Controlli Automatici - Prima parte
18 Aprile 2016 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [t^3 + 2\cos(2t)]\, e^{-5\,t}, \qquad\qquad x_2(t) = 3\,\delta(t-2) + 2\,t^4$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6}{(s+5)^4} + \frac{2(s+5)}{(s+5)^2+4}, \qquad\qquad X_2(s) = 3\,e^{-2\,s} + \frac{48}{s^5}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G(s)$:

$$G_1(s) = 2 + \frac{6}{s(s+1)(s+2)}, \qquad\qquad G_2(s) = \frac{3\,s\,e^{-2\,s}}{s^2+16}$$

Soluzione:

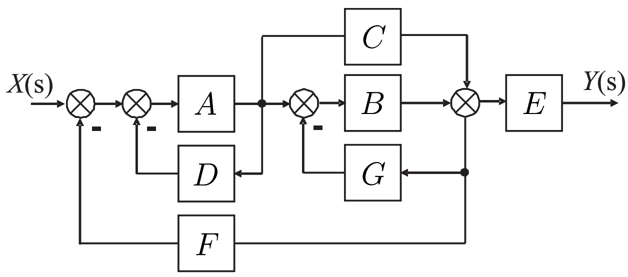
$$g_1(t) = 2\,\delta(t) + 3 - 6\,e^{-t} + 3e^{-2\,t}, \qquad\qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 3\,\cos(4(t-2)) & t \geq 2 \end{cases}$$

Infatti, per la seconda parte della funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s} - \frac{6}{(s+1)} + \frac{3}{(s+2)}\right] = 3 - 6\,e^{-t} + 3e^{-2\,t}.$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G_1(s) = \frac{ABE + ACE}{1 + AD + BG + ABF + ACF + ADBG}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

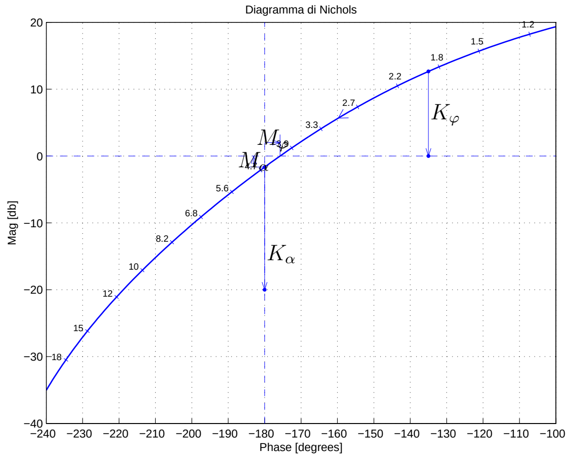
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\, G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45°$;

c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\, G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 10$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



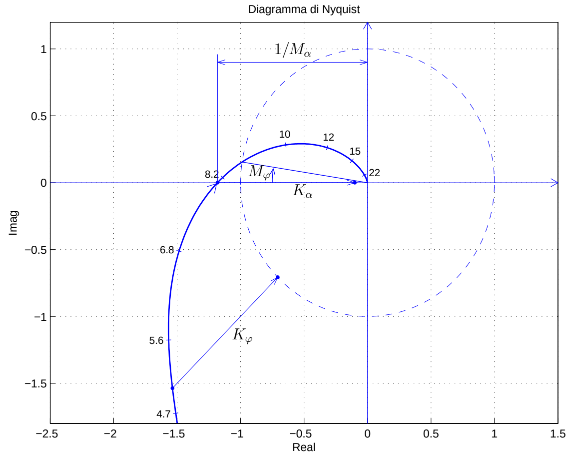
c.1) $M_a = 1.656$ db $= 1.21$

c.2) $M_\varphi = 4.25°$

c.3) $K_\varphi = -12.649$ db $= 0.233$

c.4) $K_\alpha = -18.343$ db $= 0.121$

$G_2(j\omega)$



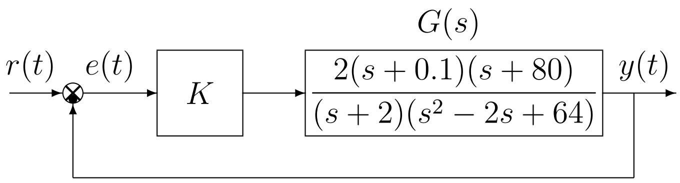
c.1) $M_a = 0.846$

c.2) $M_\varphi = -8.885°$

c.3) $K_\varphi = 0.460$

c.4) $K_\alpha = 0.0846$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
Soluzione.
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{2K\,(s+0.1)(s+80)}{(s+2)(s^2-2s+64)} = 0 \quad \rightarrow \quad (s+2)(s^2-2s+64) + 2K\,(s+0.1)(s+80) = 0$$

