Controlli Automatici - Prima parte
21 Giugno 2023 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = (6 + 3\,e^{-2t})\sin(5t), \qquad\qquad x_2(t) = (3 + 5\,t^4)\,e^{2\,t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{30}{s^2+5^2} + \frac{15}{(s+2)^2+5^2}, \qquad\qquad X_2(s) = \frac{3}{(s-2)} + \frac{120}{(s-2)^5}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s+2}{s+9}, \qquad\qquad G_2(s) = \frac{7}{s(1+3\,s)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \delta(t) - 7\,e^{-9\,t}, \qquad\qquad g_2(t) = 7\left[1 - e^{-\frac{t}{3}}\right]$$

Infatti la funzione $G_1(s)$ ha grado relativo $r = 0$ per cui prima di essere antitrasformata deve essere scomposta nella somma di un termine costante G_c e di una funzione $\bar{G}_1(s)$ avente grado relativo $r \geq 1$:

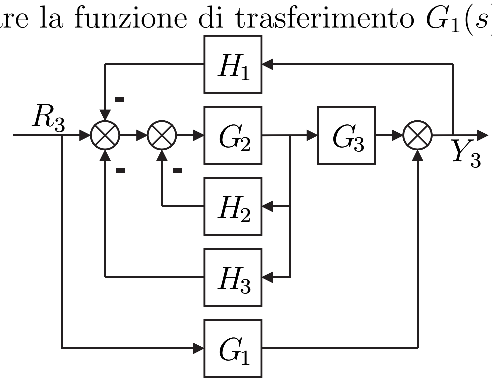
$$G_1(s) = 1 - \frac{7}{s+9} = G_c + \bar{G}_1(s) \qquad \text{dove} \qquad G_c = \lim_{s\to\infty} G(s) = 1$$

Per antitrasformare la $G_2(s)$ si deve prima portarla nella forma poli-zeri:

$$G_2(s) = \frac{7}{s(1+3\,s)} = \frac{7}{3}\frac{1}{s(s+\frac{1}{3})} = \frac{7}{3}\left[\frac{3}{s} - \frac{3}{(s+\frac{1}{3})}\right]$$

b) Dato lo schema a blocchi riportato in figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y_3(s)}{R_3(s)} = \frac{G_2G_3 + G_1(1 + G_2H_2 + G_2H_3)}{1 + G_2H_2 + G_2H_3 + G_2G_3H_1}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

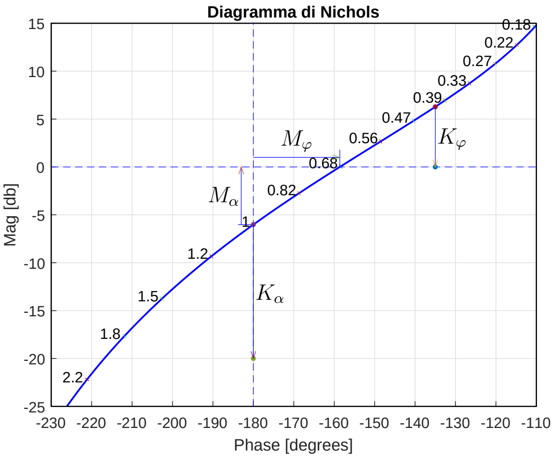
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

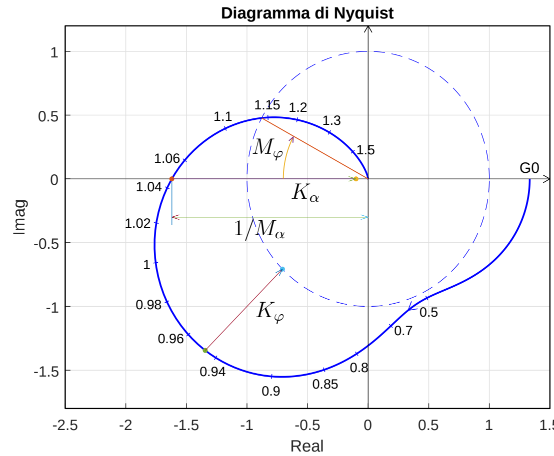
c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50$;

c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 10$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$ $\qquad\qquad$ $G_2(j\omega)$





