Controlli Automatici - Prima parte
19 Giugno 2013 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = (4 + e^{-5\,t})\,t^3, \qquad\qquad x_2(t) = 2 + e^{3\,t}\sin(5\,t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{24}{s^4} + \frac{6}{(s+5)^4}, \qquad\qquad X_2(s) = \frac{2}{s} + \frac{5}{(s-3)^2 + 5^2}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}, \qquad\qquad G_2(s) = 5\,e^{-2\,s} + \frac{2\,s}{s^2+9}$$

Soluzione:

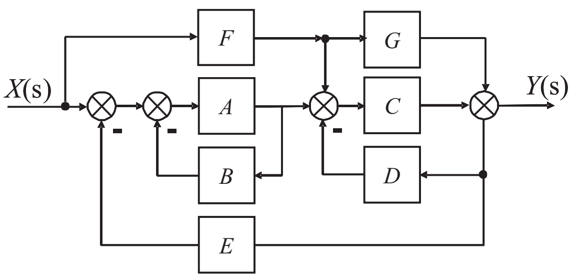
$$g_1(t) = -1 + t + e^{-t}, \qquad\qquad g_2(t) = 5\,\delta(t-2) + 2\,\cos(3\,t)$$

Infatti, per la funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{(s+1)}\right] = -1 + t + e^{-t}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G(s) = \frac{A\,C + F\,(C+G)\,(1+A\,B\,)}{1 + A\,B + C\,D + A\,C\,E + A\,B\,C\,D}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

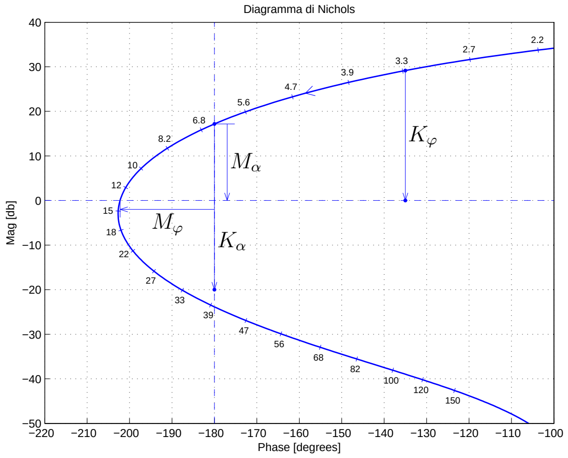
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45$;

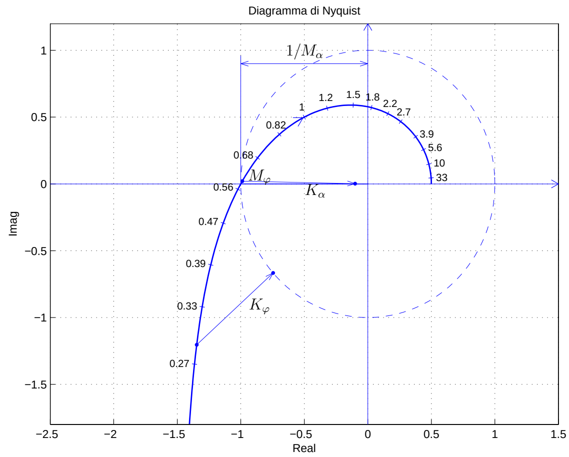
c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 10$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = -17.17$ db $= 0.139$

c.2) $M_\varphi = -22.23°$

c.3) $K_\varphi = -29.15$ db $= 0.0348$

c.4) $K_\alpha = -37.17$ db $= 0.0139$

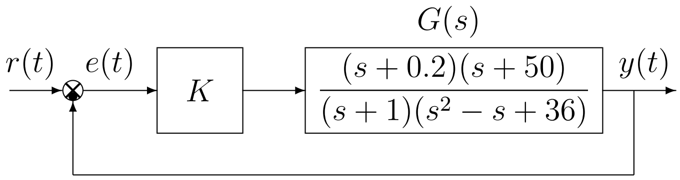
c.1) $M_a = 1$

c.2) $M_\varphi = 0°$

c.3) $K_\varphi = 0.553$

c.4) $K_\alpha = 0.101$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K\,(s+0.2)(s+50)}{(s+1)(s^2-s+36)} = 0 \quad \rightarrow \quad (s+1)(s^2-s+36) + K\,(s+0.2)(s+50) = 0$$

