Controlli Automatici - Prima parte
19 Giugno 2017 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 3\,t^4 + e^{-7\,t}\sin(2\,t), \qquad\qquad x_2(t) = 2\,t\,e^{7t} + 7\,\cos(3\,t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{72}{s^5} + \frac{2}{(s+7)^2 + 2^2}, \qquad\qquad X_2(s) = \frac{2}{(s-7)^2} + \frac{7\,s}{s^2+9}$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s+9}{s+2}, \qquad\qquad G_2(s) = \frac{3}{s(1+7\,s)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \delta(t) + 7\,e^{-2\,t}, \qquad\qquad g_2(t) = 3\left[1 - e^{-\frac{t}{7}}\right]$$

Infatti la funzione $G_1(s)$ ha grado relativo $r = 0$ per cui prima di essere antitrasformata deve essere scomposta nella somma di un termine costante G_c e di una funzione $\bar{G}_1(s)$ avente grado relativo $r \geq 1$:

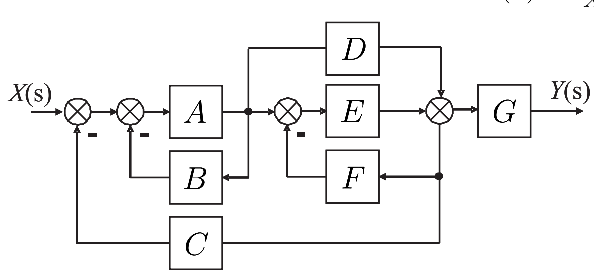
$$G_1(s) = 1 + \frac{(9-2)}{s+2} = G_c + \bar{G}_1(s) \qquad \text{dove} \qquad G_c = \lim_{s\to\infty} G(s) = 1$$

Per antitrasformare la $G_2(s)$ si deve prima portarla nella forma poli-zeri:

$$G_2(s) = \frac{3}{s(1+7\,s)} = \frac{3}{7}\frac{1}{s(s+\frac{1}{7})} = \frac{3}{7}\left[\frac{7}{s} - \frac{7}{(s+\frac{1}{7})}\right]$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G_1(s) = \frac{AEG+ADG}{1+AB+EF+AEC+ADC+ABEF}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

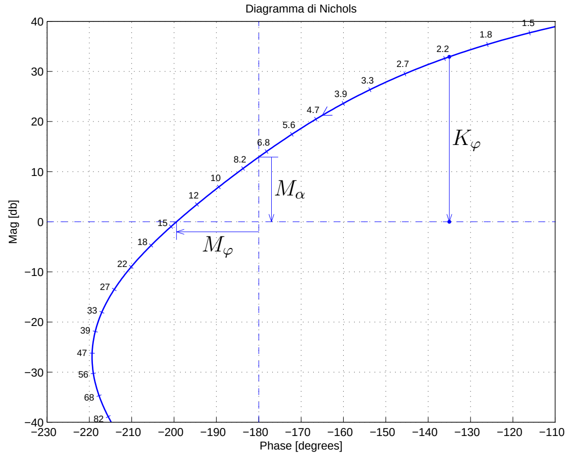
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45°$;

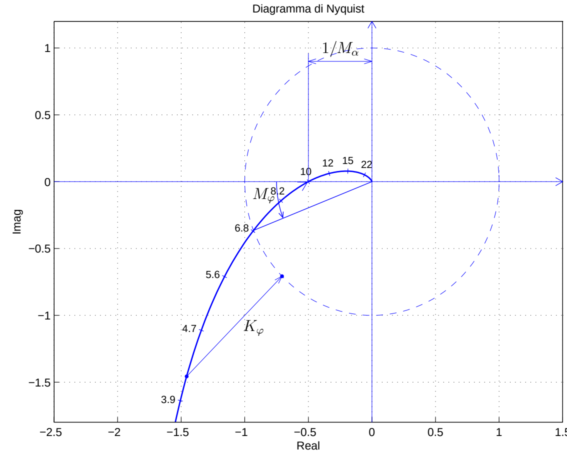
c.4) la risposta a regime $y_r(t)$ del sistema $G(s)$ ad un ingresso sinusoidale $x(t) = 3\sin(5.6t)$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = -12.91$ db $= 0.226$