c.1) $\quad M_a = 6.02 \text{ db } = 2$

c.2) $\quad M_\varphi = 21.4$

c.3) $\quad K_\varphi = -6.28 \text{ db } = 0.485$

c.4) $\quad K_\alpha = -14 \text{ db } = 0.2$

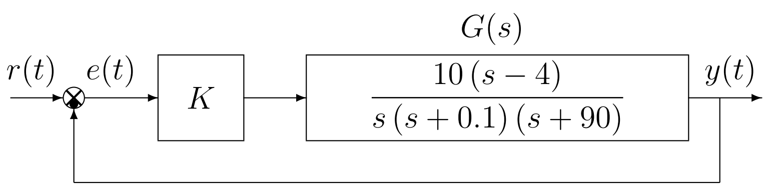
c.1) $\quad M_a = 0.617$

c.2) $\quad M_\varphi = -28.5$

c.3) $\quad K_\varphi = 0.526$

c.4) $\quad K_\alpha = 0.0617$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{10\,(s-4)}{s\,(s+0.1)\,(s+90)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 90.1s^2 + (10K+9)s + (-40K) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 10K+9 \\ 2 & 90.1 & -40K \\ 1 & 941K+810.9 & \\ 0 & -40K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$941K + 810.9 > 0, \qquad\qquad -40K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -0.86174, \qquad\qquad K < 0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K_1 = -0.86174 < K < 0.$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{-40K_1}{90.1}} = 0.61852.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

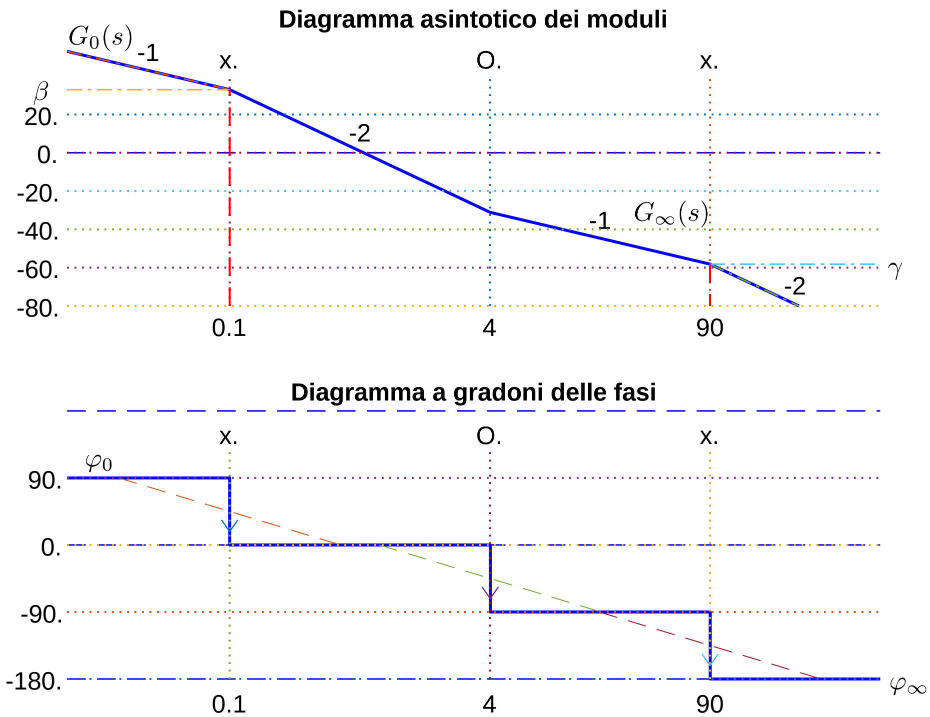


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{-4.4444}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{10}{s^2}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3\,\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 90$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.1} = 44.44 = 32.96 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=90} = 0.001235 = -58.17 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{-4} - 10 - \frac{1}{90} = -10.26 < 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto. La posizione dell'asintoto è la seguente:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = -4.4444 \cdot (-10.2611) = 45.6049.$$