$$s^3 + 2K\,s^2 + (60 + 160.2\,K)\,s + 128 + 16\,K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (60+160.2\,K) \\ 2 & 2K & 128+16\,K \\ 1 & 2K(60+160.2\,K) - 128 - 16\,K & \\ 0 & 128+16\,K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad 320.4K^2 + 104K - 128 > 0, \qquad 128 + 16\,K > 0.$$

dai quali si ricava:

$$K > 0, \qquad (K < -0.8148) \cup (K > 0.4903), \qquad K > -8.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 0.4903 = K^*.$$

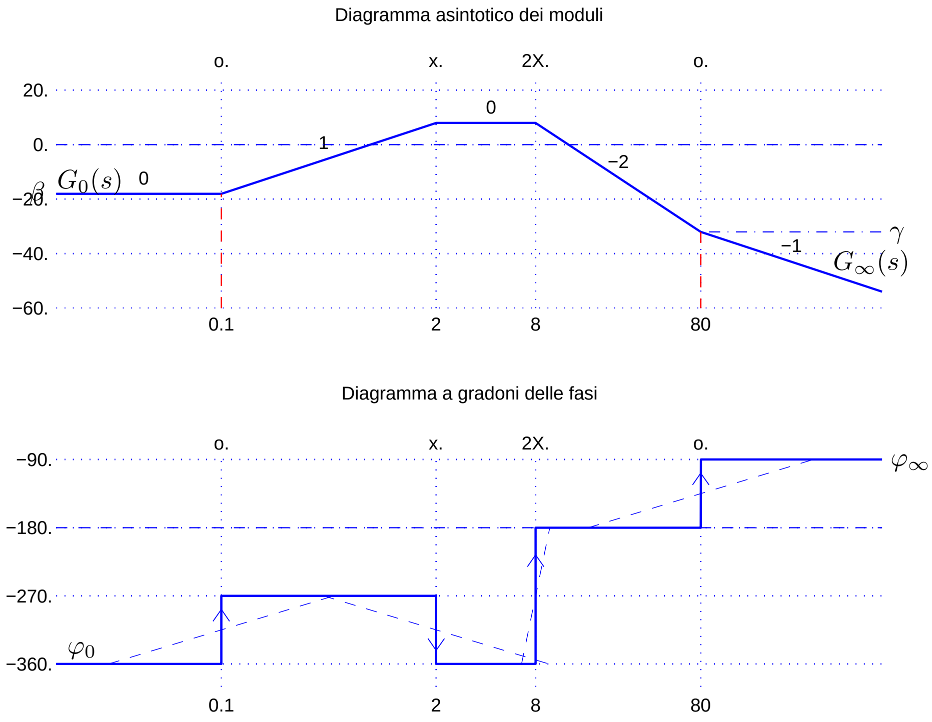


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{(60 + 16.2\,K^*)} = 11.77.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{16}{128} = \frac{1}{8} = 0.125, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{2}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 80$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0} = \frac{2}{16} = -18.08 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=80} = \frac{1}{40} = -32.04 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli instabili è $\delta = 2/(2\omega_n) = 2/16 = 0.125$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = 0$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 10 + \frac{1}{80} - 0.5 + \frac{2}{64} = 9.5437 > 0.$$