$$s^3 + K\,s^2 + (35 + 50.2\,K)\,s + 36 + 10\,K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (35+50.2\,K) \\ 2 & K & 36+10\,K \\ 1 & K(35+50.2\,K) - 36 - 10\,K & \\ 0 & 36+10\,K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad 50.2\,K^2 + 25\,K - 36 > 0, \qquad 36 + 10\,K > 0.$$

dai quali si ricava:

$$K > 0, \qquad (K < -1.1317) \cup (K > 0.6337), \qquad K > -3.6.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 0.6337 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{(35 + 50.2\,K)} = 8.1738.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

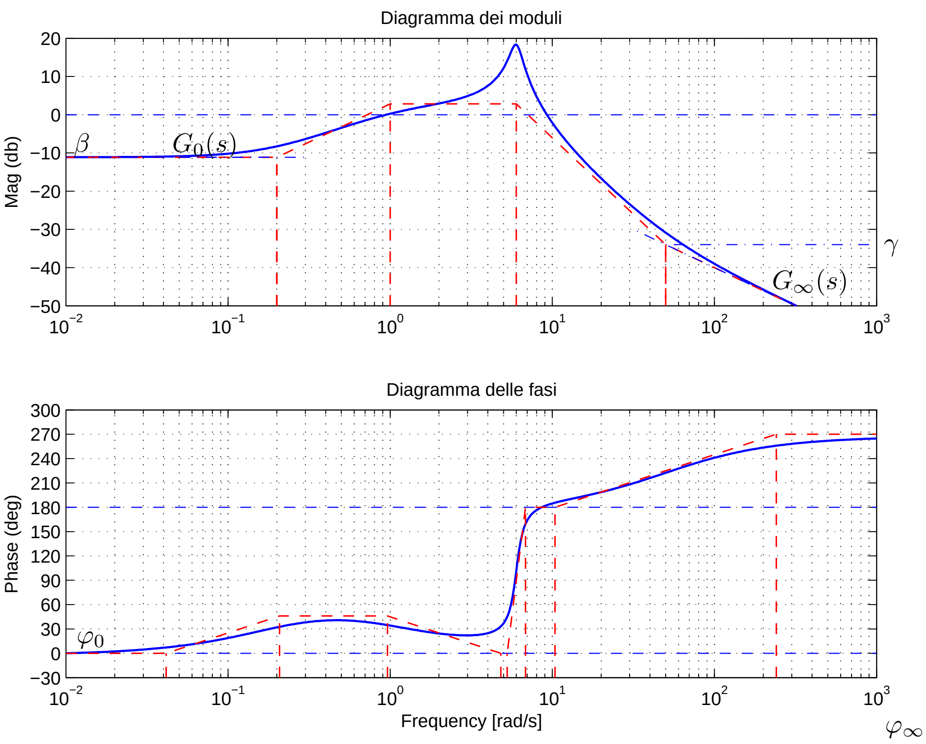


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{10}{36} = 0.2778, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 50$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0} = \frac{10}{36} = -11.13 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=50} = \frac{1}{50} = -34 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli instabili è $\delta = 1/(2\omega_n) = 1/12 = 0.0833$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

<u>Soluzione</u>. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = 0$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 5 + \frac{1}{50} - 1 + \frac{1}{36} = 4.0611 > 0.$$

