

Essendo  $K_1^* < \beta$ , il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  interseca il cerchio critico e quindi, in base al criterio del cerchio, non si può affermare nulla sulla stabilità o meno del sistema retroazionato nell'intorno del punto  $(x_1, y_1) = (10, 8)$ .

- c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva  $F(X)$ , per  $X > 0$ , nell'intorno del punto di lavoro  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Utilizzare le variabili  $m_1, m_2, \dots$  per rappresentare gli eventuali valori minimi e massimi "non noti" della funzione  $F(X)$ .

*Soluzione.* L'andamento qualitativo della funzione descrittiva  $F(X)$  è mostrato in Fig. 8. Indichiamo con  $m_1 = 0.853$  il massimo assoluto della funzione  $F(X)$  nel punto  $X = 7.59$ : Indichiamo inoltre con  $m_2$  il valore finale a cui tende la funzione  $F(X)$  per  $X \rightarrow \infty$ :

$$m_2 = F(X)|_{X \rightarrow \infty} = 0.5.$$

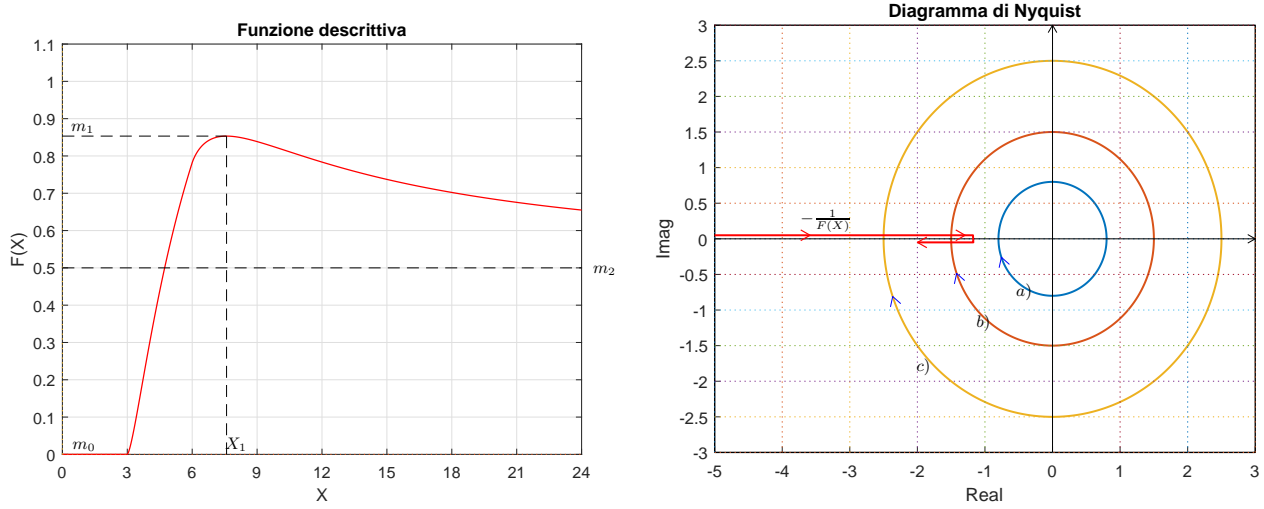


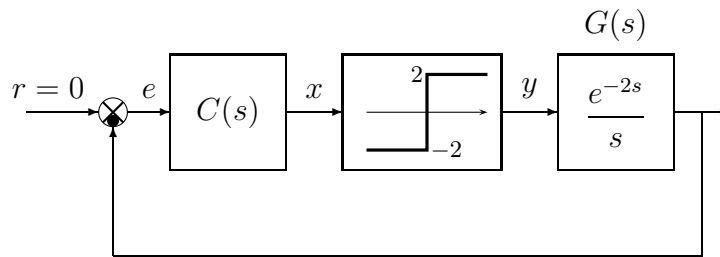
Figura 8: Funzione descrittiva  $F(X)$  e discussione grafica.

c.4) Discutere “qualitativamente”, in funzione dei parametri  $m_1, m_2 \dots$ , l’esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno  $K > 0$ .