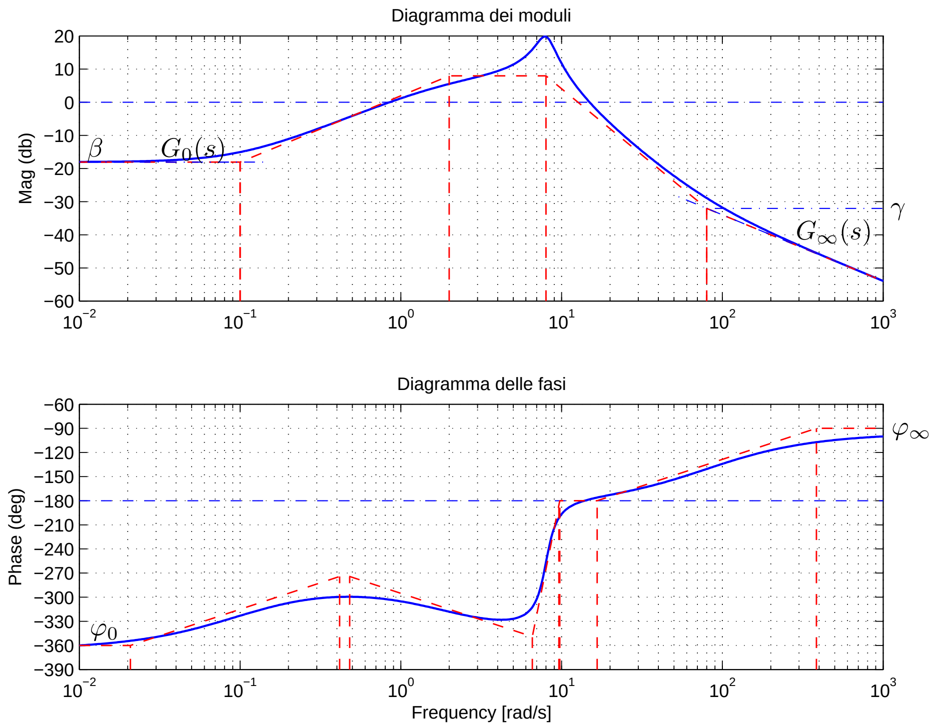


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

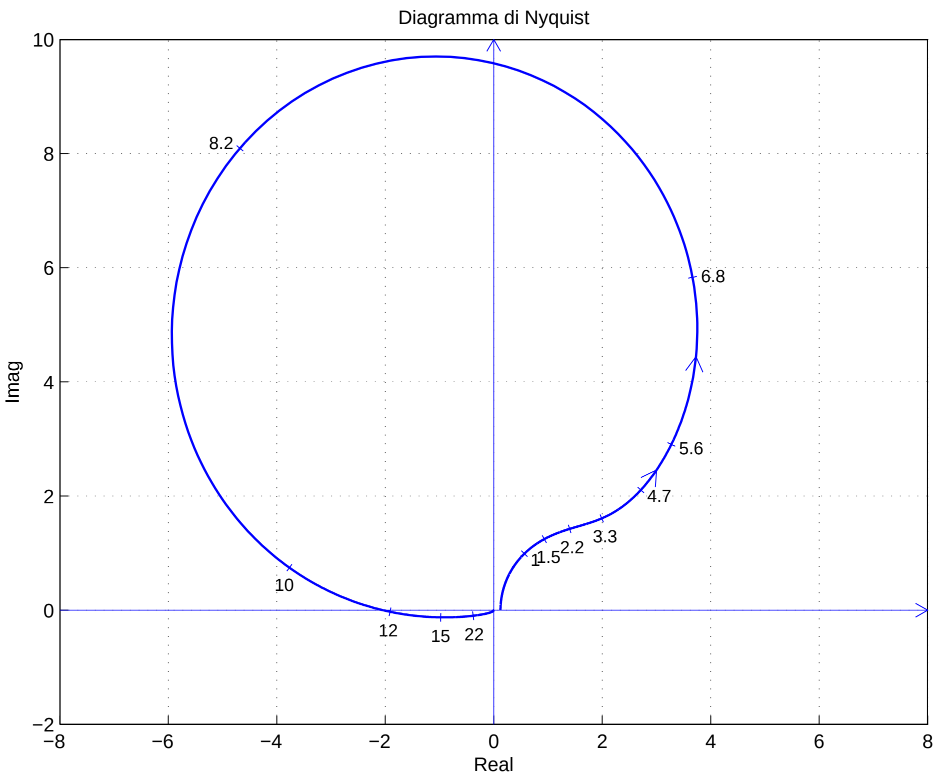


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 0 per cui non esiste nessun asintoto. La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = \frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p delle pulsazioni critiche del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -0.1 - 80 + 2 - 2 = -80.1 < 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -2.0398$$

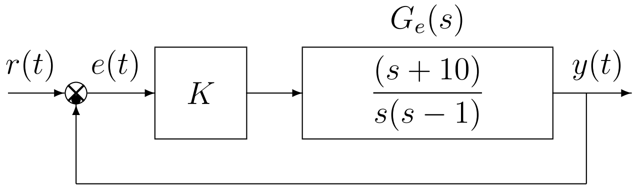
in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 11.77$.

d.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $|e_p| = 0.05$ per ingresso a gradino $x(t) = 2$.

