Controlli Automatici - Prima parte
19 Giugno 2014 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [t^2 + \cos(5t)]\, e^{-2\,t}, \qquad x_2(t) = 2\,t^4 + 5\,\delta(t-3)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2}{(s+2)^3} + \frac{(s+2)}{(s+2)^2+25}, \qquad X_2(s) = \frac{48}{s^5} + 5\,e^{-3\,s}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G(s)$:

$$G_1(s) = 2 + \frac{6}{s(s+1)(s+3)}, \qquad G_2(s) = \frac{10\,e^{-3\,s}}{s^2+25}$$

Soluzione:

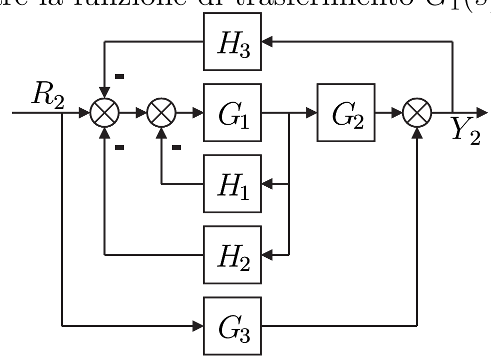
$$g_1(t) = 2\,\delta(t) + 2 - 3\,e^{-t} + e^{-3\,t}, \qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ 2\,\sin(5(t-3)) & t \geq 3 \end{cases}$$

Infatti, per la seconda parte della funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}[G_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s(s+1)(s+3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{3}{(s+1)} + \frac{1}{(s+3)}\right] = 2 - 3\,e^{-t} + e^{-3\,t}.$$

b) Dato lo schema a blocchi riportato in figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s)$:

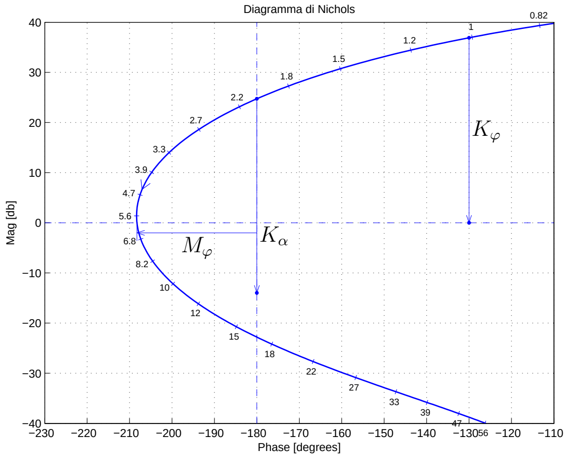
$$G_1(s) = \frac{Y_2(s)}{R_2(s)} = \frac{G_1G_2 + G_3(1 + G_1H_1 + G_1H_2)}{1 + G_1H_1 + G_1H_2 + G_1G_2H_3}$$



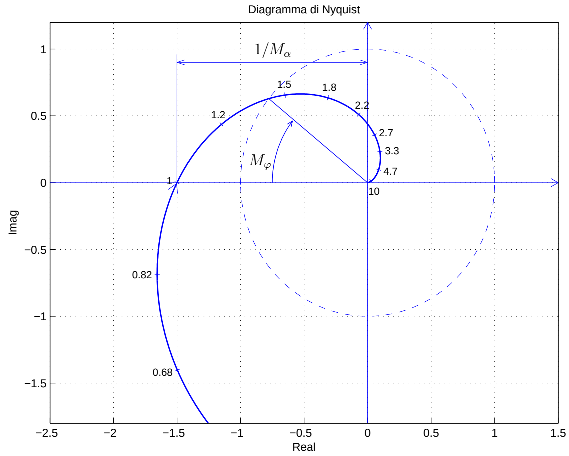
c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:
c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;
c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\, G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50°$;
c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\, G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



c.1) $\quad M_a = -24.71 \text{ db } = 0.0581$

c.2) $\quad M_\varphi = -28.25°$

c.3) $\quad K_\varphi = -36.89 \text{ db } = 0.014$

c.4) $\quad K_\alpha = -38.71 \text{ db } = 0.0116$

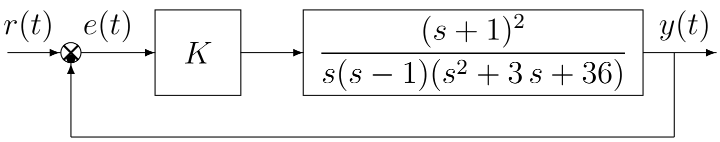
c.1) $\quad M_a = \frac{1}{1.5} = 0.6667$

