Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Controlli Automatici - Prima parte
21 Giugno 2022 - Esercizi

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = (2\,t + 5\,e^{-3t})\,t^3, \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ 2\,e^{-4\,(t-3)}\sin(5(t-3)) & t \geq 3 \end{cases}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{48}{s^5} + \frac{30}{(s+3)^4}, \qquad X_2(s) = \frac{10\,e^{-3s}}{(s+4)^2 + 25}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{12\,(1+s)}{s(2+s)(3+s)}, \qquad G_2(s) = 5 + \frac{3\,(s-2)}{(s-2)^2 + 64}$$

Soluzione:

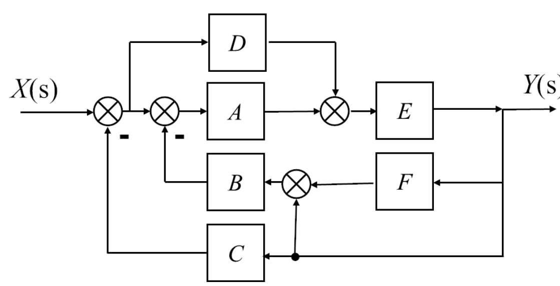
$$g_1(t) = 2 + 6\,e^{-2t} - 8\,t\,e^{-3t}, \qquad g_2(t) = 5\,\delta(t) + 3\,e^{2t}\,\cos(8t)$$

Infatti, per la funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12\,(s+1)}{s(s+2)(s+3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} + \frac{6}{(s+2)} - \frac{8}{(s+3)}\right] = 2 + 6\,e^{-2t} - 8\,e^{-3t}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G(s) = \frac{A\,E + D\,E}{1 + A\,E\,F\,B + A\,E\,B + A\,E\,C + D\,E\,C}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

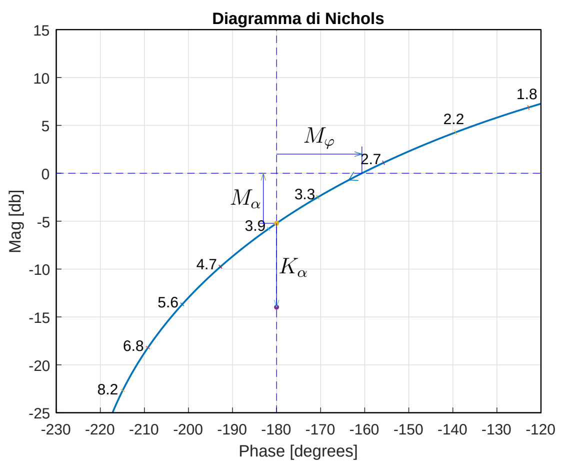
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_a per cui il sistema $K_a\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_a = 5$;

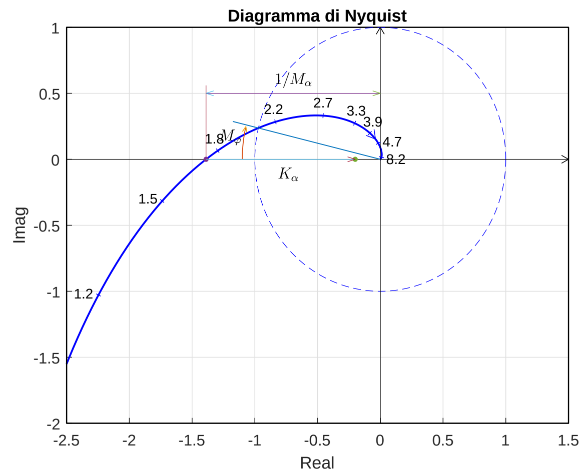
c.4) la risposta a regime $y_r(t)$ del sistema $G(s)$ ad un ingresso sinusoidale $x(t) = 5\cos(2.2t)$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$