Soluzione. L'errore a regime e_p del sistema retroazionato per ingresso a gradino $x(t) = 2$ è

$$e_p = \frac{R_0}{1 + K_p} = \frac{2}{1 + \frac{K}{8}} = 0.05 \qquad \to \qquad K = 16 \cdot 20 - 8 = 312.$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s+10)}{s(s-1)} = 0 \qquad \to \qquad s^2 + (K-1)s + 10K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 10K \\ 1 & K-1 & \\ 0 & 10K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile quando i tre coefficienti dell'equazione caratteristica hanno tutti lo stesso segno:

$$K - 1 > 0, \qquad 10K > 0 \qquad \Rightarrow \qquad K > 1 = K^*.$$

La pulsazione ω_1^* corrispondente al valore limite K_1^* è soluzione dell'equazione caratteristica di partenza:

$$s^2 + 10K^* = 0 \qquad \to \qquad \omega^* = \sqrt{10K^*} = \sqrt{10} \simeq 3.1623$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

Soluzione.

I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

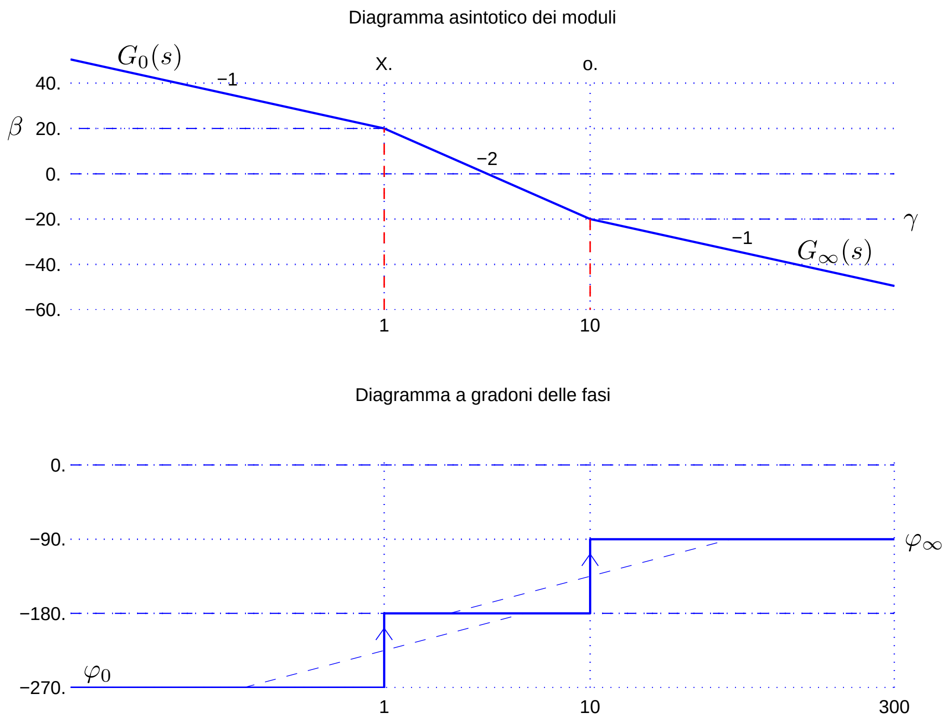


Figura 4: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

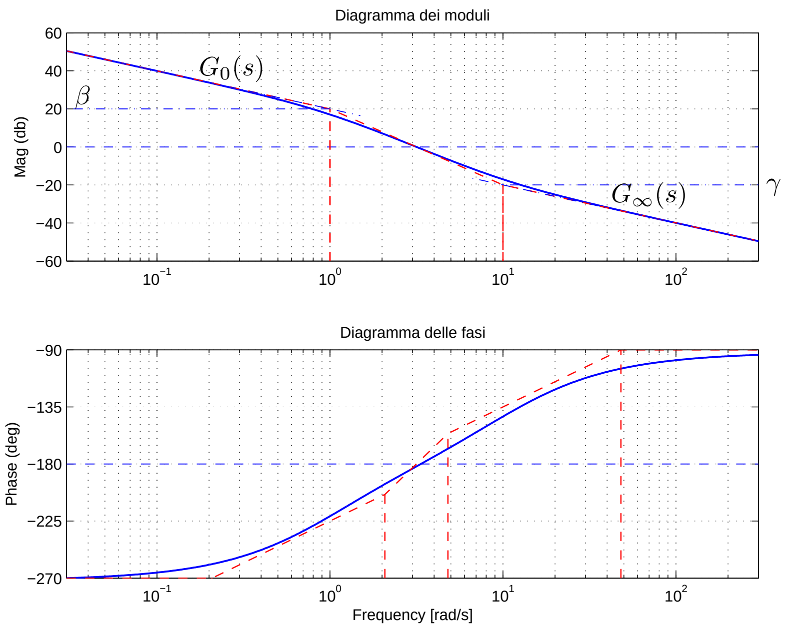


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{K}{s} = -\frac{10}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{1}{s}$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 10 = 20 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = \frac{1}{10} = -20 \text{ db}.$$