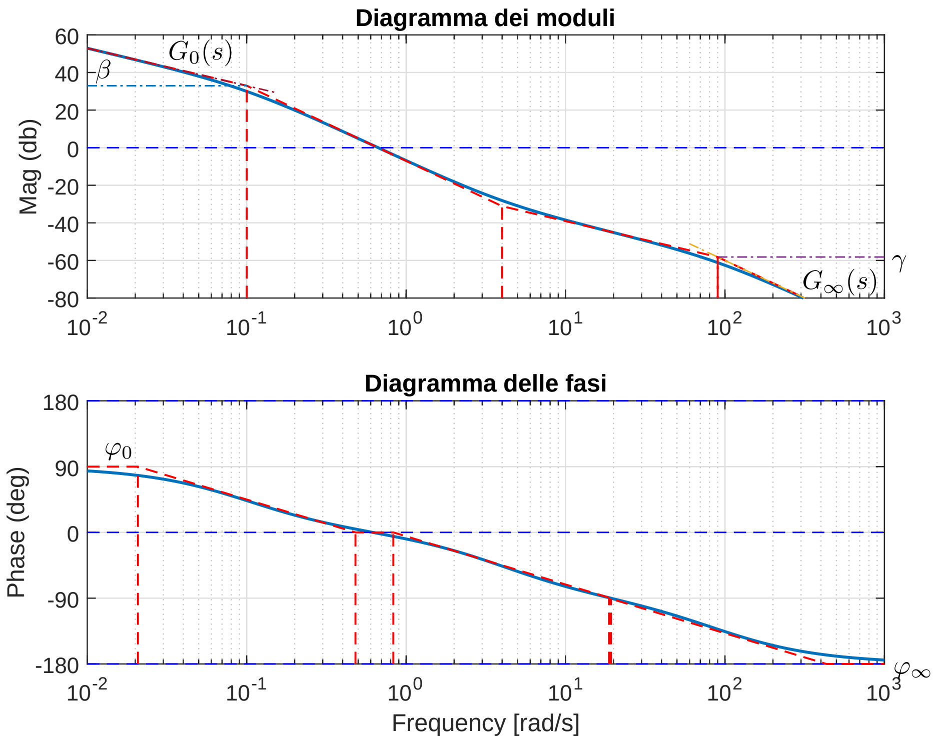


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

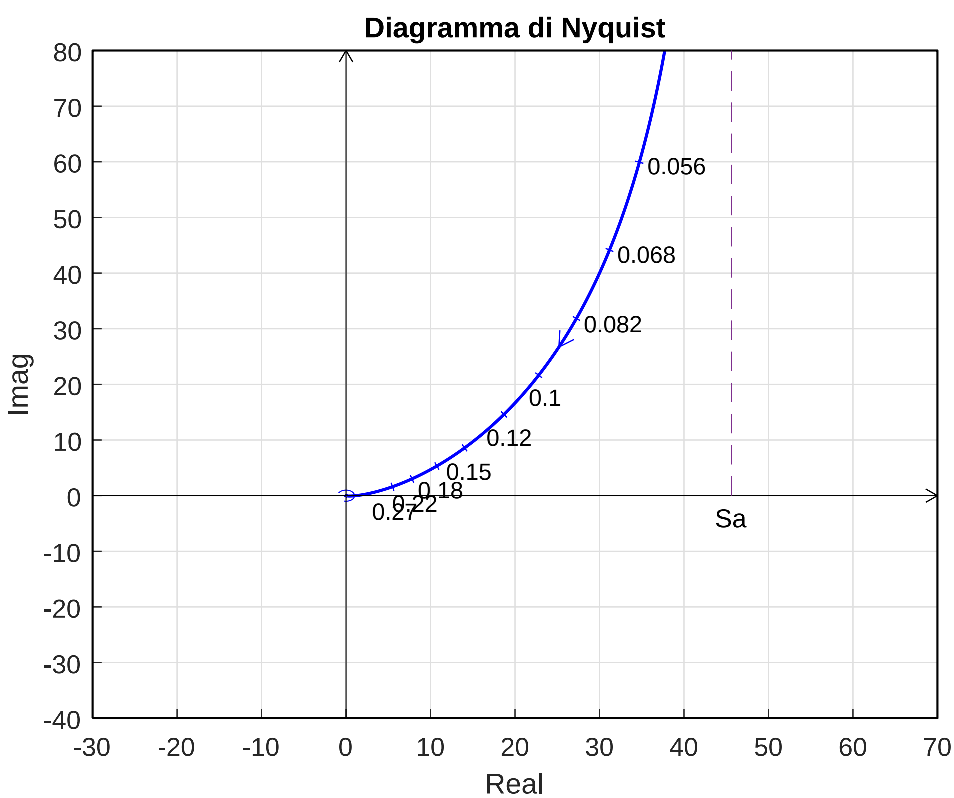


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\,\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\frac{3\,\pi}{2}$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\pi$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\pi$ in quanto la somma Δ_p del sistema è positiva:

$$\Delta_p = 4 + 0.1 + 90 = 94.1 > 0.$$

L'andamento del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ nell'intorno dell'origine è mostrato in Fig. 4.