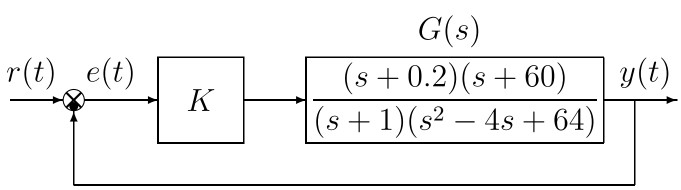


$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = 5.22$ db $= 1.82$	c.1) $M_a = 0.72$
c.2) $M_\varphi = 19.36$	c.2) $M_\varphi = -13.7$
c.3) $K_a = -8.76$ db $= 0.364$	c.3) $K_a = 0.144$
c.4) $y_r(t) = \begin{cases} 5 \cdot 1.63\cos(2.2t - 139.4°) \\ 8.15\cos(2.2t - 139.4°) \end{cases}$	c.4) $y_r(t) = \begin{cases} 5 \cdot 0.883\cos(2.2t + 161.2°) \\ 4.41\cos(2.2t + 161.2°) \end{cases}$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

<u>Soluzione</u>.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K\,(s+0.2)(s+60)}{(s+1)(s^2-4s+64)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad (s+1)(s^2-4s+64) + K\,(s+0.2)(s+60) = 0$$

$$s^3 + (K-3)\,s^2 + (60+60.2\,K)\,s + 64 + 12\,K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 60+60.2\,K \\ 2 & (K-3) & 64+12\,K \\ 1 & (K-3)(60.2\,K) - 64 - 12\,K & \\ 0 & 64+12\,K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 3, \qquad 60.2K^2 - 132.6K - 244 > 0, \qquad 64 + 12\,K.$$

dai quali si ricava:

$$K > 3, \qquad (K < -1.1935) \cup (K > 3.396), \qquad K >= -\frac{16}{3} = -5.333.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 3.396 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{(60 + 60.2\, K^*)} = 16.262.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

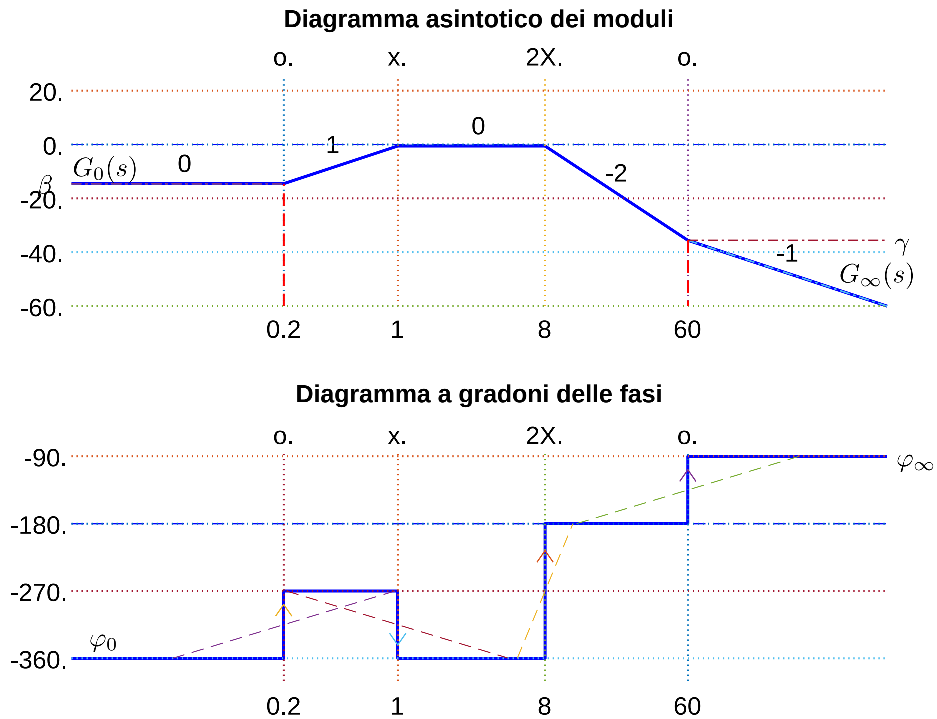


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{0.2 \cdot 60}{64} = \frac{3}{16} = 0.1875, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 60$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0} = 0.1875 = -14.54 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=60} = \frac{1}{60} = -35.56 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli instabili è $\delta = 4/(2\omega_n) = 4/16 = 0.25$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = 0$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 5 + \frac{1}{60} - 1 + \frac{4}{64} = 4.079 > 0.$$