c.2) $M_\varphi = -19.42°$

c.3) $K_\varphi = -32.92$ db $= 0.022$

c.4) $y_r(t) = 3 \cdot 7.4511 \sin(5.6t - 172.2°)$

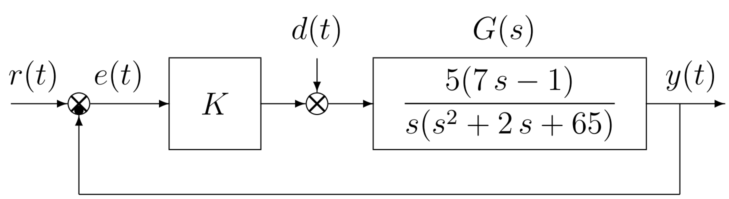
c.1) $M_a = 2$

c.2) $M_\varphi = 21.4°$

c.3) $K_\varphi = 0.49$

c.4) $y_r(t) = 3 \cdot 1.36 \sin(5.6t - 148.5°)$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

<u>Soluzione</u>.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{5\,K\,(7s-1)}{s(s^2+2s+65)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 2s^2 + (65+35\,K)s - 5\,K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & 65+35\,K & \rightarrow & 1>0 \\
2 & 2 & -5\,K & \rightarrow & 2>0 \\
1 & (130+70\,K)+5\,K & & \rightarrow & K > K > -\frac{130}{75} \\
0 & -5\,K & & \rightarrow & K<0
\end{array}$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K^* = -1.733 = -\frac{130}{75} < K < 0.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{-5\,K^*}{2}} = \sqrt{\frac{13}{3}}.$$

Si ha $K^* = -1.733$ e $\omega^* = 2.08$.

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>. I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