c.2) $\quad M_\varphi = -38.94°$

c.3) $\quad K_\varphi \simeq 0.5$

c.4) $\quad K_\alpha = \frac{0.2}{1.5} = 0.1333$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K\,(s+1)^2}{s(s-1)(s^2+3\,s+36)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s(s-1)(s^2+3\,s+36) + K\,(s+1)^2 = 0$$

$$s^4 + 2\,s^3 + (33+K)s^2 + (2\,K-36)\,s + K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & (33+K) & K \\
3 & 2 & (2\,K-36) & \\
2 & 102 & 2\,K & \\
1 & 102(2\,K-36) - 4\,K & & \\
0 & 2\,K & &
\end{array}$$

Dalle ultime die righe dellla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$200\,K - 3672 > 0, \qquad\qquad K > 0.$$

Ne segue che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > \frac{3672}{200} = 18.36 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{2\,K^*}{102}} = \sqrt{\frac{2\,K^* - 36}{2}} = 0.6$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

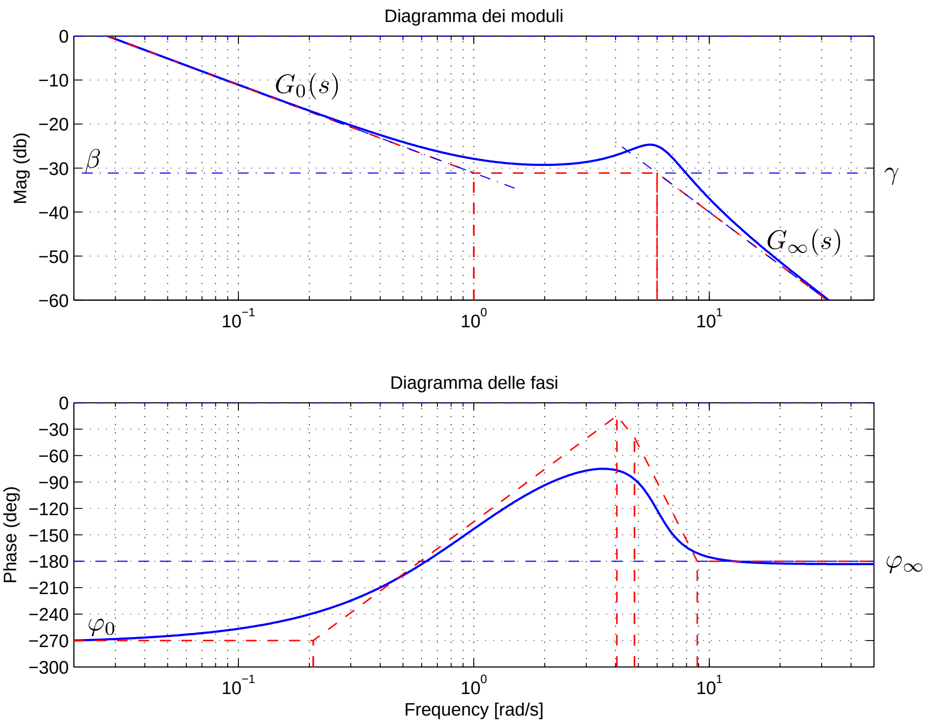


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = -\frac{1}{36\, s} = -\frac{0.0278}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi \equiv \frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 6$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = \frac{1}{36} = -31.13 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=6} = \frac{1}{36} = -31.13 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati stabili è $\delta = 3/(2\omega_n) = 0.25$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 2.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a φ_0 in quanto il parametro Δ_τ è positivo:

$$\Delta_\tau = 3 - \frac{1}{12} = 2.917 > 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = -\frac{1}{36} \cdot 2.917 = -0.0810.$$