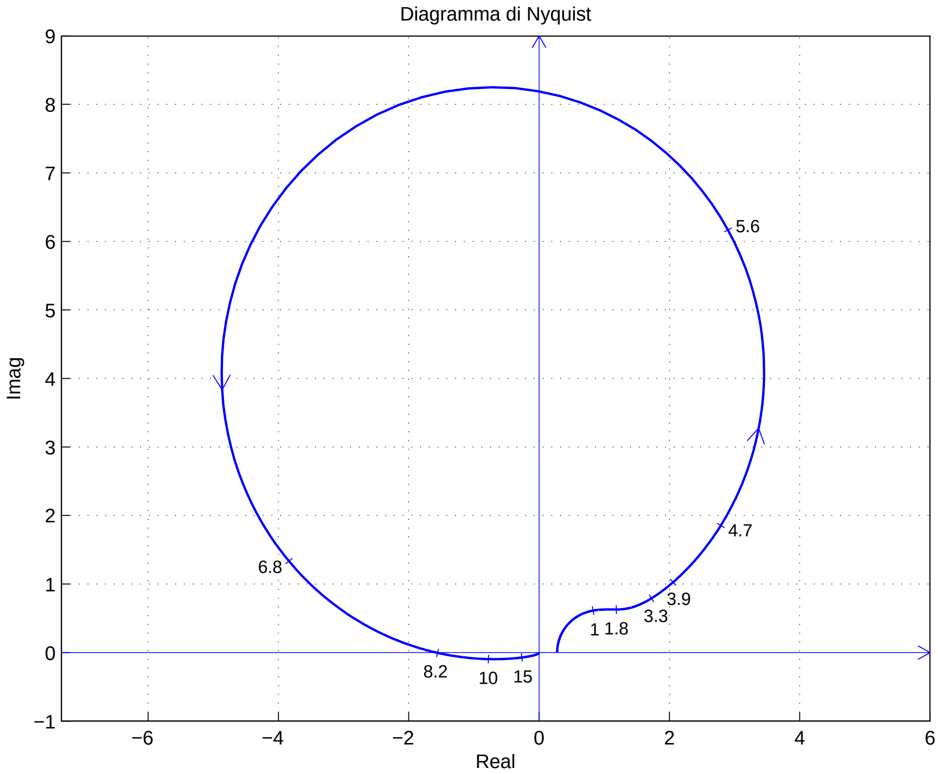


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 0 per cui non esiste nessun asintoto. La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta_\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = \frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p delle pulsazioni critiche del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -0.2 - 50 + 1 - 1 = -50.2 < 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -1.578$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 8.1738$.

e) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

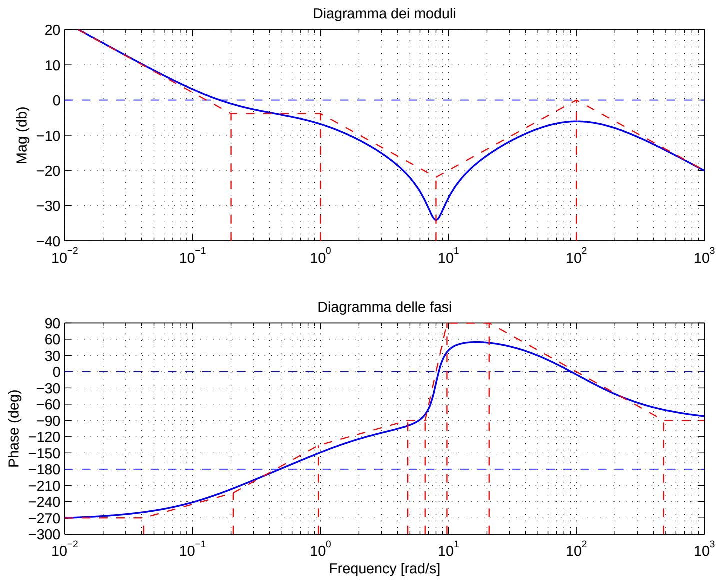
e.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{100(s+0.2)(s^2+2s+64)}{s(s-1)(s+100)^2}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

e.2) Calcolare gli approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ della funzione $G(s)$ per $\omega \simeq 0^+$ e per $\omega \simeq \infty$:

$$G_0(s) = -\frac{0.128}{s}, \qquad G_\infty(s) = \frac{100}{s}$$



Soluzione:

e.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{100(s+0.2)(s^2+2s+64)}{s(s-1)(s+100)^2}.$$

Il valore $K = 100$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100\,j} = \left|\frac{K}{s}\right|_{100\,j} = \frac{K}{100} = \gamma \simeq 0 \text{ db} \simeq 1 \qquad \to \qquad K \simeq 100.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 12$ db $= 4$ di legge dal diagramma di Bode dei moduli.