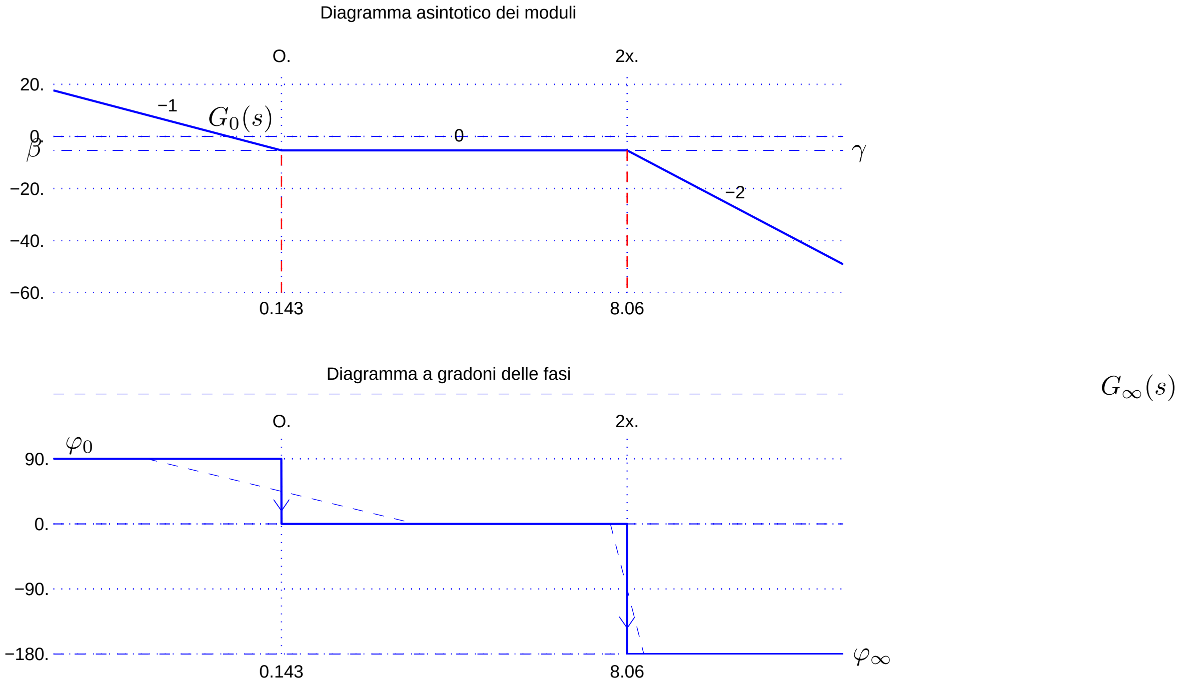


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = -\frac{1}{13s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{35}{s^2}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = \frac{1}{7}$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 8$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=\frac{1}{7}} = \frac{7}{13} = -5.37 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=8} = \frac{35}{65} = -5.37 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli instabili è $\delta = 2/(2\omega_n) = 2/16 = 0.125$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = -7 - \frac{2}{65} = -7.03 > 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = \frac{-1}{13} \cdot (-7.03) = 0.541.$$