*Soluzione.* Per  $K = 1$ , il margine di ampiezza  $K_1^*$  del sistema  $G(s)$  è  $K_1^* = 1$ . Per  $K \neq 1$ , il margine di ampiezza  $K^*$  del sistema  $KG(s)$  è  $K^* = \frac{1}{K}$ . Al variare di  $K^*$  si possono avere le seguenti condizioni dinamiche di funzionamento per sistema retroazionato:

- a) Per  $K^* > m_1$  il diagramma di Nyquist della funzione  $KG(s)$  non interseca e non circonda la funzione  $-1/F(X)$ , per cui il punto di lavoro  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  è globalmente asintoticamente stabile.
- b) Per  $m_2 < K^* < m_1$ , il diagramma di Nyquist della funzione  $KG(s)$  interseca la funzione  $-1/F(X)$  in due punti a cui corrispondono un ciclo limite instabile (il primo) e un ciclo limite stabile (il secondo).
- c) Per  $K^* < m_2$ , il diagramma di Nyquist della funzione  $KG(s)$  interseca la funzione  $-1/F(X)$  in un punto a cui corrisponde un ciclo limite instabile.

d) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



d.1) Posto  $C(s) = 1$ , determinare l’ampiezza  $X^*$  e la pulsazione  $\omega^*$  dell’oscillazione autosostenuta presente all’interno nel sistema retroazionato.

*Soluzione.* La funzione descrittiva del relè ideale è:

$$F(X) = \frac{8}{\pi X}$$

Il margine di ampiezza  $K^*$  e la pulsazione  $\omega^*$  della funzione  $G(s)$  hanno il seguente valore:

$$K^* = \omega^* = \frac{\pi}{2t_0} = \frac{\pi}{4} = 0.7854$$

L’ampiezza  $X^*$  dell’oscillazione autosostenuta si determina nel seguente modo:

$$F(X^*) = K^* \quad \rightarrow \quad \frac{8}{\pi X^*} = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad X^* = \frac{32}{\pi^2} = 3.2423$$

d.2) Progettare una rete correttiva  $C(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$  in modo che l'oscillazione autosostenuta presente all'interno del sistema sia caratterizzata da un'ampiezza  $X^* = 2$  e da una pulsazione  $\omega^* = 0.47$ .

*Soluzione.* Per avere un'oscillazione autosostenuta con ampiezza  $X^* = 2$ , il margine di ampiezza  $\bar{K}^*$  del sistema compensato dovrà avere il seguente valore:

$$\bar{K}^* = F(X^*)|_{X^*=2} = \frac{4}{\pi} = 1.2732 \quad \rightarrow \quad B = -\frac{1}{\bar{K}^*} = -0.7854$$

Modulo e fase del punto  $B$ :

$$M_B = 0.7854, \quad \varphi_B = -180^\circ.$$

Il punto  $A$  è quello che si ottiene dalla funzione  $G(s)$  quando  $s = j\omega^* = j0.33$ :

$$A = G(s)|_{s=j0.47} = \frac{e^{-0.94j}}{j0.47} \quad \rightarrow \quad M_A = 2.1277, \quad \varphi_A = -\frac{\pi}{2} - 0.94 = -143.85^\circ$$

I parametri  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  da inserire nelle formule di inversioni hanno il seguente valore:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{0.7854}{2.1277} = 0.369 \quad \varphi = -36.15^\circ \quad \omega = 0.47.$$

La rete correttiva che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.1581, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 0.6859 \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{1 + 0.1581 s}{1 + 0.6859 s}$$

La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 9.