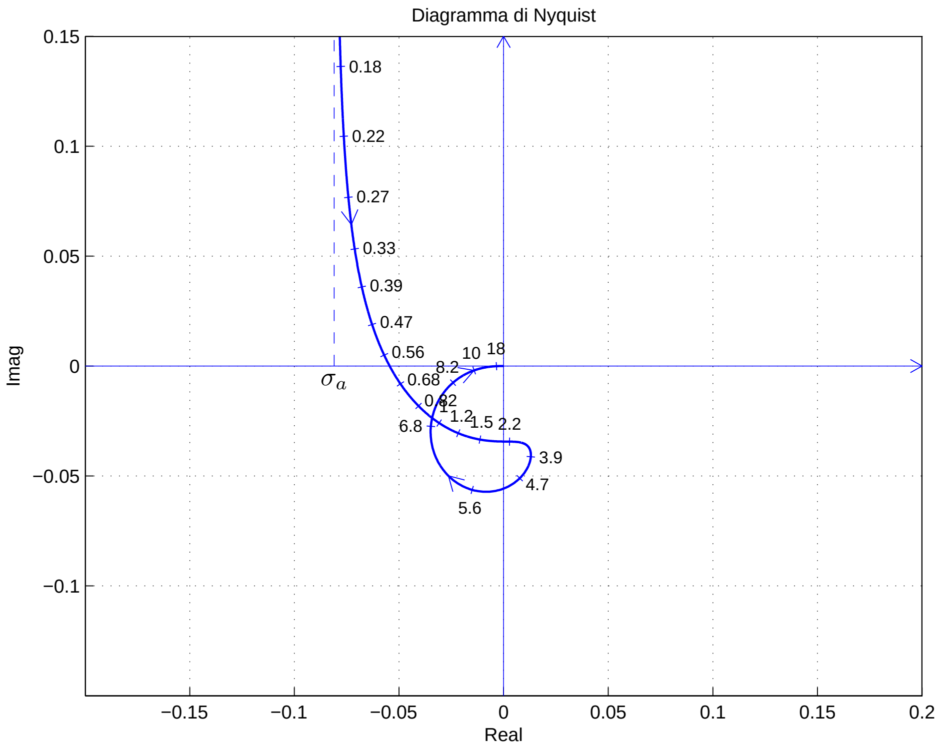


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta_\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\pi$. In questo caso il parametro Δ_p è nullo:

$$\Delta_p = \sum_{i=1}^{m} z_i - \sum_{i=1}^{n} p_i - = -2 - (1-3) = 0$$

per cui non fornisce informazioni utili per determinare il comportamento locale della fase della funzione $G(s)$ quando $\omega \to \infty$. Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.0545$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 0.6$.

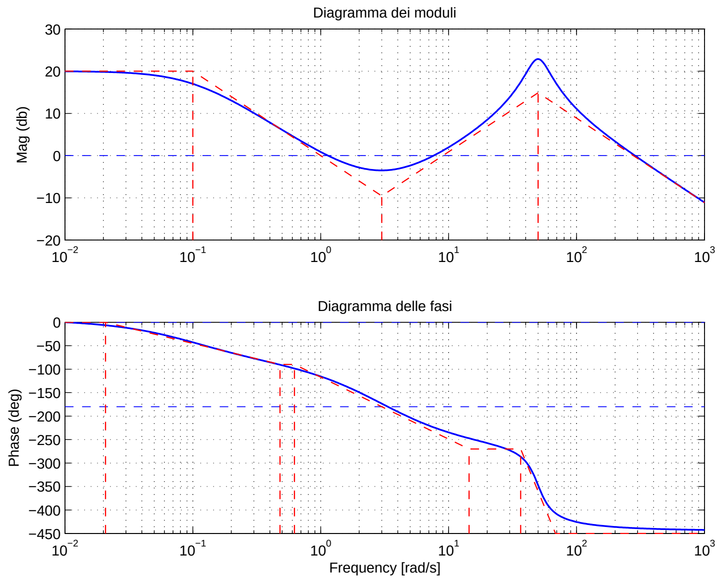
d.4) Calcolare in funzione di K l'errore a regime e_v del sistema retroazionato per ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

Soluzione. L'errore a regime e_v del sistema retroazionato per ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$ è

$$e_v = \frac{R_0}{K_v} = \frac{3}{-\frac{K}{36}} = -\frac{108}{K}.$$

e) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

e.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.



$$G(s) = \frac{277.8(s-3)^2}{(s+0.1)(s^2+20s+2500)}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

e.2) Calcolare la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 2\,\sin(0.3\,t + \tfrac{\pi}{6}).$$

$$y(t) = 6.38\,\sin(0.3\,t + \tfrac{\pi}{6} - 83.12^\circ)$$

e.3) Calcolare l'errore a regime e_p del sistema retroazionato quando in ingresso è presente un gradino di ampiezza $R_0 = 10$:

$$e_p = \frac{10}{1+K_p} = \frac{10}{1+10} = 0.9091.$$

<u>Soluzione</u>:

e.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{277.8(s-3)^2}{(s+0.1)(s^2+20s+2500)}.$$