La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2}$$

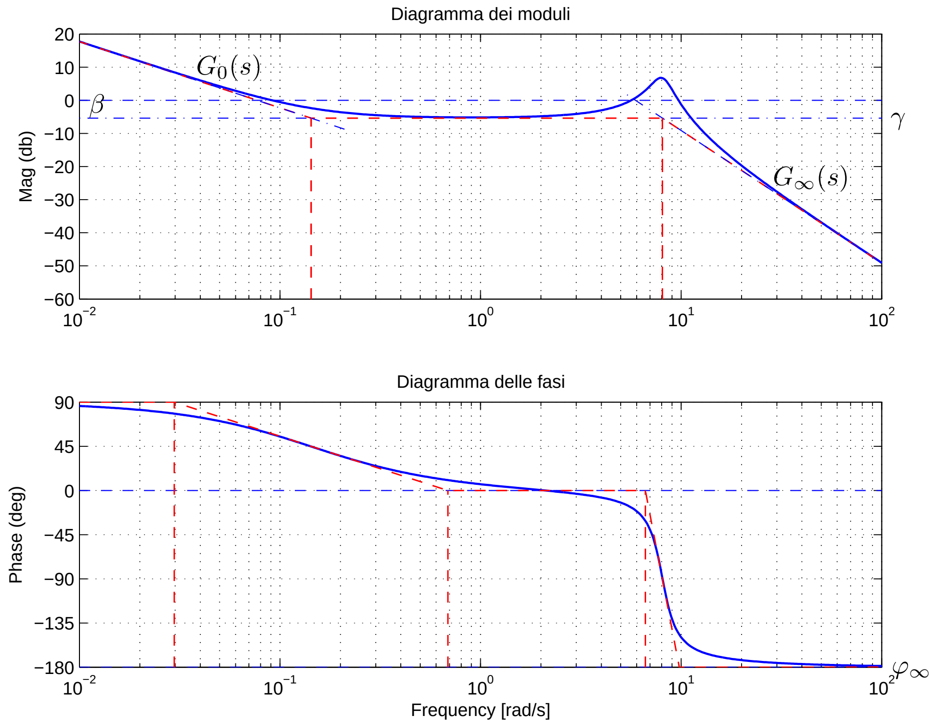


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

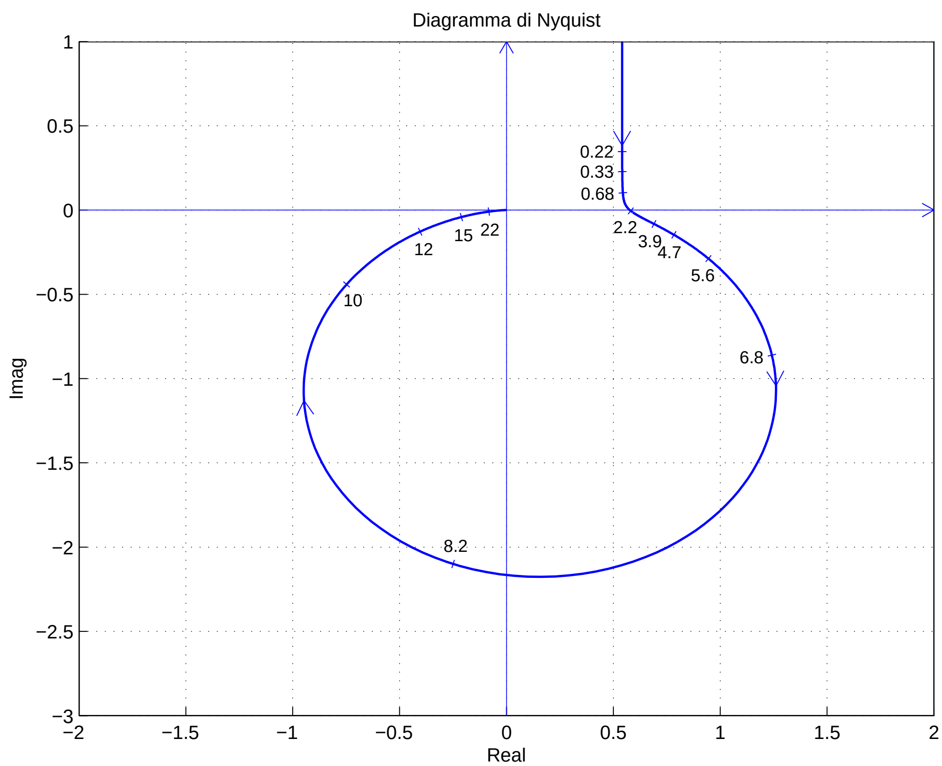


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\pi$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\pi$ in quanto la somma Δ_p delle pulsazioni critiche del sistema è positiva:

$$\Delta_p = \frac{1}{7} + 2 = 2.14 > 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{-1.733} = 0.577$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 2.08$.

d.4) Calcolare, in funzione di K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ in presenza del segnale di ingresso $r(t) = 2$ e del segnale di disturbo $d(t) = 3$.

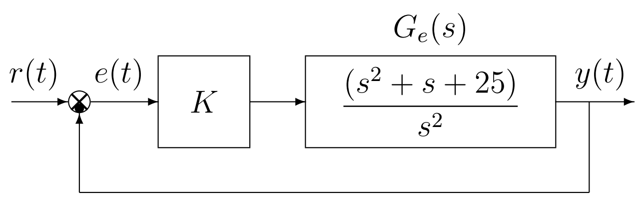
Soluzione: Il sistema $G(s)$ è tipo 1 per cui segnale di ingresso $r(t) = 2$ non ha nessuna influenza sull'errore a regime $e(t)$. La funzione di trasferimento che lega il segnale di disturbo $d(t) = 3$ all'errore a regime $e(t)$ è la seguente:

$$G_d(s) = \frac{-G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{-5\,(7s-1)}{s(s^2+2\,s+65) + 5\,K\,(7s-1)}.$$

L'errore a regime richiesto non è altro che il prodotto fra l'ampiezza $d(t) = 3$ del disturbo e il guadagno statico $G_{d0} = G_d(0)$ del sistema $G_d(s)$:

$$e(\infty) = -3\,G_{d0} = -\frac{3}{K}.$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s^2+s+25)}{s^2} = 0 \qquad \to \qquad (K+1)s^2 + Ks + 25K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & (K+1) & 25K \\ 1 & K & \\ 0 & 25K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile quando tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno: a) segno positivo:

$$\begin{cases} (1+K) > 0 \\ K > 0 \\ 25K > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad K > 0$$

b) segno negativo:

$$\begin{cases} (1+K) < 0 \\ K < 0 \\ 25K < 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad K < -1$$

Il sistema retroazionato è quindi stabile per:

$$(K < -1 = K^*) \cup (K > 0)$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.
Soluzione.
I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