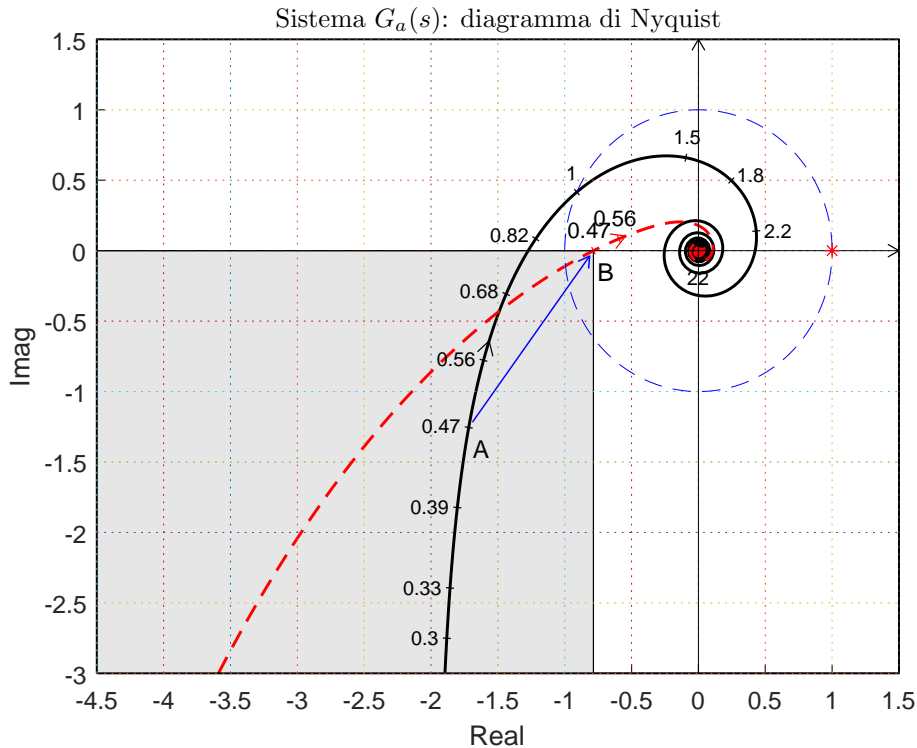


Figura 9: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G(s)$  e  $C(s)G(s)$ .

e) Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri, discretizzare il seguente sistema tempo-continuo:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+1)}{(s+3)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.1$ .

*Soluzione.* Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri si ottiene:

$$D(z) = K \frac{(1 - e^{-T} z^{-1})}{(1 - e^{-3T} z^{-1})} = K \frac{(1 - 0.9048z^{-1})}{(1 - 0.7408z^{-1})}$$

Il valore di  $K$  si determina imponendo l'uguaglianza dei guadagni alle basse frequenze:

$$\lim_{s \rightarrow 0} D(s) = \lim_{z \rightarrow 1} D(z) \quad \rightarrow \quad 0.3333 = K 0.3672 \quad \rightarrow \quad K = 0.9079$$

Sostituendo in  $D(z)$  si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.908 - 0.821 z^{-1}}{1 - 0.741 z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m_k = 0.741 m_{k-1} + 0.908 e_k - 0.821 e_{k-1}$$

f) Partendo da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta  $y(n)$  della seguente equazione alle differenze

$$y(n+2) - 1.6 y(n+1) + 0.6 y(n) = 4 x(n+1)$$

quando in ingresso è presente l'impulso di ampiezza unitaria  $x(n) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots]$ .

*Soluzione.* L'equazione alle differenze genera la seguente funzione discreta  $G(z)$ :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{4z}{z^2 - 1.6z + 0.6} = \frac{4z}{(z-1)(z-0.6)}$$

La  $\mathcal{Z}$ -trasformata del segnale di ingresso  $x(n) = \delta(n)$  è:

$$X(z) = 1.$$

La  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $Y(z)$  del segnale di uscita coincide quindi con la funzione  $G(z)$ :

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{4z}{(z-1)(z-0.6)}$$

Mediante il metodo della scomposizione in fratti semplici si ricava:

$$Y(z) = z \left[ \frac{4}{(z-1)(z-0.6)} \right] = z \left[ \frac{10}{(z-1)} - \frac{10}{(z-0.6)} \right]$$

e quindi:

$$Y(z) = 10 \left[ \frac{z}{(z-1)} - \frac{z}{(z-0.6)} \right] \quad \rightarrow \quad y(n) = 10[1 - 0.6^n].$$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

1. Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{4z^2 + 4z + 3}{5z^2 + 3z + 1 + 2z^{-2}} \quad \rightarrow \quad 5y_{k+2} + 3y_{k+1} + y_k + 2y_{k-2} = 4x_{k+2} + 4x_{k+1} + 3x_k$$

2. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema  $G(s) = \frac{-10}{(s+4.5)(s^2+16)}$  al variare del parametro  $K > 0$ . Calcolare:

4.1) L'ascissa  $\sigma_0$  corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