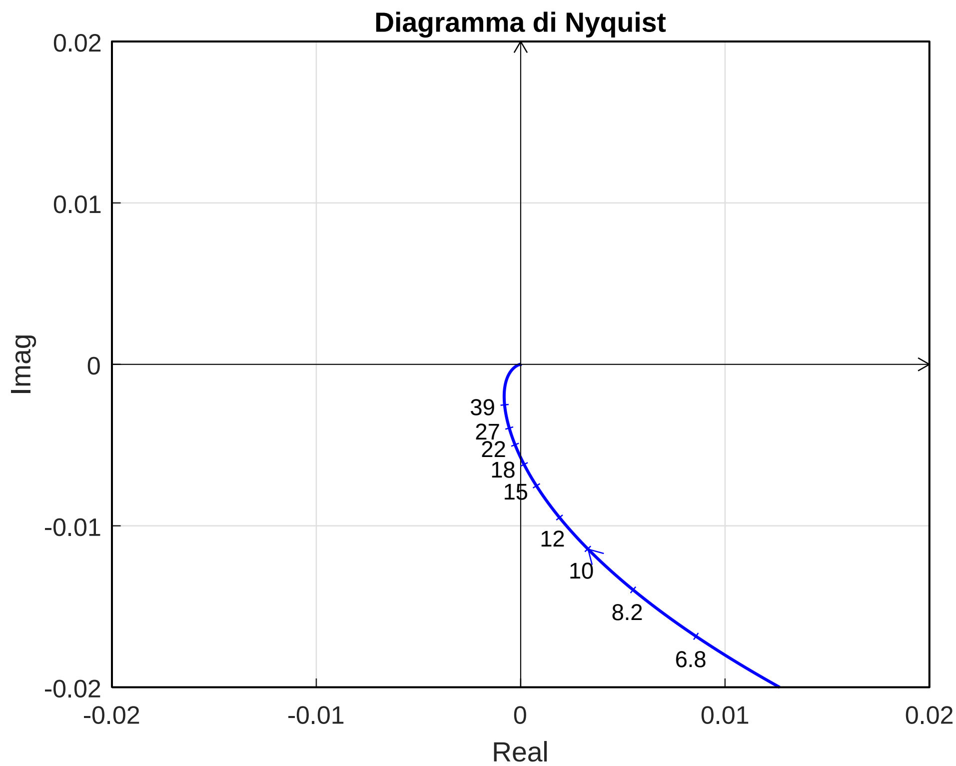


Figura 4: L'andamento del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ nell'intorno dell'origine.

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale positivo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K_1} = -\frac{1}{-0.86174} = 1.1604.$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 0.61852$.

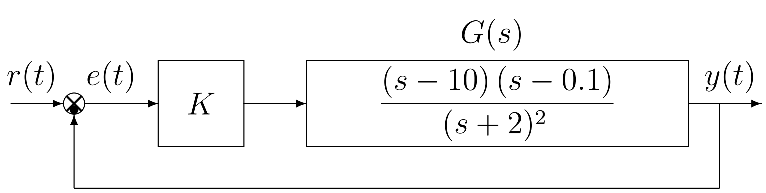
d.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $|e_v| = 0.02$ per ingresso a rampa $x(t) = 4t$.

Soluzione. L'errore a regime e_p del sistema retroazionato per ingresso a rampa $x(t) = 4t$ è:

$$e_v = \frac{R_0}{K_v} = \frac{4}{-4.4444\,K} = 0.02 \qquad \to \qquad K = -\frac{200}{4.444} \simeq -45.$$

Il valore di K trovato non é peró compatibile con i valori di K $(-0.86174 < K < 0)$ che rendono stabile il sistema retroazioniato.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{(s-10)\,(s-0.1)}{(s+2)^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad (K+1)s^2 + (4.0-10.1K)s + (K+4) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & K+1 & K+4 \\ 1 & 4.0-10.1K & \\ 0 & K+4 & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K+1>0, \qquad 4.0-10.1K>0, \qquad K+4>0,$$

dai quali si ricava:

$$K>-1, \qquad K<0.39604, \qquad K>-4.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$-1 < K < 0.39604 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*+4}{K^*+1}} = 1.7745.$$

Imponendo che tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh siano negativi, si ricava:

$$K+1<0, \qquad 4.0-10.1K<0, \qquad K+4<0,$$

da cui si ottiene un sistema di disuguaglianze:

$$K<-1, \qquad K>0.39604, \qquad K<-4.$$

che non ammette nessuna soluzione.