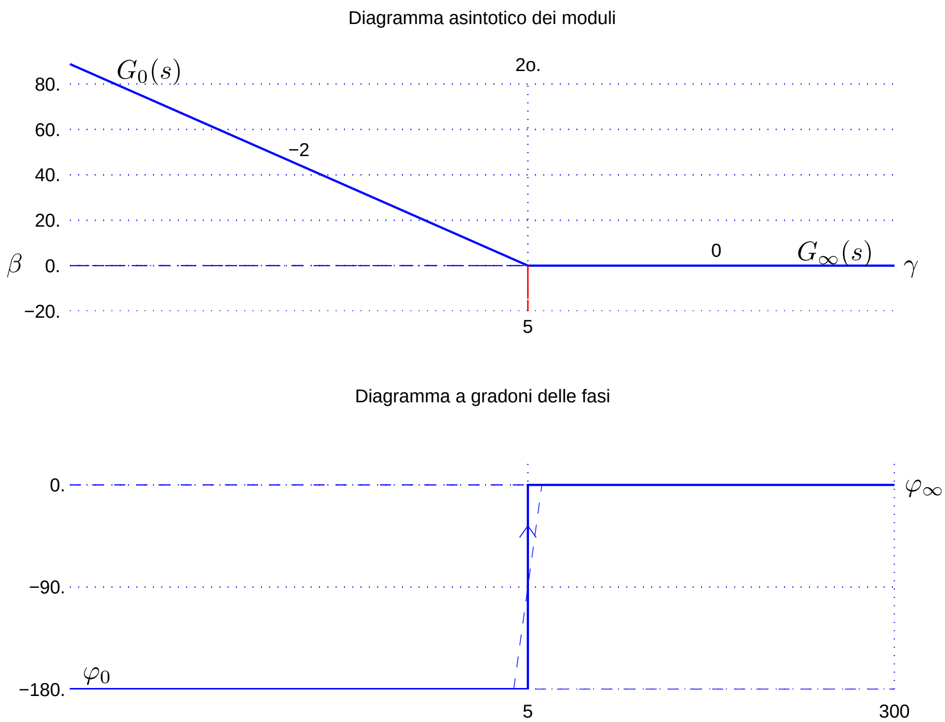


Figura 4: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

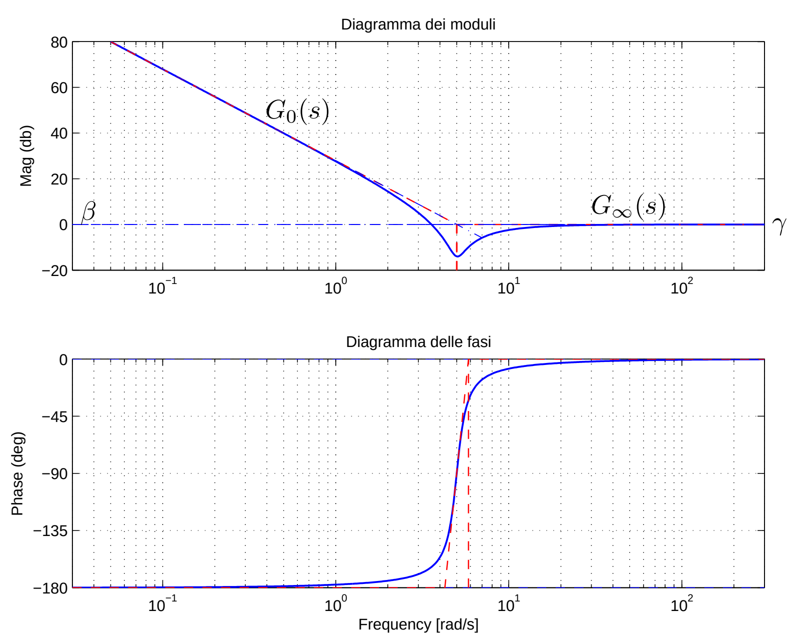


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2} = \frac{25}{s^2}, \qquad\qquad G_\infty(s) = 1$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = 0.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 5$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 5$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=5} = 1 = 0 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=5} = 1 = 0 \text{ db}.$$

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale e le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale

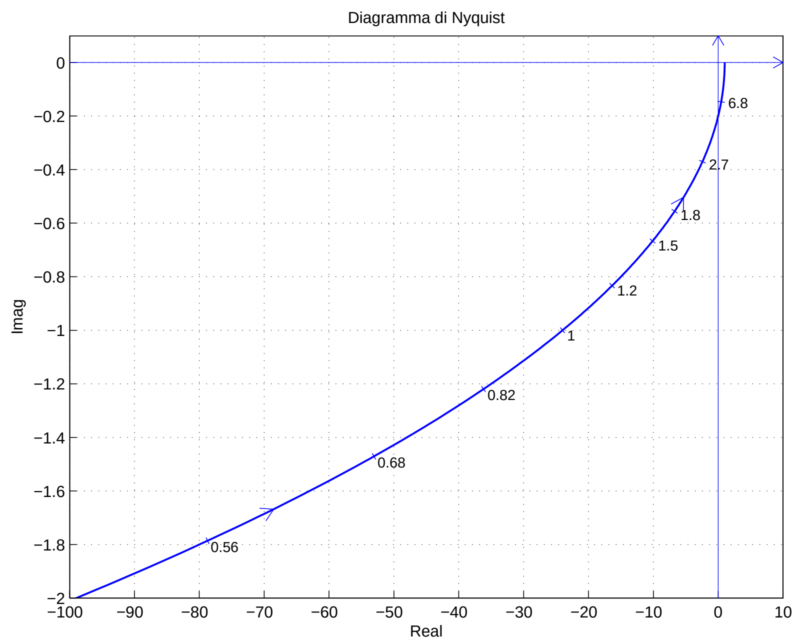


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticiop rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta\tau = \frac{1}{25} = 0.04 > 0.$$

Il sistema é di tipo 2 per cui non esiste nessun un asintoto. La variazione di fase

$$\Delta\varphi = \pi$$

indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di π in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = 0$. Esiste una sola intersezione σ^* con l'asse reale:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = 1$$

e.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $|e_a| = 0.01$ per ingresso a parabola $x(t) = 4\,t^2$.

Soluzione. In questo caso l'errore a regime per ingresso a parabola $x(t) = 4\,t^2 = \frac{R_0}{2}\,t^2$ è:

$$|e_a| = \frac{R_0}{|K_a|} = \frac{8}{25K} = 0.01 \qquad\qquad \to \qquad\qquad K = 32.$$

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

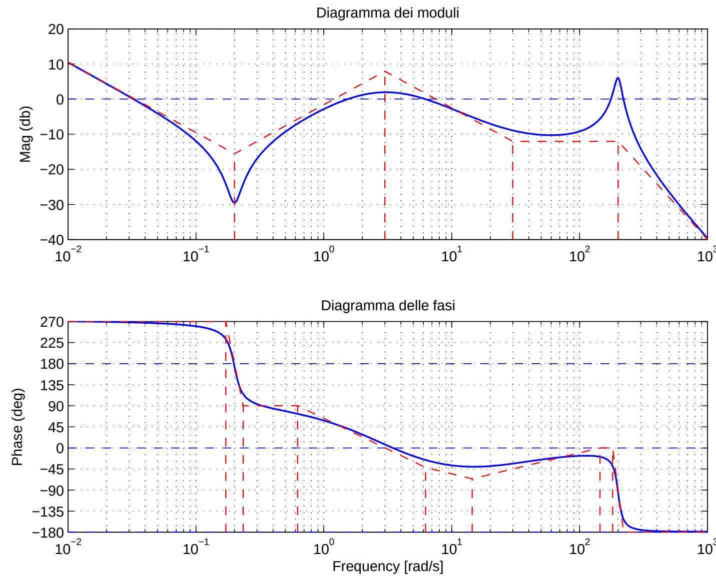
f.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{10000(s^2 - 0.04s + 0.2^2)(s+30)}{s(s+3)^2(s^2+25s+200^2)}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

f.2) Calcolare la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 4\,\cos(0.2\,t - \tfrac{\pi}{4}).$$



La risposta a regime del sistema $G(s)$ al segnale dato è la seguente:

$$y_\infty(t) = 4\,|G(0.2\,j)|\,\cos(0.2\,t - \tfrac{\pi}{4} + \arg G(0.2\,j)) \simeq 0.1265\,\cos(0.2\,t - \tfrac{\pi}{4} - 180^\circ).$$

Infatti si ha che $G(0.2j) \simeq 0.0316\,e^{-180^\circ j}$.

f.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{10000(s^2 - 0.04s + 0.2^2)(s+30)}{s(s+3)^2(s^2+25s+200^2)}.$$

Il valore $K = 10000$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 200$:

$$|G_\infty(s)|_{s=200\,j} = \left|\frac{K}{s^2}\right|_{200\,j} = \frac{K}{200^2} = \gamma \simeq -12 \text{ db} \simeq 0.25 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 10000.$$

Il coefficiente di smorzamento δ_1 della coppia di zeri complessi coniugati instabili è il seguente:

$$\delta_1 = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 14$ db $= 4$ si legge dal diagramma dei moduli in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.2$.