Il valore $K = 277.8$ si determina, per esempio, calcolando il guadagno statico del sistema $G(s)$:

$$|G_\infty(s)|_{s=0} = \frac{9\,K}{250} = 20 \text{ db} = 10 \qquad \to \qquad K = \frac{2500}{9} \simeq 277.8.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

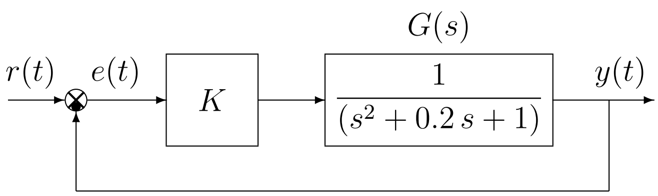
La distanza $M_{\omega_n} \simeq 8$ db $= 2.5$ di legge dal diagramma di Bode dei moduli.

e.2) La risposta a regime del sistema $G(s)$ al segnale dato è la seguente:

$$y_\infty(t) = 2\,|G(0.3\,j)|\,\sin(0.3\,t + \tfrac{\pi}{6} + \arg G(0.3\,j)) = 6.38\,\sin(0.3\,t + \tfrac{\pi}{6} - 83.12^\circ).$$

Infatti si ha che $G(0.3j) \simeq 3.19\,e^{-1.45j} = 3.19\,e^{-83.12^\circ j}$.

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1+\frac{K}{(s^2+0.2\,s+1)}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^2+0.2\,s+1+K=0.$$

Il sistema retroazionato è stabile se quando i tre coefficienti dell'equazione caratteristica hanno lo stesso segno:

$$K+1>0 \qquad \Rightarrow \qquad K>-1.$$

f.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 3. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

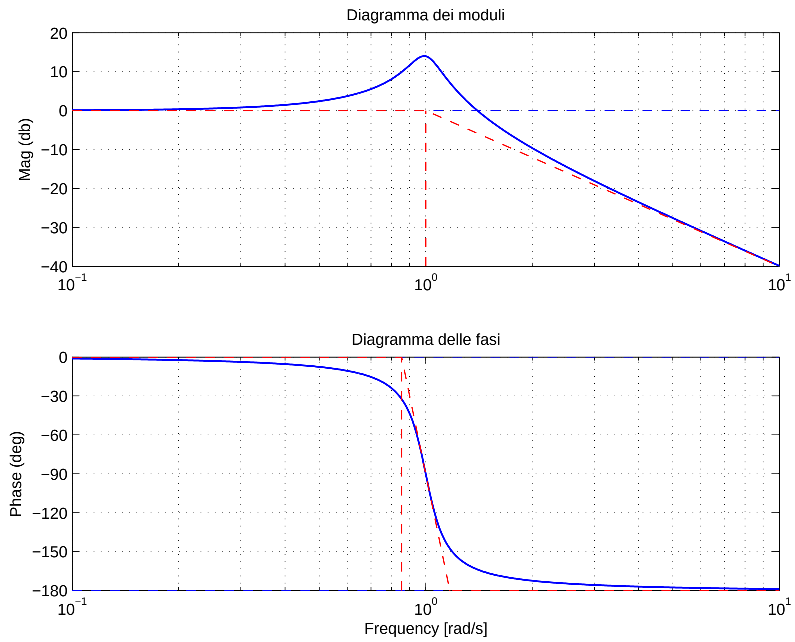


Figura 3: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

$$G_0(s)=1, \qquad\qquad G_\infty(s)=\frac{1}{s^2}$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0=0, \qquad\qquad \varphi_\infty=-\pi.$$

f.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 4. Il sistema é di tipo 0 per cui non esiste nessun asintoto. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0=0$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta\tau=-0.2<0.$$

La variazione di fase $\Delta\varphi=-\pi$ indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di π in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty=-\pi$.

f.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $e_p=0.01$ per ingresso a gradino unitario.