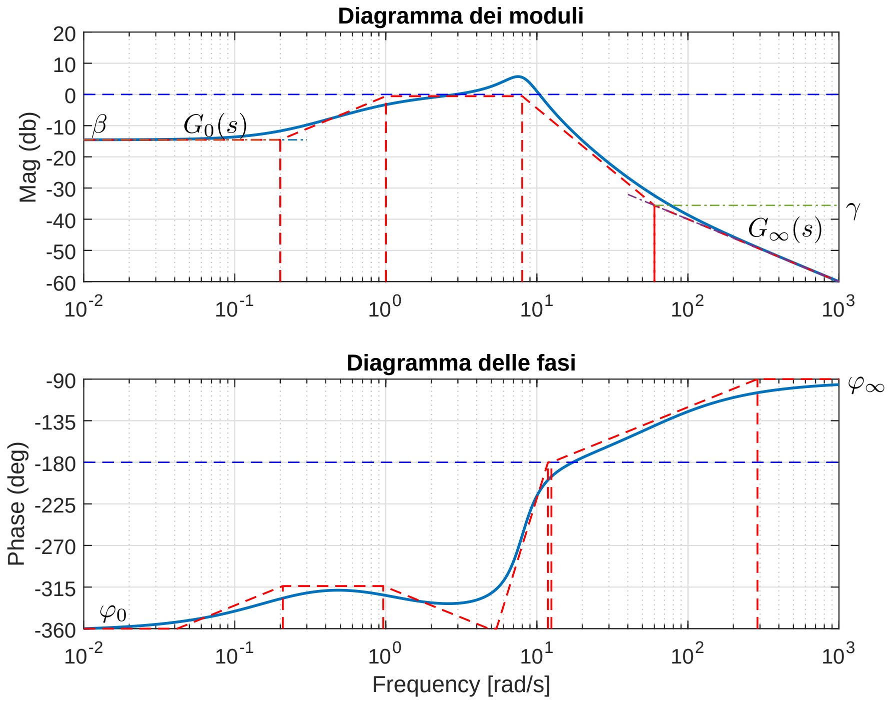


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

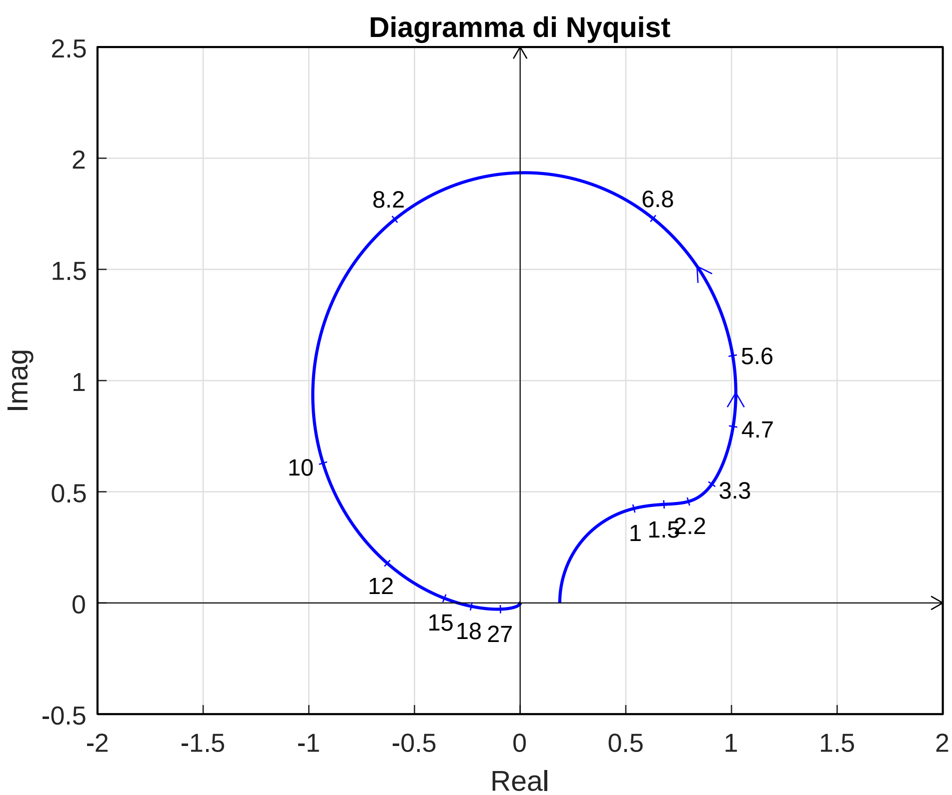


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 0 per cui non esiste nessun asintoto. La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = \frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p delle pulsazioni critiche del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -0.2 - 60 + 1 - 4 = -63.2 < 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{3.396} = -0.2945.$$

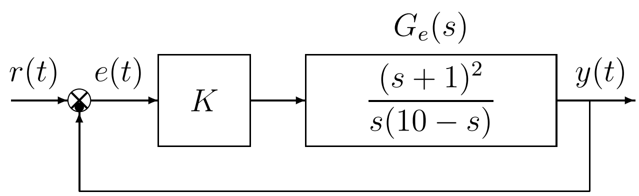
in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 16.26$.

d.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $|e_p| = 0.1$ per ingresso a gradino $x(t) = 3$.

Soluzione. L'errore a regime e_p del sistema retroazionato per ingresso a gradino $x(t) = 4$ è

$$e_p = \frac{R_0}{1 + K_p} = \frac{3}{1 + \frac{3\,K}{16}} = \frac{48}{16 + 3\,K} = 0.1 \qquad \rightarrow \qquad K = \frac{48 - 1.6}{0.3} = 154.666.$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K\,(s+1)^2}{s(10-s)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad (K-1)s^2 + (2K+10)s + K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & K-1 & K \\ 1 & 2K+10 & \\ 0 & K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile quando tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno. I coefficienti della prima colonna sono tutti positivi quando:

$$K > 1, \qquad K > -5, \qquad K > 0 \qquad \rightarrow \qquad K > 1 = K^*.$$

I coefficienti della prima colonna sono tutti negativi quando:

$$K < 1, \qquad K < -5, \qquad K < 0 \qquad \rightarrow \qquad K < -5 = \bar{K}^*.$$

Il sistema retroazionato è stabile quando:

$$(K < -5) \cup (K > 1)$$

La pulsazione $\bar{\omega}^*$ corrispondente al valore limite $\bar{K}^*$ è :

$$\bar{\omega}^* = \sqrt{\frac{\bar{K}^*}{\bar{K}^* - 1}} = \sqrt{\frac{5}{6}} = 0.9129.$$