Gli approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ della funzione $G(s)$ per $\omega \simeq 0^+$ e per $\omega \simeq \infty$ di possono anche ricavare direttamente analizzando i diagrammi di Bode. Valgono infatti le seguenti espressioni:

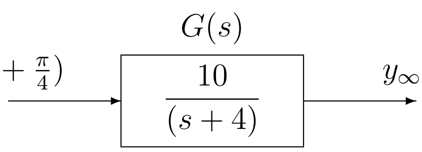
$$|G_0(s)| = \frac{\omega_0^h}{s^h}, \qquad |G_\infty(s)| = \frac{\omega_\infty^h}{s^r}$$

dove $h = 1$ ed $r = 1$ coincidono con le pendenze del primo e dell'ultimo tratto del diagramma asintotico di Bode dei moduli, mentre $\omega_0 = 0.128$ e $\omega_\infty = 100$ sono le pulsazioni alle quali il primo e l'ultimo tratto del diagramma asintotico di Bode intersecano l'asse a guadagno unitario. Il segno delle due funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ deve essere scelto in modo da coincidere con la fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$ e la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ che si leggono sul diagramma di Bode delle fasi. Nel caso in esame si ha quindi che:

$$G_0(s) = -\frac{0.128}{s}, \qquad G_\infty(s) = \frac{100}{s}.$$

f) Calcolare la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ sollecitato dall'ingresso $x(t)$:

$x(t) = 4 + 2\cos(3t + \frac{\pi}{4})$



$y_\infty(t) \simeq 10 + 4\cos(3t + \frac{\pi}{4} - \arctan(\frac{3}{4}))$

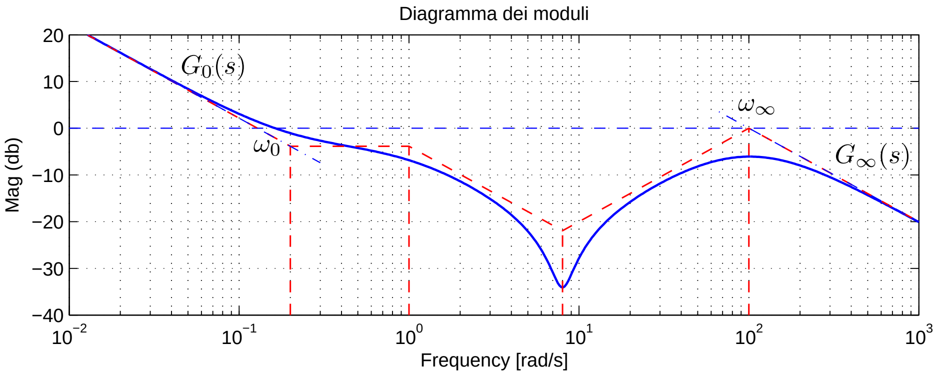


Figura 3: Approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ sul diagramma asintotico di Bode dei moduli.

Soluzione. La risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema si calcola facilmente utilizzando la funzione di risposta armonica $G(j\omega)$. Il valore della $G(j\omega)$ per $\omega = 0$ e per $\omega = 3$ è il seguente:

$$G(0) = \frac{10}{4}, \qquad G(3j) = \frac{10}{4+3j} = \frac{10}{\sqrt{16+9}} e^{-j\arctan(\frac{3}{4})} = 2\, e^{-j\arctan(\frac{3}{4})}$$

La risposta a regime $y_\infty(t)$ si ottiene nel seguente modo:

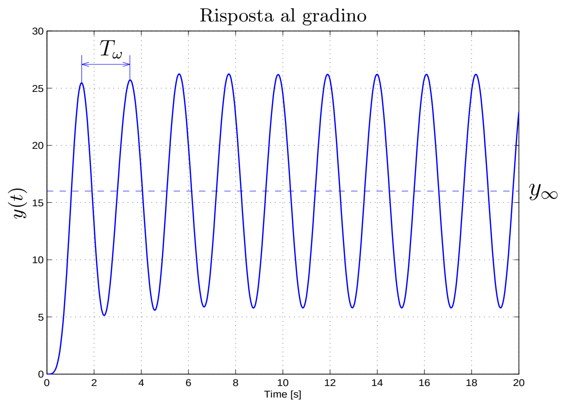
$$y_\infty(t) = 4\, G(0) + 2|G(3j)| \cos(3t + \tfrac{\pi}{4} + \arg G(3j)) = 10 + 4\, \cos(3t + \tfrac{\pi}{4} - \arctan \tfrac{3}{4})$$

g) Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{75\,(3+0.4\,s)(s^2+10\,s+16^2)}{(3\,s+4)(0.1\,s+2)^2(s^2+9)(s^2+s+25)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$y_\infty = 16, \qquad T_a \simeq \infty \;, \qquad T_\omega \simeq 2.0944\,\text{s}.$



Controlli Automatici - Prima parte

19 Giugno 2013 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$ e sia $f(0^-)$ il valore che la funzione $f(t)$ assume all'istante $t = 0^-$. Il teorema della trasformata della derivata generalizzata afferma che

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\,F(s) - f(0^-)$$

2. Scrivere le funzioni di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ corrispondente alla seguente equazione differenziale nelle variabili $x(t)$ e $y(t)$:

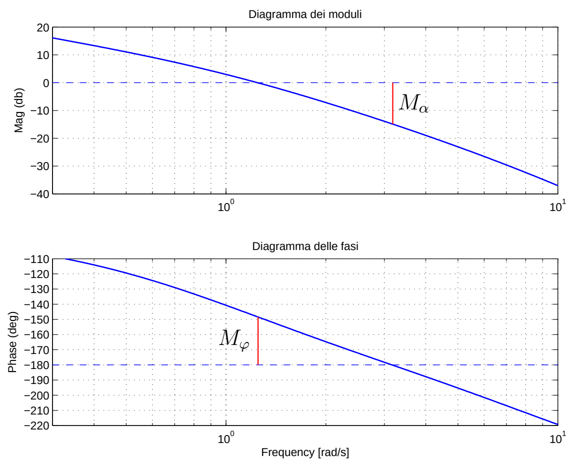
$$2\,\dddot{y} + 4\,\dot{y} + 3\,y = \ddot{x} + 5\,\dot{x} + 2x \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{s^2 + 5\,s + 2}{2\,s^3 + 4\,s + 3}$$

3. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco, relativi ad un sistema $G(s)$ a fase minima.

Leggere il margine di fase M_φ e il margine di ampiezza M_α del sistema $G(s)$:

$$M_\varphi \simeq 31.56 \text{ gradi}$$

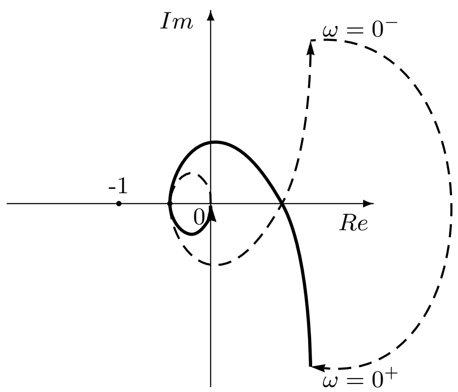
$$M_\alpha \simeq 5.565 = 14.9 \text{ db}$$



4. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con 1 polo nell'origine e tutti gli altri a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

- ⊗ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
- ○ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;
- ○ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;
- ○ $(K < 0,\ |K| << 1)$;