Soluzione. In questo caso errore a regime per ingresso a gradino unitario è:

$$e_p=\frac{R_0}{1+K_p}=\frac{1}{1+K}=0.01 \qquad \rightarrow \qquad K=99.$$

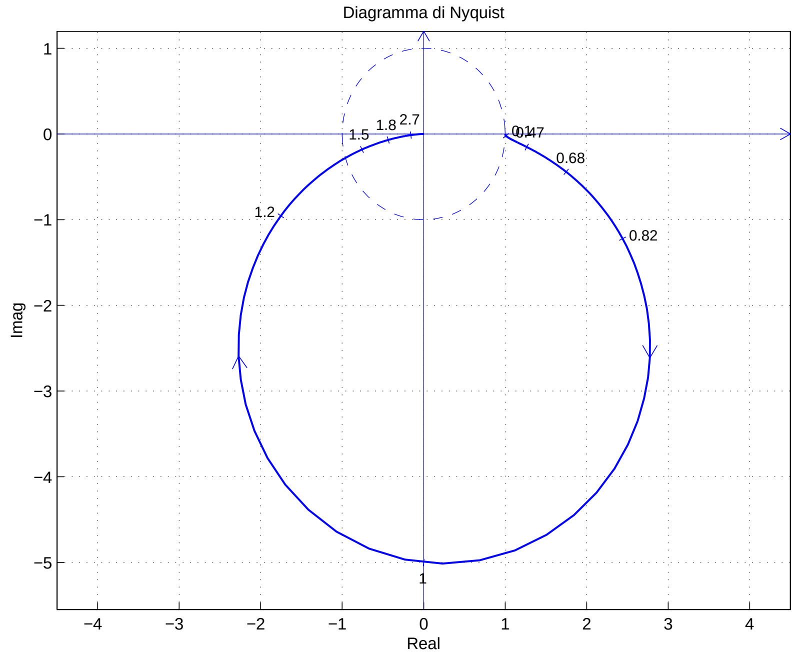


Figura 4: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Controlli Automatici - Prima parte

19 Giugno 2014 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$2\dddot{y}(t) + 3\,\ddot{y}(t) + 5\,\dot{y}(t) + y(t) = 6\,\ddot{x}(t) + 7\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{6\,s^2 + 7}{2\,s^3 + 3\,s^2 + 5\,s + 1}$$

2. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{3\,(2\,s-1)(s+1)}{s(s+2)(3\,s+20)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = 2 \qquad\qquad y_\infty = -\frac{3}{40} = -0.075$$

3. Completare la seguente formulazione del criterio di Nyquist (quella valida anche per sistemi instabili ad anello aperto).

<u>*Criterio di Nyquist.*</u> *Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$...*

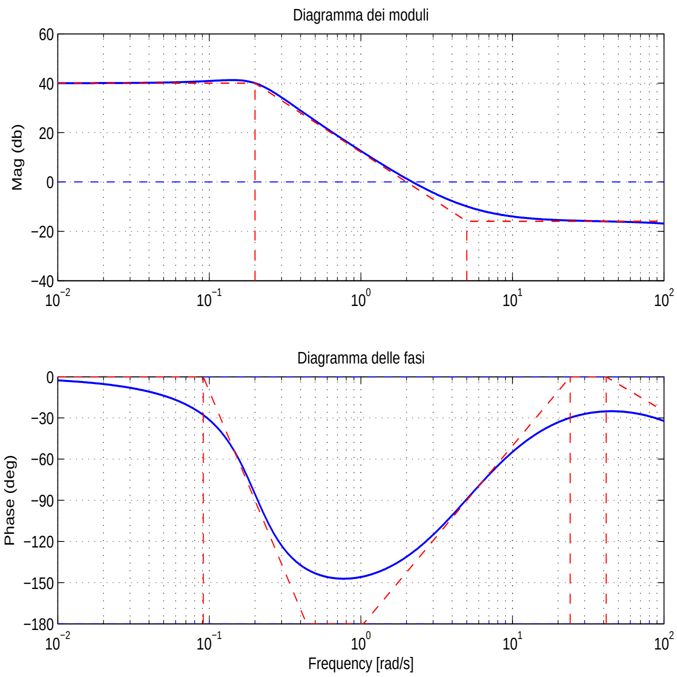
non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio,

condizione ◯ *solo necessaria* ◯ *solo sufficiente* ⊗ *necessaria e sufficiente*

affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che: ...

il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.