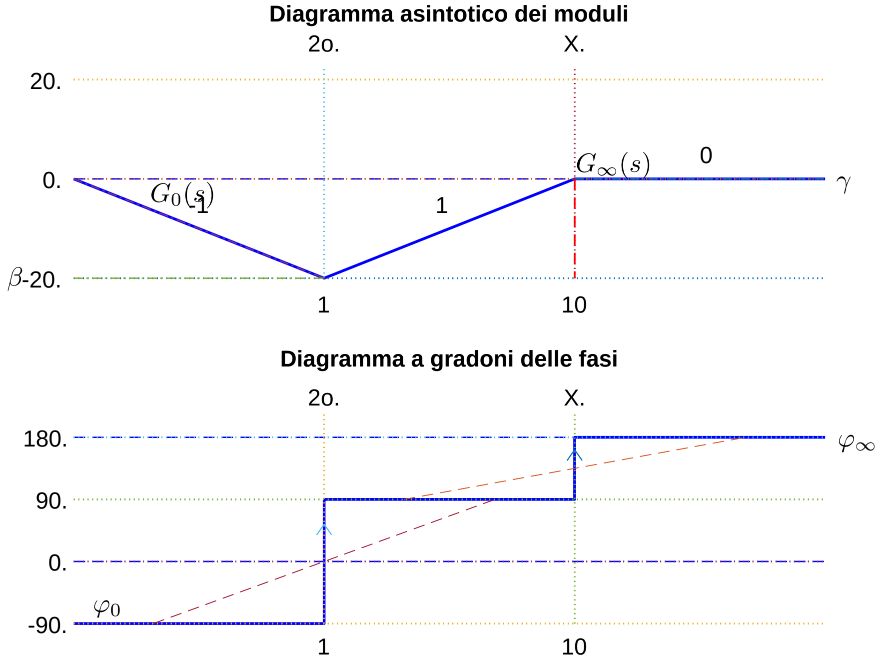


Figura 4: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.
<u>Soluzione</u>.
I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 4.
I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

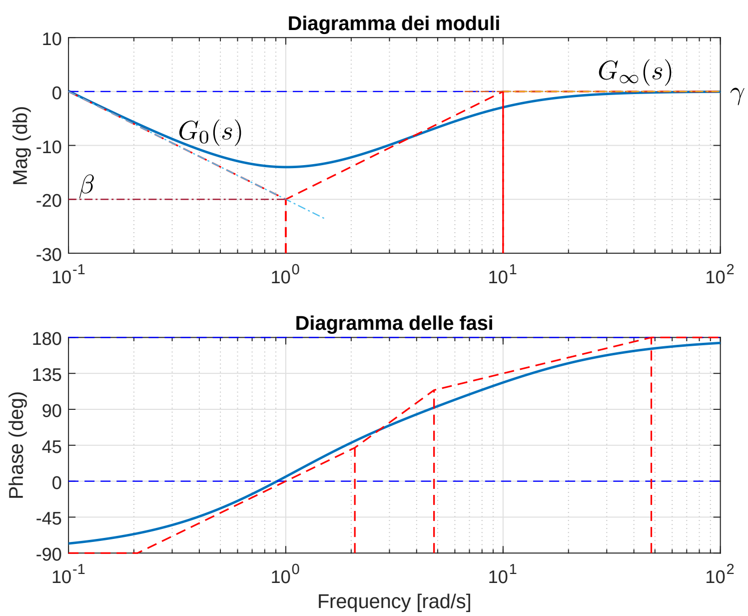


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{10\,s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = -1$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 0.1 = -20 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 1 = 0 \text{ db}.$$

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale

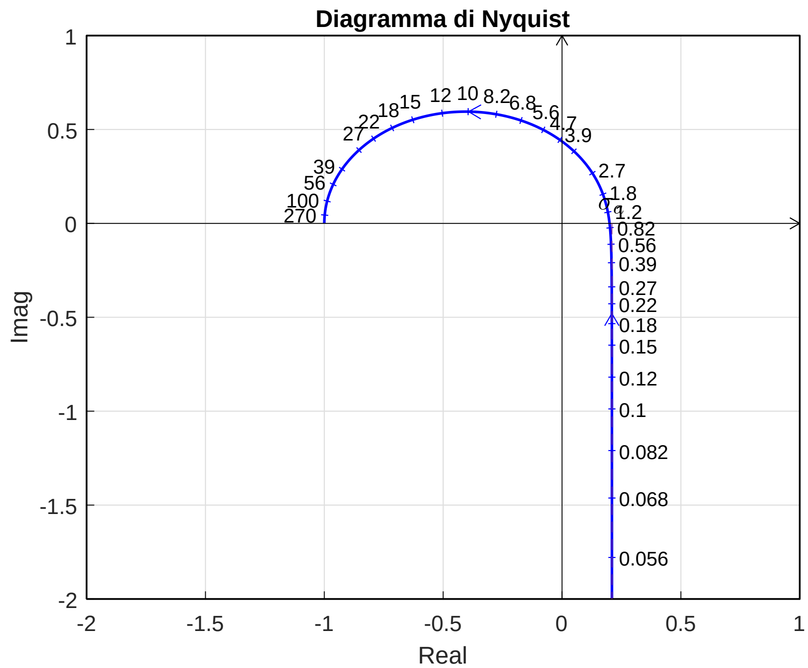


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta\tau = 2 + \frac{1}{10} = 2.1 > 0$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale.