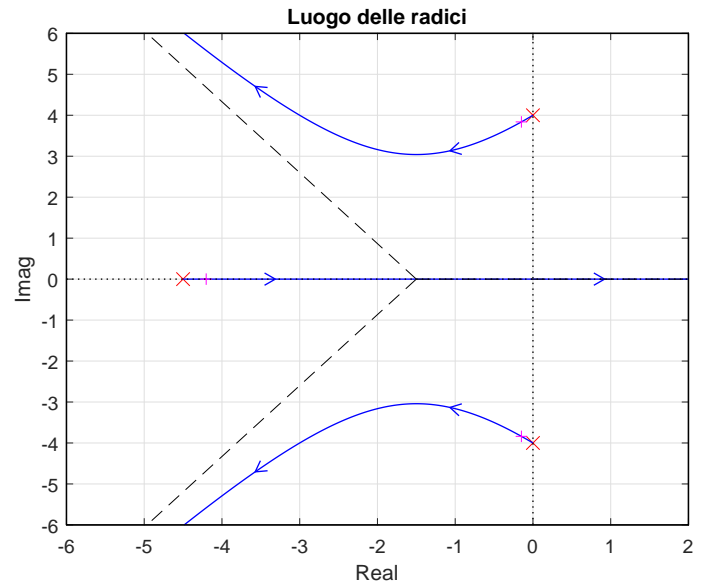
$$\sigma_0 = -1.5$$

4.2) Il valore  $K_0$  corrispondente alla condizione di minimo tempo di assestamento del sistema retroazionato:

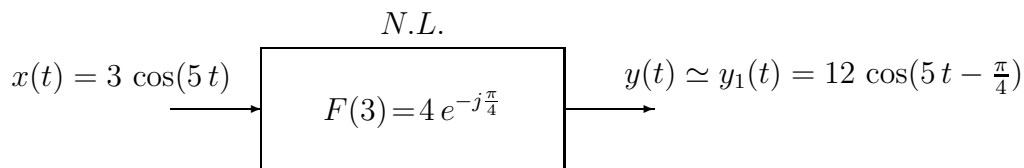
$$K_0 = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=-1.5} = 5.475$$

4.3) Per quali valori del parametro  $K$  il sistema retroazionato è stabile:

$$0 < K < K^* = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=0} = 7.2$$

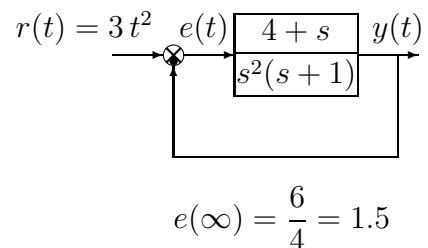
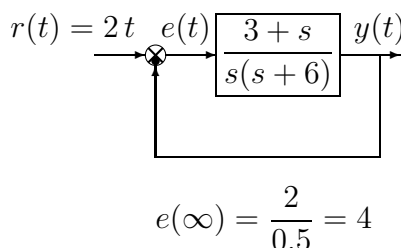
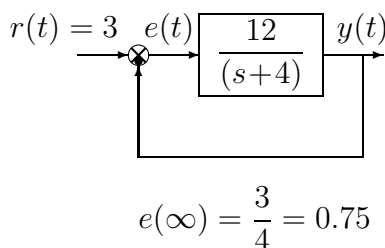


3. Sia  $y_1(t) = 12 \cos(5t - \frac{\pi}{4})$  la fondamentale del segnale periodico  $y(t)$  che si ha all'uscita del blocco non lineare N.L. sollecitato in ingresso dal segnale periodico  $x(t) = 3 \cos(5t)$ . Calcolare il valore della funzione descrittiva  $F(X)$  in corrispondenza del valore  $X = 3$ :

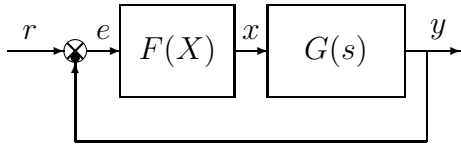


4. Fornire l'enunciato del Criterio del cerchio. *Nell'ipotesi che la funzione di trasferimento della parte lineare del sistema  $G(s)$  abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nell'origine semplice o doppio, condizione sufficiente perché il sistema in retroazione sia globalmente asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione  $G(j\omega)$  non circonda né tocchi il cerchio critico.*