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = 0.25, \qquad G_\infty(s) = 1.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_\infty = 0.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.1} = 0.25 = -12.04 \text{ db}, \qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 1 = 0 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 6.

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 7. La fase iniziale

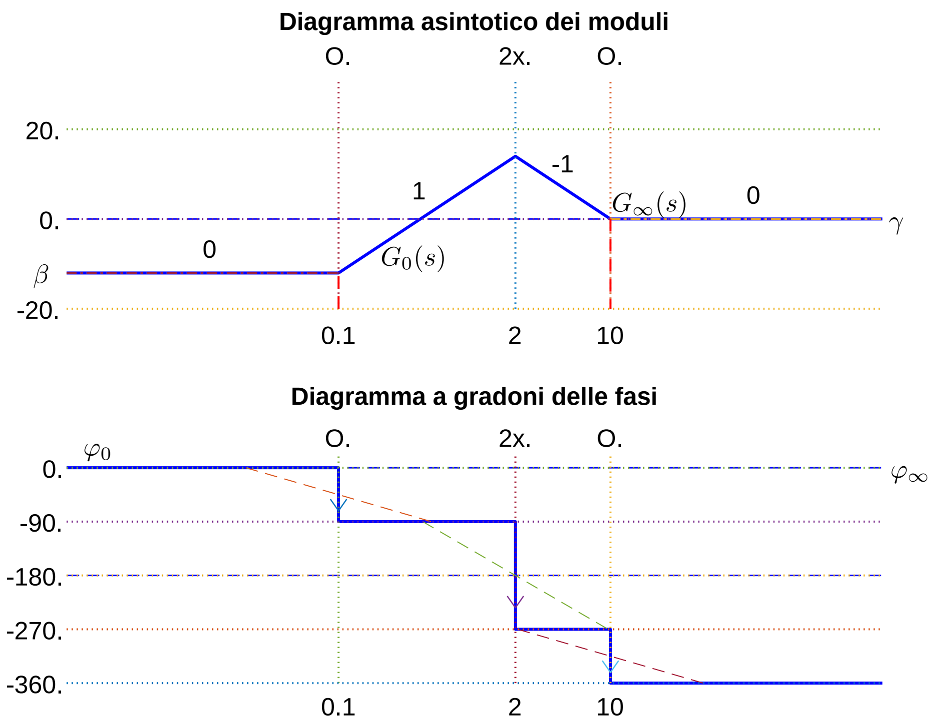


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

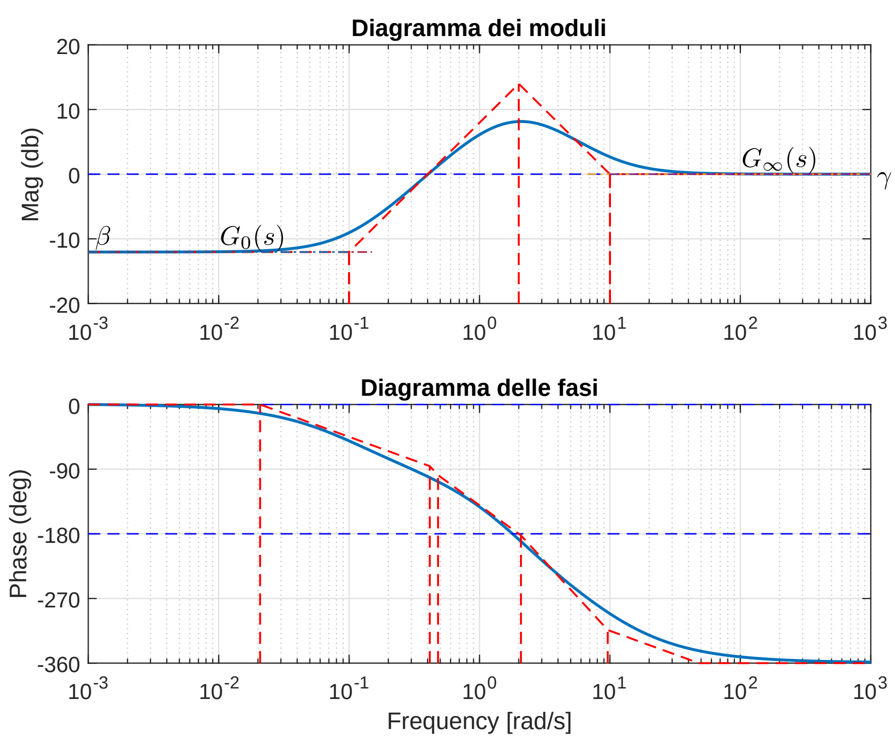


Figura 6: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

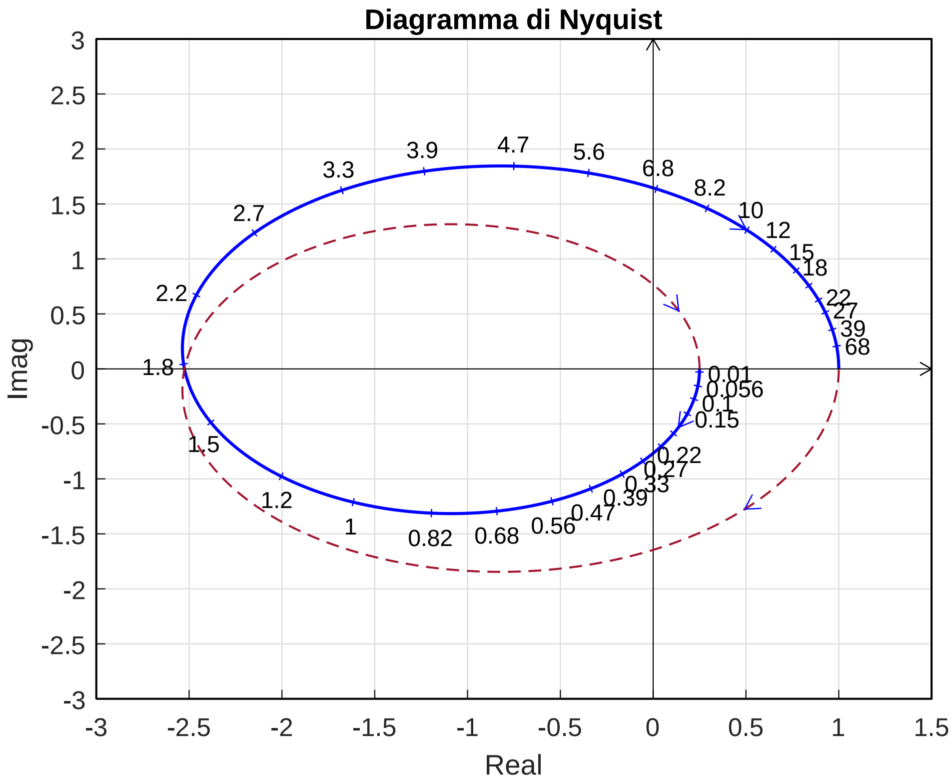


Figura 7: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