$$\sigma_a = \Delta_\tau K = 0.21$$

La variazione di fase

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\pi$. Esistono due intersezioni σ_1^* e σ_2^* con l'asse reale:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} = -1, \qquad\qquad \sigma_2^* = -\frac{1}{\bar{K}^*} = -\frac{1}{-5} = 0.2,$$

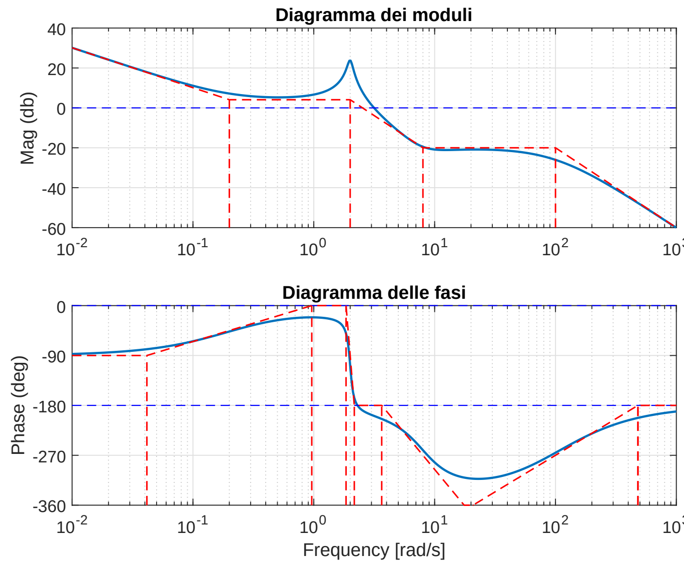
L'intersezione σ_1^* si ha per $\omega = \infty$ mentre 'intersezione σ_2^* si ha per $\omega = \omega^* = 1.118$.

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{1000(s+0.2)(s^2-8s+8^2)}{s(s^2+0.2s+4)(s-100)^2}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{1000(s+0.2)(s^2-8s+8^2)}{s(s^2+0.2s+4)(s-100)^2}.$$

Il valore $K = 1000$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100\,j} = \left|\frac{K}{s^2}\right|_{s=100\,j} = \frac{K}{10000} = \gamma \simeq -20 \text{ db} \simeq 0.1 \qquad \to \qquad K \simeq 1000.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati instabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{20} = 0.05.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 20$ db $\simeq 10$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli. Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati stabili è $\delta = 0.5$:

Controlli Automatici - Prima parte

21 Giugno 2022 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Siano $Y(s)$, $X_1(s)$ e $X_2(s)$ le trasformate di Laplace dei segnali temporali $y(t)$, $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Scrivere, in funzione dei segnali temporali $y(t)$, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, l'equazione differenziale corrispondente al seguente legame tra le trasformate di Laplace $Y(s)$, $X_1(s)$ e $X_2(s)$:

$$Y(s) = \frac{(2\,s+3)X_1(s) + 4\,X_2(s)}{s^3+4\,s^2+5\,s+2} \qquad \rightarrow \qquad \dddot{y}(t) + 4\,\ddot{y}(t) + 5\,\dot{y}(t) + 2\,y(t) = 2\,\dot{x}_1(t) + 3\,x_1(t) + 4\,x_2(t)$$

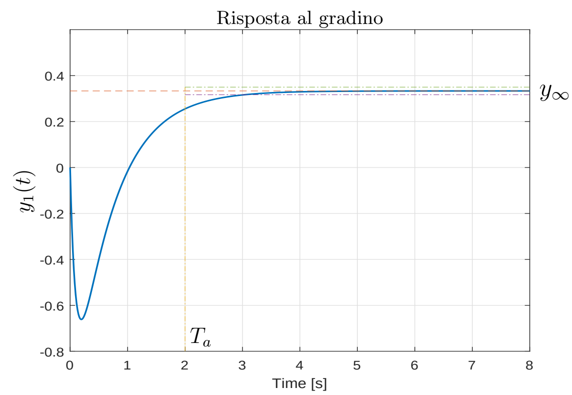
2. Utilizzando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{10(2-4\,s)}{(6+4\,s)(s+10)}$$