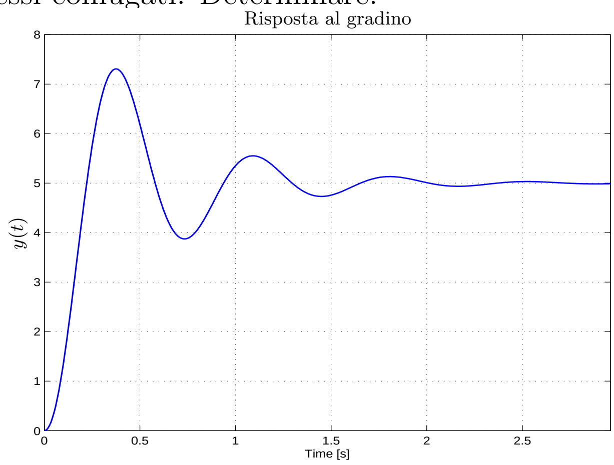
5. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ e il grado di molteplicità ν della coppia di poli complessi coniugati corrispondente all'andamento temporale $g_1(t) = 3\,t^2\,e^{5\,t}\sin(2\,t)$:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = 5 \pm j\,2 \qquad\qquad \nu = 3$$

6. Calcolare la posizione σ_a dell'asintoto verticale del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(3\,s - 2)(1 + 3\,s)}{s(s^3 + 2\,s^2 + 3\,s + 4)} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_a = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} + 3 - \frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{8} = -0.375$$

7. In figura è mostrata la risposta $y(t)$ al gradino $x(t) = 2$ di un sistema dinamico $G(s)$ a fase minima caratterizzato da 2 poli dominanti complessi coniugati. Determinare:



a) i poli dominanti del sistema:

$$p_{1,2} = -2 + j\,8.78$$

b) il guadagno statico del sistema:

$$G_0 = \frac{5}{2}$$

c) la pulsazione naturale ω_n del sistema:

$$\omega_n = 9 \ \ \text{rad/s}$$

8. Enunciare il criterio di Nyquist nella sua formulazione più generale valida anche per sistemi instabili ad anello aperto).

Criterio di Nyquist. *Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$ "non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio"*

condizione ○ *solo necessaria* ○ *solo sufficiente* ⊗ *necessaria e sufficiente*

affinché "il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ in senso antiorario tante volte quanti sono i poli della funzione $F(s)$ a parte reale positiva".

9. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $3\dot{y}(t) + 2\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 4$.
Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$3\,(s\,Y(s) - 4) + 2\,Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{4}{s + 0.667} \quad \rightarrow \quad y(t) = 4\,e^{-0.667\,t}.$$

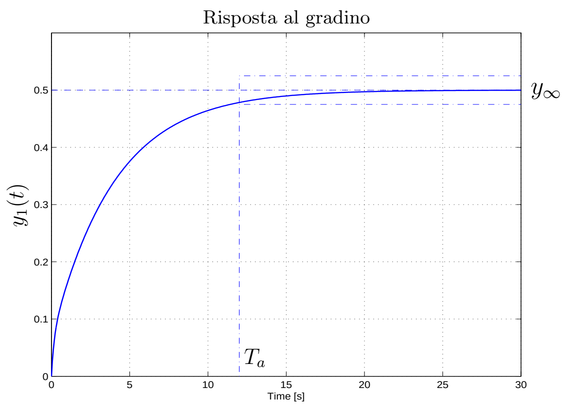
10. Sia $y(t) = M(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso sinusoidale $x(t) = N\cos(\omega t + \varphi_0)$. Fornire la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$ utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali $x(t)$ e $y(t)$:

$$F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\,e^{j\,\phi(\omega)}.$$

11. Utilizzando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta all'impulso del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{2\,s + 3}{s(4\,s + 1)(s + 6)}$$

Calcolare il valore iniziale y_0, il valore finale y_∞ e il tempo di assestamento T_a della risposta all'impulso $y_1(t)$:



$$y_0 = 0, \qquad y_\infty \simeq 0.5, \qquad T_a \simeq 12\,\text{s}.$$

12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s-2)(3\,s+4)}{s(s+2)}\,e^{-5\,s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{16+9\omega^2}}{\omega} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan\frac{\omega}{2} + \arctan\frac{3\omega}{4} - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{2} - 5\,\omega \end{cases}$$