Il coefficiente di smorzamento δ_2 della coppia di poli complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta_2 = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{16} = 0.0625.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 18$ db $= 8$ si legge dal diagramma dei moduli in corrispondenza della pulsazione $\omega = 200$.

Controlli Automatici - Prima parte

19 Giugno 2017 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente l'equazione differenziale:

$$\dddot{y} + 2\ddot{y} + \alpha\,\dot{y} + 4\,y = \ddot{x} + 5\,\dot{x} + 3\,x \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 5\,s + 3}{s^3 + 2s^2 + \alpha\,s + 4} X_1(s)$$

Applicando il criterio di Routh, dire per quali valori del parametro α il sistema $G(s)$ è stabile:

$$\alpha > 0$$

Infatti, applicando il criterio di Routh al denominatore della funzione $G(s)$

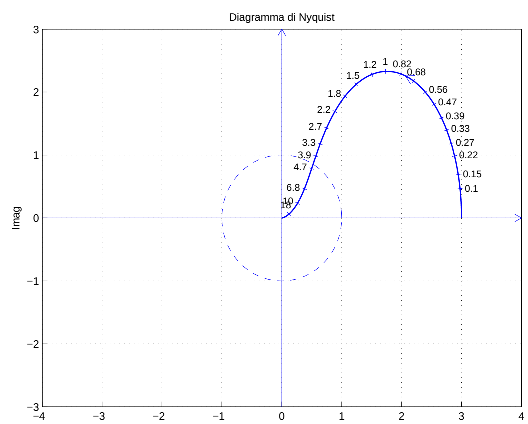
$$s^3 + 2s^2 + \alpha\,s + 4 = 0$$

si ottiene la seguente tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & \alpha \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2\alpha - 4 & \\ 0 & 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \rightarrow \quad 3 > 0 \\ \rightarrow \quad 2 > 0 \\ \rightarrow \quad \alpha > 2 \\ \rightarrow \quad 4 > 0 \end{array}$$

Il sistema $G(s)$ risulta quindi stabile per $\alpha > 2$.

2. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{50(s+0.6)}{(1-s)(s+1)(s+10)}$. Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

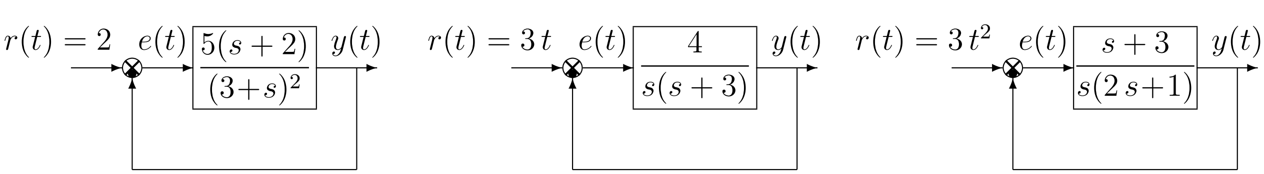


⊗ $(K < K^*,\ K^* < 0)$;
○ $(K^* < K < 0)$;
○ $(0 < K < K^*)$;
○ $(K > K^*,\ K^* > 0)$;

Calcolare il valore limite K^*:

$$K > K^* = -\frac{1}{3} = -0.333$$

3. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



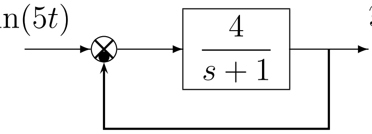
$$e(\infty) = \frac{18}{9+10} = \frac{18}{19} = 0.95 \qquad e(\infty) = \frac{9}{4} = 2.25 \qquad e(\infty) = \infty$$

4. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $\ddot{y}(t) + 9\,y(t) = 0$ partendo dalle condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 0$. Si ricorda che vale la regola: $\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2 F(s) - f(0)\,s - \dot{f}(0)$.