Calcolare il valore iniziale y_0, il valore finale y_∞ e il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$:

$$y_0 = 0, \qquad y_\infty \simeq 0.333, \qquad T_a \simeq 2\,\text{s}.$$

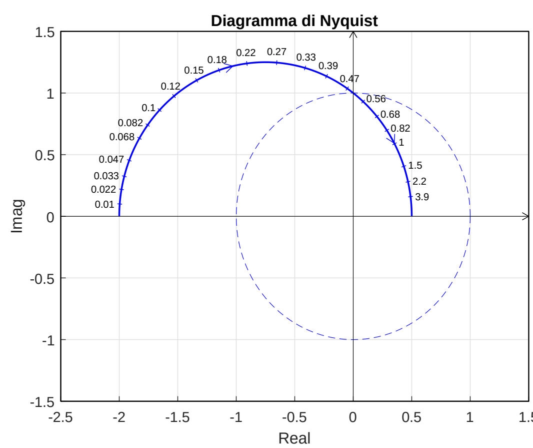
Il tratto iniziale negativo é dovuto al fatto che il sistema non é a fase minima.



3. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{(4s-1)}{2(s+1)}$.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

- ⊗ $-2 < K < \frac{1}{2}$;
- ◯ $-\frac{1}{2} < K < 2$;
- ◯ $(K < -2) \cup (K > \frac{1}{2})$;
- ◯ $(K < -\frac{1}{2}) \cup (K > 2)$;



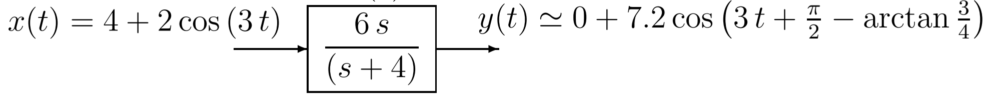
4. Nella scomposizione in fratti semplici, quali sono i *modi* $g_1(t)$ e $g_2(t)$ corrispondenti ad una coppia di poli complessi coniugati sull'asse immaginario $p_{1,2} = \pm 2\,j$ con grado di molteplicità $\nu = 2$:

$$g_1(t) = K_1\,\sin(2\,t + \varphi_1), \qquad\qquad g_2(t) = K_2\,t\,\sin(2\,t+\varphi_2).$$

5. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema del secondo ordine caratterizzato da un guadagno statico $G(0) = 4$, da una pulsazione naturale $\omega_n = 5$ e da un tempo di assestamento $T_a = 1$ s alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{100}{s^2+6\,s+25}.$$

6. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:



Infatti si ha che:

$$G(3\,j) = \frac{6\,\cdot 3\,j}{(3\,j+4)} \qquad \rightarrow \qquad |G(3\,j)| = \frac{18}{5} = 3.6, \qquad \arg G(3\,j) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{3}{4}$$

7. In figura sono mostrati i diagrammi di Bode di un sistema lineare $G(s)$. Nei limiti della precisione del grafico, calcolare:

   a) la posizione dei poli dominanti $p_{1,2}$ del sistema $G(s)$:

   $$p_{1,2} \simeq -0.2$$

   b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino del sistema $G(s)$:

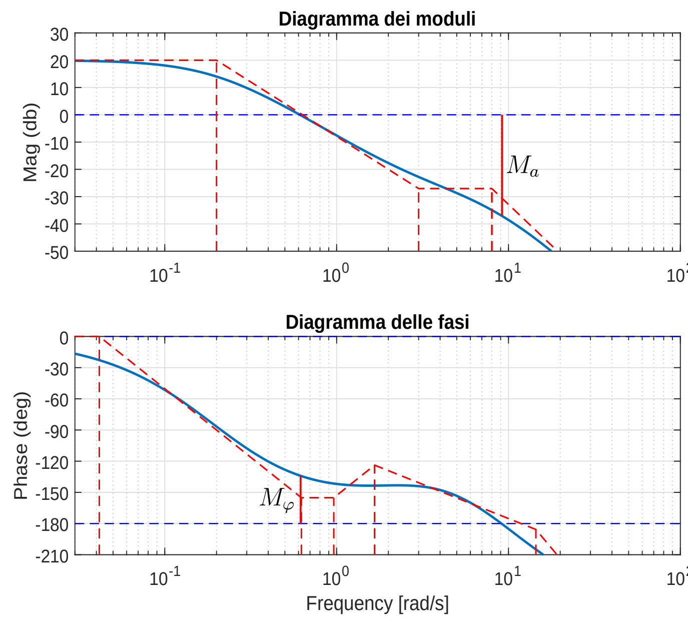
   $$T_a \simeq \frac{3}{0.2}\ \text{s} = 15\ \text{s}.$$

   c) i margini di stabilità del sistema $G(s)$:

   $$M_\varphi \simeq 45.93°, \qquad M_a \simeq 37\ \text{db} = 71.51.$$

   d) l'errore a regime e_p del sistema retroazionato per ingresso a gradino unitario:

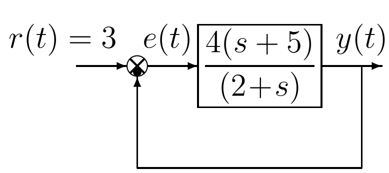
   $$e_p = \frac{1}{1+10} = 0.091$$

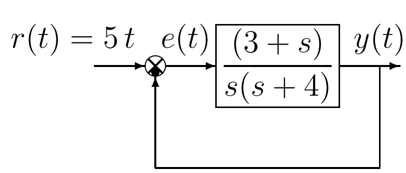


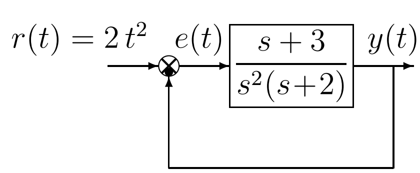
8. Il picco di risonanza M_R di un sistema del 2° ordine è:

   ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$ ⊗ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$ ○ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$ ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

9. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:





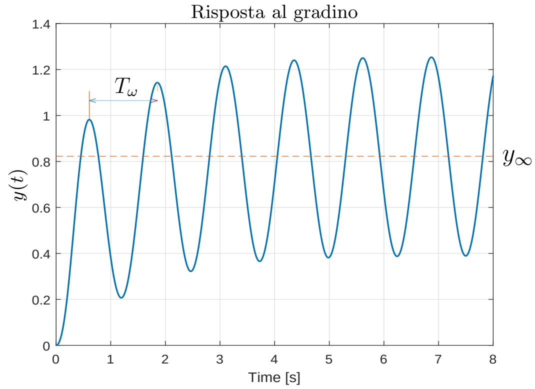


$$e(\infty) = \frac{3}{1+\frac{20}{2}} = \frac{3}{11} = 0.2727 \qquad e(\infty) = \frac{20}{3} = 6.666 \qquad e(\infty) = \frac{8}{3} = 2.666$$

10. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{20(2+0.8s)(5s+30)(s^2+12s+10^2)}{(5s+4)(2s+18)(s^2+4s+81)(\mathbf{s^2+25})}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:



$$y_\infty = \nexists\ (= 0.823), \qquad T_a \simeq \infty, \qquad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{5} = 1.2$$

In questo caso il valore $y_\infty = G(0) = 0.823$ coincide con il valore medio dell'oscillazione $y(t)$ quando $t \to \infty$.

11. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(5\,s+1)(2-3\,s)^2}{s(s+4)}\,e^{-3\,t_0 s} \qquad \to \qquad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{\sqrt{1+25\,\omega^2}(4+9\,\omega^2)}{\omega\sqrt{\omega^2+16}} \\ \varphi(\omega) = \arctan 5\omega - 2\arctan\dfrac{3\omega}{2} - \dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{\omega}{4} - 3\,t_0\,\omega \end{cases}$$