5. Calcolare l'errore a regime  $e(\infty)$  per i seguenti sistemi retroazionati:



6. Sia dato il sistema non retroazionato riportato sotto dove la non linearità viene descritta dalla funzione descrittiva  $F(X)$ :



Scrivere la condizione in base alla quale il sistema retroazionato è sede di una oscillazione persistente:

$$F(X)G(j\omega) = -1$$

7. Il metodo di Ziegler-Nichols per determinare i valori di primo tentativo dei parametri di un regolatore standard PID

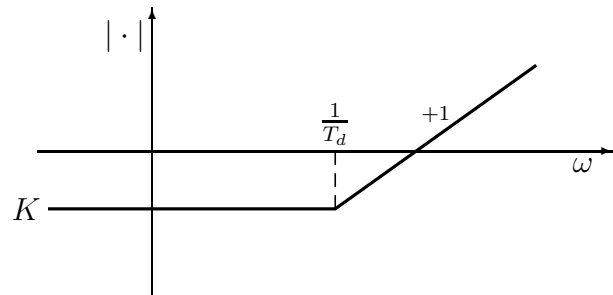
- è applicabile solo al controllo di sistemi lineari  
 richiede la conoscenza della risposta al gradino del sistema da controllare  
 richiede la conoscenza della risposta impulsiva del sistema da controllare  
 richiede la conoscenza esatta del modello dinamico del sistema da controllare  
 è applicabile in modo approssimato anche al controllo di sistemi non lineari

8. Il tempo di assestamento  $T_a$  della risposta impulsiva  $g(k)$  del sistema discreto  $G(z) = \frac{z}{z-0.4}$  è:

- $T_a = 3/|T \log_{10}(0.4)|$ ;        $T_a = 3 |\frac{1}{T} \log_{10}(0.4)|$ ;        $T_a = 3 |T \log_{10}(0.4)|$ ;  
  $T_a = 3/|\frac{1}{T} \ln(0.4)|$ ;        $T_a = 3 |\frac{1}{T} \ln(0.4)|$ ;        $T_a = 3 |T \ln(0.4)|$ ;

9. Scrivere la funzione di trasferimento  $G(s)$  di un regolatore standard PD e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

$$G(s) = K(1 + T_d s)$$



10. Sia  $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$  la  $\mathcal{Z}$ -trasformata della successione  $x(k)$ . Per  $n = 1, 2, \dots$ , enunciare il teorema della traslazione in anticipo nel tempo:

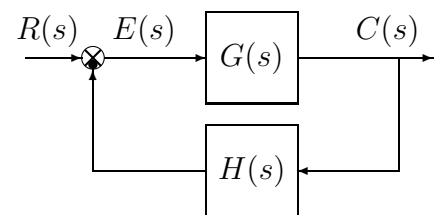
$$\mathcal{Z}[x(k+n)] = z^n [X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k)z^{-k}]$$

11. Come si determina la funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  di un sistema discreto  $G(z)$ ?

- $F(\omega) = G(j\omega T)$         $F(\omega) = G(e^{j\omega})$         $F(\omega) = G(j\omega)$         $F(\omega) = G(e^{j\omega T})$

12. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema  $G(s)$  alla variazione relativa del sistema retroazionato  $G_0(s)$  quando varia un parametro  $\alpha$  interno alla funzione di trasferimento  $G(s)$ :

$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$



13. Quale dei seguenti parametri della risposta al gradino di un sistema  $G(s)$  è maggiormente influenzato dalla larghezza di banda  $\omega_f$  del sistema stesso:

- tempo di assestamento  $T_a$        tempo di salita  $T_s$   
 massima sovraelongazione  $S$        tempo di ritardo  $T_r$

14. Calcolare il valore iniziale  $y_0 = \lim_{k \rightarrow 0} y(k)$  e il valore finale  $y_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k)$  del segnale  $y(k)$  corrispondente alla seguente funzione  $Y(z)$ :

$$Y(z) = \frac{z(4+2z)}{(z-1)(z-0.6)} \rightarrow y_0 = 2, \quad y_\infty = \frac{6}{0.4} = 15$$