4. In figura sono mostrati i diagrammi di Bode di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione del grafico, calcolare:



a) la posizione dei poli dominanti $p_{1,2}$ del sistema $G(s)$:

$$p_{1,2} \simeq -0.1 \pm 0.1732\,j$$

b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino del sistema $G(s)$:

$$T_a \simeq \frac{3}{0.1}\ \text{s} = 30\ \text{s}.$$

c) il margine di fase del sistema $G(s)$:

$$M_\varphi = 51.9^\circ$$

d) l'errore a regime del sistema retroazionato per ingresso a gradino unitario:

$$e_p \simeq \frac{R_0}{1+G(0)} = \frac{1}{101} \simeq 0.01$$

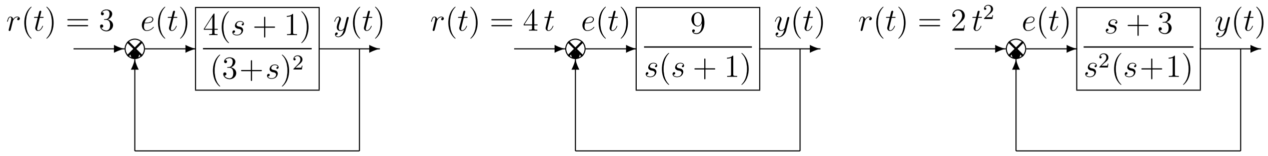
5. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $f(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della traslazione in s":

$$\mathcal{L}[e^{-\mathbf{a}t} f(t)] = F(s + \mathbf{a})$$

6. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $\ddot{y}(t)+y(t) = 0$ partendo dalle condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 1$. Si ricorda che vale la regola: $\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2F(s) - f(0)\,s - \dot{f}(0)$.

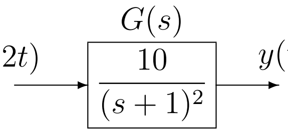
$$s^2Y(s) - 1 + Y(s) = 0 \qquad \rightarrow \qquad Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = \sin(t)$$

7. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{3}{1+\frac{4}{9}} = \frac{27}{13} = 2.08 \qquad e(\infty) = \frac{4}{9} = 0.444 \qquad e(\infty) = \frac{4}{3} = 1.333$$

8. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:



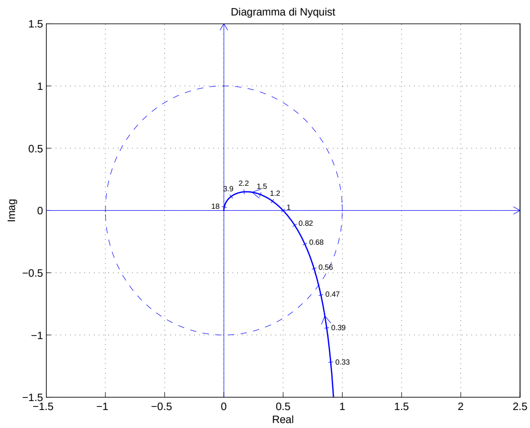
$$y(t) \simeq \tfrac{30}{5}\cos(2t - 2\arctan 2) = 6\cos(2t - 126.8^\circ)$$

9. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{0.5(s+1)}{s(1-s)}$.
Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

- ◯ $0 < K < \alpha^* < \infty$;
- ◯ $0 < \alpha^* < K < \infty$;
- ◯ $-\infty < \alpha^* < K < 0$;
- ⊗ $-\infty < K < \alpha^* < 0$;

Calcolare (se esiste) il valore di α^*:

$$\alpha^* \simeq -2$$

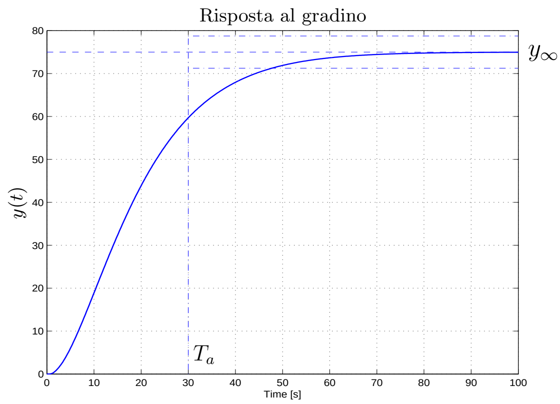


10. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{100(3+0.2s)(s^2+15s+60^2)}{(2s+16)(\mathbf{10s+1})^{\mathbf{2}}(s^2+2s+9)(s^2+6s+100)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 75, \qquad T_a \simeq \frac{3}{0.1} = 30\,\text{s}, \quad T_\omega \simeq \nexists.$$



11. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s+2)}{s(3\,s-1)^2}\,e^{-3\,s} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2+4}}{\omega(1+9\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = \arctan\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2} - 2(\pi - \arctan 3\omega) - 3\,\omega \end{cases}$$