del sistema è $\varphi_0 = 0$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{-10} + \frac{10}{-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -11.1 < 0.$$

Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = 0$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -2\,\pi.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-2\,\pi$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = 0$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = 0$ in quanto la somma Δ_p del sistema è positiva:

$$\Delta_p = 10 + 0.1 + 2 + 2 = 14.1 > 0.$$

Per $K = K^*$, l'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo si ha nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{0.3960} = -2.5253.$$

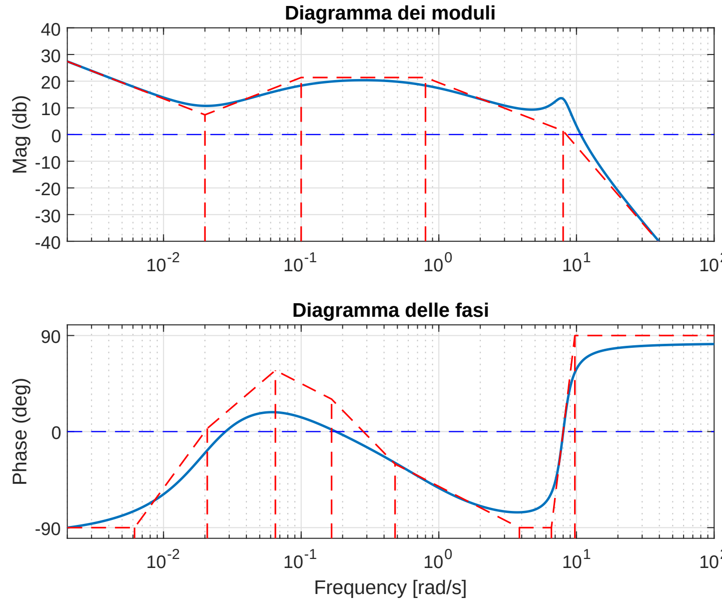
in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 1.7745$.