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale e le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale

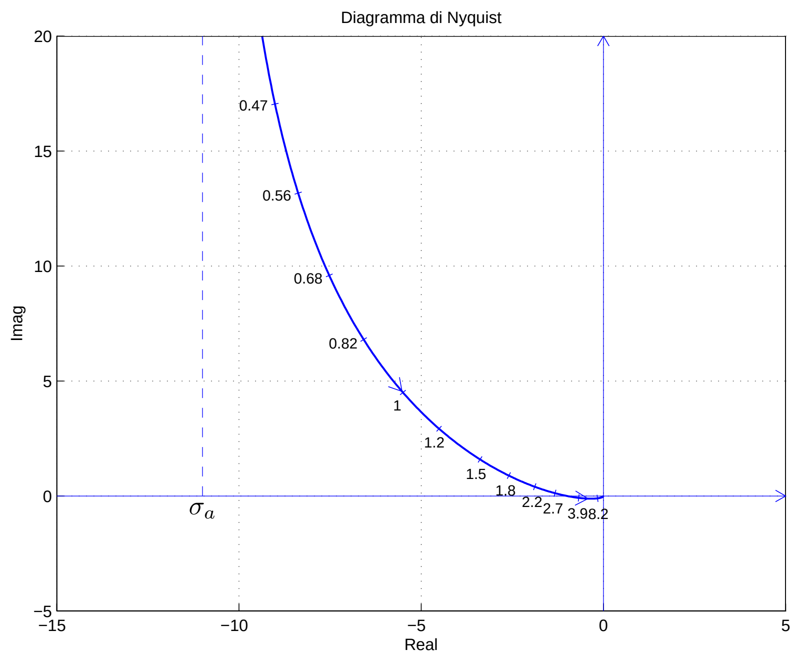


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta\tau = \frac{1}{10} + 1 = 1.1 > 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto:

$$\sigma_a = \Delta_\tau K = -11$$

La variazione di fase

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di π in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Esistono una sola intersezione σ^* con l'asse reale:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -1$$

e.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $|e_v| = 0.02$ per ingresso a rampa $x(t) = 2\,t$.

Soluzione. In questo caso l'errore a regime per ingresso a rampa $x(t) = 2\,t$ è:

$$|e_v| = \frac{R_0}{|K_v|} = \frac{2}{10K} = 0.02 \qquad \rightarrow \qquad K = 10.$$

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

f.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

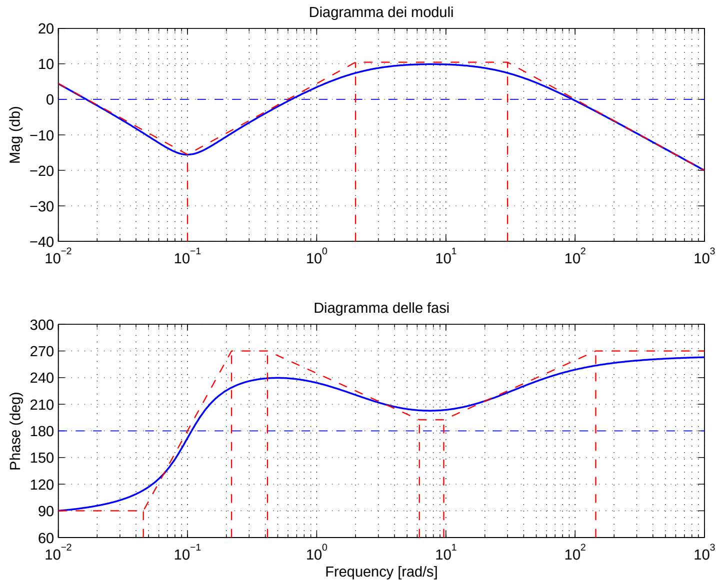
$$G(s) = \frac{100(s^2 + 0.1s + 0.01)}{s(s+2)(s-30)}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

f.2) Calcolare la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 3\,\cos(2\,t - \tfrac{\pi}{3}).$$