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+9} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = \cos(3\,t)$$

5. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del seguente sistema retroazionato quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$x(t) = 10 + 25\sin(5t)$ $\qquad$ $y(t) \simeq 8 + \frac{20}{\sqrt{2}}\sin(5t - 45°)$



Infatti, la funzione di trasferimento $G_0(s)$ del sistema retroazionato è la seguente:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{4}{s+5} \qquad \rightarrow \qquad G_0(0) = \frac{4}{5}, \qquad G_0(s)|_{s=5j} = \frac{4}{5j+5} = \frac{4\,e^{-j\frac{\pi}{4}}}{5\sqrt{2}}$$

L'andamento temporale dell'uscita si calcola nel seguente modo:

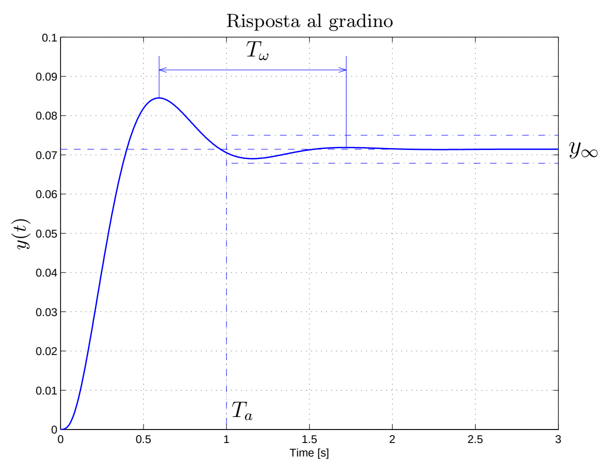
$$y(t) \simeq 10\frac{4}{5} + 25\frac{4}{5\sqrt{2}}\sin(5t - \frac{\pi}{4}) = 8 + \frac{20}{\sqrt{2}}\sin(5t - 45°)$$

6. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{2000(20 + 0.3s)(s^2 + 60s + 90^2)}{(3s + 210)(2s + 150)(s^2 + 6s + 40)(s^2 + 80s + 3600)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$y_\infty = 0.071429, \qquad T_a \simeq 1\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq 1.1285\,\text{s}.$



7. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione $p_{1,2}$ e il grado di molteplicitá ν della coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ corrispondente all'andamento temporale $g_1(t) = 3\,t\,e^{2\,t}\cos(5\,t + 4)$:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = 2 \pm j\,5 \qquad\qquad \nu = 2$$

8. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{5\,(s^2 + 1)}{(s + 2)^2(3\,s + 1)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = \frac{5}{3} \qquad\qquad y_\infty = 0$$

9. Un ritardo puro $G(s) = e^{-t_0 s}$:

⊗ è un sistema dinamico $\qquad$ ⊗ è un sistema lineare $\qquad$ ○ è un sistema a fase minima

10. Sia $X(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $x(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della derivata":

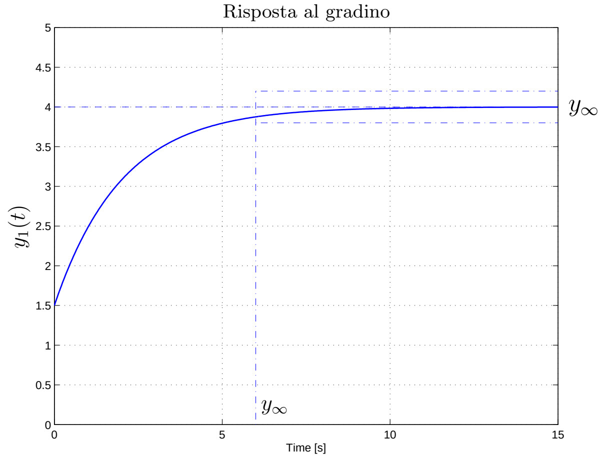
$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s\,X(s) - x(0)$$

11. Utilizzando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{3\,s + 4}{2\,s + 1}$$

Calcolare il valore iniziale y_0, il valore finale y_∞ e il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$:

$$y_0 = 1.5, \qquad y_\infty \simeq 4\,\mathrm{s}, \qquad T_a \simeq 6\,\mathrm{s}.$$



12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(3s+1)}{s(s-5)^2}\,e^{-3s} \qquad \to \qquad \begin{cases} M(\omega) = & \dfrac{\sqrt{9\omega^2+1}}{\omega(\omega^2+5^2)} \\ \varphi(\omega) = & -\dfrac{\pi}{2} - 3\,\omega + \arctan 3\omega - 2(\pi - \arctan\dfrac{\omega}{5}) \end{cases}$$