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{600 \cdot (s^2 + 0.03\, s + 0.02^2)}{s\,(s+0.1)(s+0.8)(s^2 - 2\,s + 8^2)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{K \ \cdot (s^2 + 0.03\, s + 0.02^2)}{s\,(s+0.1)(s+0.8)(s^2 - 2\,s + 8^2)}$$

Il valore $K = 600$ puó essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.02$:

$$|G_0(s)|_{s=0.02\,j} = \left|\frac{0.00007813\,K}{s}\right|_{s=0.02\,j} = \frac{0.00007813\,K}{0.02} = \beta \simeq 7.4 \text{ db} \simeq 2.34 \qquad \to \qquad K \simeq 600.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 8$:

$$|G_\infty(s)|_{s=8\,j} = \left|\frac{K}{s^3}\right|_{s=8\,j} = \frac{K}{8^3} = \gamma \simeq 1.38 \text{ db} \simeq 1.17 \qquad \to \qquad K \simeq 600.$$

I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione G(s) sono i seguenti:

$$\begin{array}{lllll}
(s^2 - 2\,s + 8^2) & \to & M_{\omega_n} \simeq 12 \text{ db} = 4 & \to & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.125 \\
(s^2 + 0.03\,s + 0.02^2) & \to & M_{\omega_n} \simeq -3.52 \text{ db} = 0.667 & \to & \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.75
\end{array}$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n.

Controlli Automatici - Prima parte

21 Giugno 2023 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

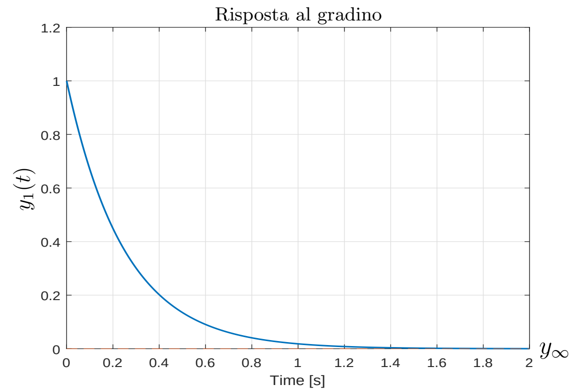
$$5\,\dddot{y}(t) + 3\,\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4\,y(t) = 3\,\ddot{x}(t) + 2\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3\,s^2 + 2}{5\,s^3 + 3\,s^2 + s + 4}$$

2. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino del seguente sistema:

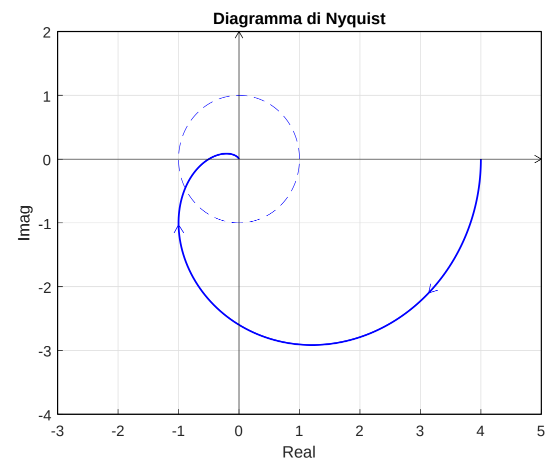
$$G(s) = \frac{s}{(s+4)}$$

Calcolare inoltre il valore iniziale y_0, il valore y_∞ e il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$:

$$y_0 = 1, \qquad y_\infty \simeq 0, \qquad T_a \simeq 0.75$$



3. Sul piano di Nyquist riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ di un sistema $G(s)$ a fase minima caratterizzato dai seguenti parametri:
   a) Guadagno statico $G(0) = 4$;
   b) Margine di fase $M_\varphi \simeq 30°$;
   c) Margine di ampiezza $M_\alpha \simeq 2$;
   d) Grado relativo $r = 3$;



4. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale $x(t)$:

$$x(t) = 5 + 3\cos(2\,t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{8}{(s+2)^2}} \longrightarrow y(t) \simeq 10 + 3\,\cos\left(2\,t - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

Infatti si ha che:

$$G(j2) = \frac{8}{(j2+2)^2} \quad \rightarrow \quad |G(j2)| = 1, \qquad \arg G(j2) = -2\,\arctan\left(\frac{2}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

5. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $2\,\dot{y}(t) + 3\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 4$.