$y(t) = \nexists$ perchè il sistema è instabile.



Soluzione:

f.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{100(s^2 + 0.1s + 0.01)}{s(s+2)(s-30)}.$$

Il valore $K = 100$ si determina, per esempio, calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.1$:

$$|G_0(s)|_{s=0.1\,j} = \left|\frac{0.01K}{-60s}\right|_{s=0.1\,j} = \frac{0.01K}{6} = \beta \simeq -15.56 \text{ db} \simeq 0.1667 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 100.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{2} = 0.5.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 0$ db $\simeq 1$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

f.2) La risposta a regime del sistema $G(s)$ al segnale $x(t)$ dato in ingresso non viene fornita perchè il sistema $G(s)$ è instabile.

Controlli Automatici - Prima parte

18 Aprile 2016 - Domande

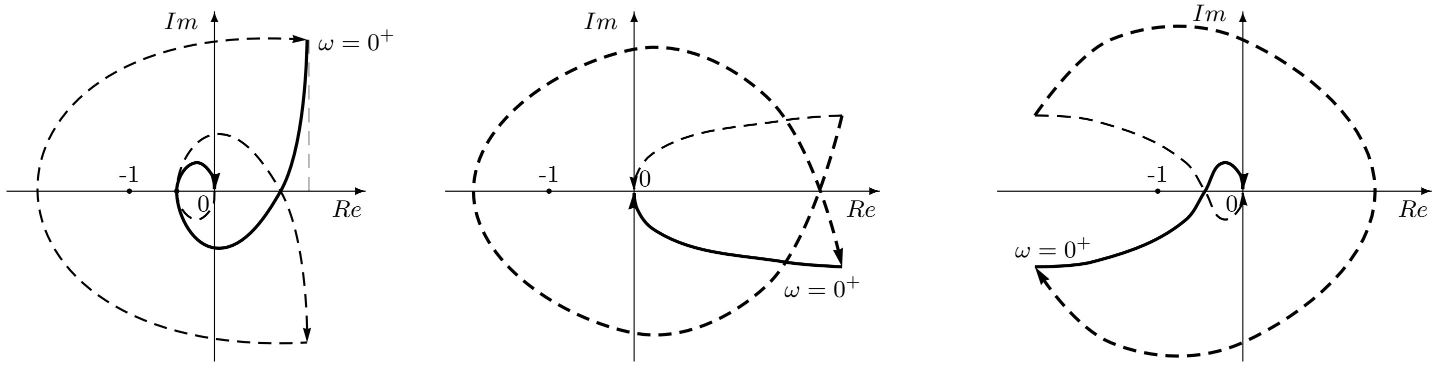
Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t) + 5\,\ddot{y}(t) + 4\,\dot{y}(t) + y(t) = 5\,\ddot{x}(t) + 3\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5\,s^2+3}{s^3+5\,s^2+4\,s+1}$$

2. Chiudere all'infinito i seguenti diagrammi di Nyquist. Nota: tutti i diagrammi di Nyquist fanno riferimento a sistemi con tutti i poli a parte reale negativa eccezion fatta per un polo semplice o doppio nell'origine.



3. La formula di Bode per il calcolo della fase di un sistema a partire dal diagramma delle ampiezze

⊗ è una formula esatta
○ è una formula approssimata
○ è valida per i sistemi lineari stabili
⊗ è valida per i sistemi a fase minima

4. Calcolare la posizione σ_a dell'asintoto verticale del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s+3)(1-2\,s)}{s(s^3+7\,s^2-5\,s+3)} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_a = \left(\frac{1}{3} - 2 + \frac{5}{3}\right) = 0$$

5. Nella scomposizione in fratti semplici, quali sono i *modi* $g_1(t)$ e $g_2(t)$ corrispondenti ad una coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} = -3 \pm 4j$ con grado di molteplicità $\nu = 2$:

$$g_1(t) = M_1\, e^{-3\,t}\cos(4t+\varphi_1), \qquad g_2(t) = M_2\, t\, e^{-3\,t}\cos(4t+\varphi_2).$$

6. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 8 + 10\sin(3t - \tfrac{\pi}{6}) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{20}{(s+4)^2}} \longrightarrow y(t) \simeq 10 + 8\sin(3t - \tfrac{\pi}{6} - 2\arctan\tfrac{3}{4})$$

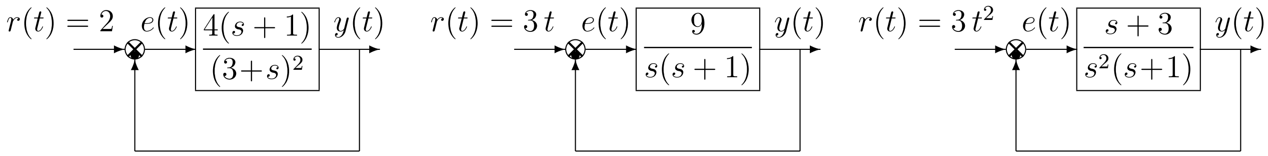
7. Nella determinazione degli errori a regime, il *principio del modello interno* afferma che: *affinché sia neutralizzato (con errore a regime nullo) un modo $r(t)$ in ingresso corrispondente ad un polo nell'origine di ordine h, occorre che ...*

lo stesso modo sia presente nel regolatore (o nel sistema controllato), che pertanto deve avere un polo nell'origine pure di ordine h o superiore, cioè contenere un modello del sistema elementare $1/s^h$ che genera quel modo.

8. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema del secondo ordine caratterizzato da un guadagno statico $G(0) = 5$, da un coefficiente di smorzamento $\delta = 0.5$ e da un tempo di assestamento $T_a = 3$ s alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{20}{s^2 + 2\,s + 4}.$$

9. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



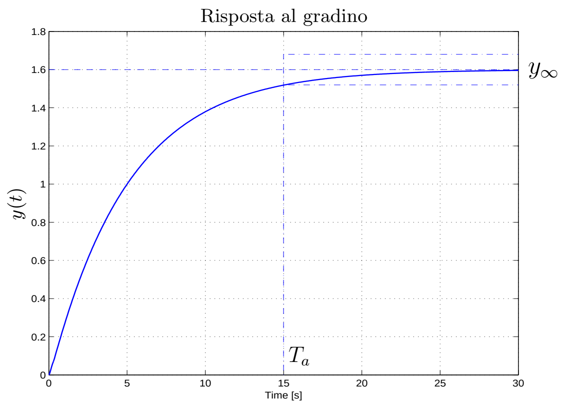
$$e(\infty) = \frac{2}{1+\frac{4}{9}} = \frac{18}{13} = 1.38 \qquad e(\infty) = \frac{3}{9} = 0.333 \qquad e(\infty) = \frac{6}{3} = 2$$

10. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{60\,(2 + 0.01\,s)(s^2 + 20\,s + 160)}{(2\,s + 10)(15\,s + 3)(s^2 + 10\,s + 400)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 1.6, \qquad T_a \simeq 15\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq \infty\,\text{s}.$$



11. La posizione dei due poli di un sistema del 2^o ordine privo di zeri è univocamente determinata se sono note le seguenti informazioni:

- ○ la massima sovraelongazione S e il picco di risonanza M_R
- ⊗ il picco di risonanza M_R e pulsazione di risonanza ω_R
- ⊗ il coefficiente di smorzamento δ e tempo di assestamento T_a

12. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $M\,\dot{y}(t) + B\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 5$.

$$Y(s) = \frac{5\,M}{M\,s + B} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = 5\,e^{-\frac{B}{M}\,t}.$$

13. Sia $y(t) = Y(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso sinusoidale $x(t) = X \sin(\omega t + \varphi_0)$. Fornire la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)}$$

14. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s+3)^2}{s^2(2s-1)}\,e^{-4\,s} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} M(\omega) = \frac{(9+\omega^2)}{\omega^2\sqrt{1+4\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = 2\arctan\frac{\omega}{3} - \pi - (\pi - \arctan 2\omega) - 4\,\omega \end{cases}$$