$$Y(s) = \frac{8}{2\,s+3} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = 4\,e^{-1.5\,t}$$

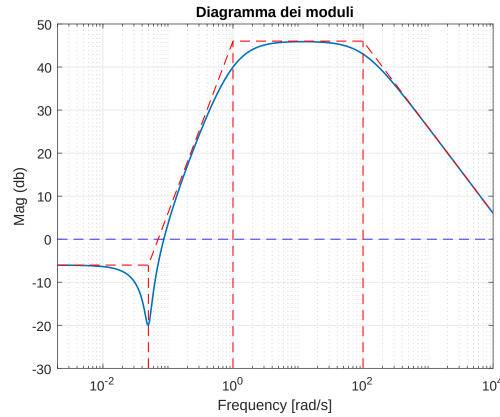
6. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza M_R maggiore di uno se e solo se

○ $0 < \delta < 1$ ○ $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ⊗ $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ○ $0 < \delta < \sqrt{2}$

7. Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli di un sistema $G(s)$ a fase minima.

Utilizzando la formula di Bode, calcolare in modo approssimato la fase φ del sistema $G(s)$ in corrispondenza delle seguenti pulsazioni ω:

$$\omega_1 = 0.04 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 \simeq \frac{\pi}{2}$$
$$\omega_2 = 1 \quad \rightarrow \quad \varphi_2 \simeq \frac{\pi}{2}$$
$$\omega_3 = 100 \quad \rightarrow \quad \varphi_3 \simeq -\frac{\pi}{4}$$
$$\omega_4 = 2000 \quad \rightarrow \quad \varphi_4 \simeq -\frac{\pi}{2}$$



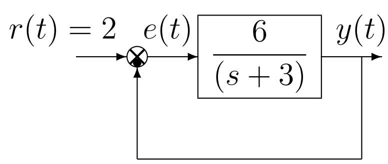
8. La pulsazione di risonanza ω_R di un sistema del 2° ordine è:

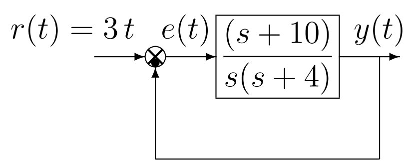
○ $\omega_R = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$ ⊗ $\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\delta^2}$ ○ $\omega_R = \omega_n\delta\sqrt{1-\delta^2}$ ○ $\omega_R = \omega_n\delta\sqrt{1-2\delta^2}$

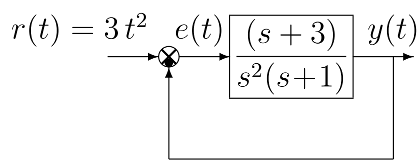
9. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema del secondo ordine caratterizzato da un guadagno statico $G(0) = 3$, da una pulsazione naturale $\omega_n = 5$ e da un tempo di assestamento $T_a = 6$ s alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{75}{s^2 + s + 25}.$$

10. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:







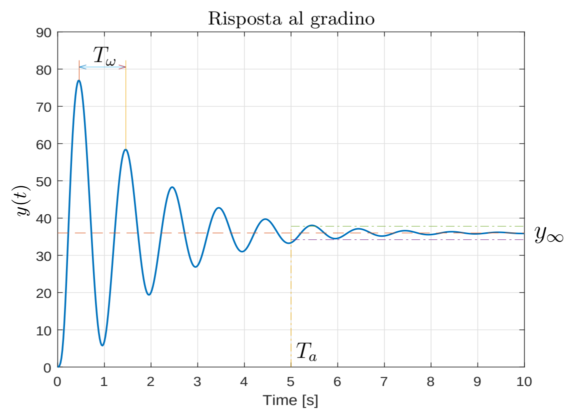
$$e(\infty) = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} = 0.666 \qquad e(\infty) = \frac{3}{\frac{10}{4}} = 1.2 \qquad e(\infty) = \frac{6}{3} = 2$$

11. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{50(4 + 0.9s)(3s + 20)(s^2 + 8s + 60^2)}{(s + 5)(0.3s + 5)(\mathbf{s^2 + 1.2s + 40})(s^2 + 15s + 400)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 36, \qquad T_a \simeq 5\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{40-0.6^2}} = 0.998\,\text{s}.$$



12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s+5)^2}{s^2(4s-1)}\,e^{-3\,s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{(\omega^2+25)}{\omega^2\sqrt{1+16\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = 2\arctan\frac{\omega}{5} - \pi - (\pi - \arctan 4\omega) - 3\,\omega \end{cases}$$