Controlli Automatici - Prima parte
17 Giugno 2016 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [2\,t^2 + 3\sin(5t)]\,e^{-3\,t}, \qquad\qquad x_2(t) = 2\,t^3 + 3\,\delta(t-5)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{4}{(s+3)^3} + \frac{15}{(s+3)^2+25}, \qquad\qquad X_2(s) = \frac{12}{s^4} + 3\,e^{-5\,s}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G(s)$:

$$G_1(s) = \frac{6}{s(s+1)(1+2s)}, \qquad\qquad G_2(s) = \frac{3\,s\,e^{-2\,s}}{s^2+16}$$

Soluzione:

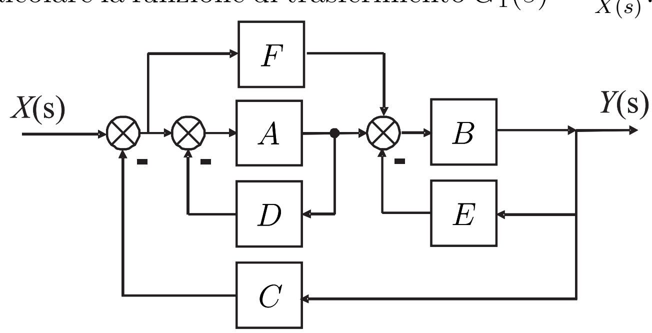
$$g_1(t) = 6 + 6\,e^{-t} - 12e^{-0.5\,t}, \qquad\qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t<2 \\ 3\,\cos(4(t-2)) & t \geq 2 \end{cases}$$

Infatti, per la seconda parte della funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s(s{+}1)(s{+}0.5)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s} + \frac{6}{(s+1)} - \frac{12}{(s+0.5)}\right] = 6 + 6\,e^{-t} - 12e^{-0.5\,t}.$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G_1(s) = \frac{AB{+}FB(1+AD)}{1{+}AD{+}BE{+}ABC{+}FBC{+}ADBE+ADFBC}$$



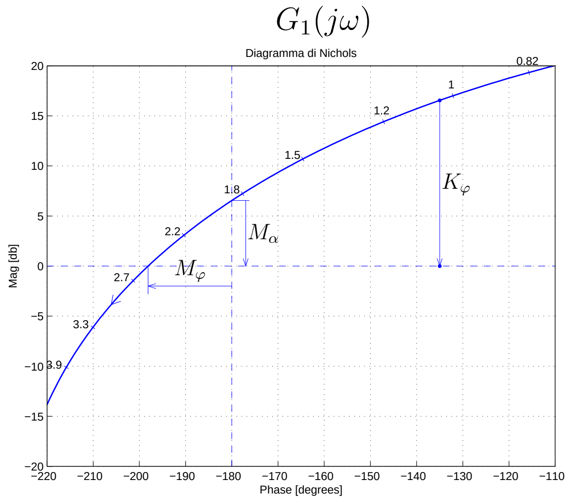
c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45°$;

c.4) la risposta a regime $y_r(t)$ del sistema $G(s)$ ad un ingresso sinusoidale $x(t) = \sin(1.2t)$;

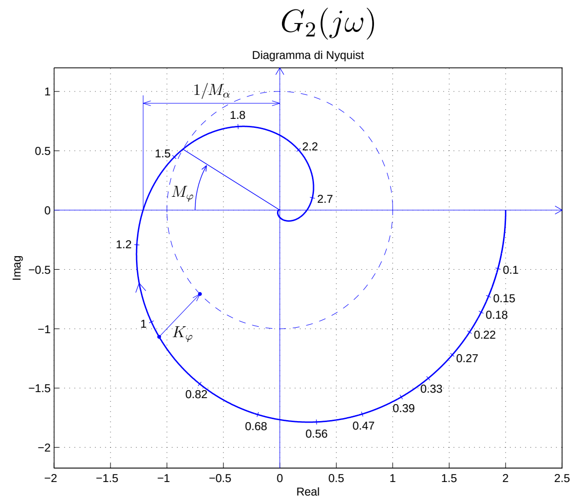


c.1) $M_a = -6.55$ db $= 0.471$

c.2) $M_\varphi = -18.11°$

c.3) $K_\varphi = -17.33$ db $= 0.136$

c.4) $y_r(t) = 5.26 \sin(1.2t - 147.1^o)$



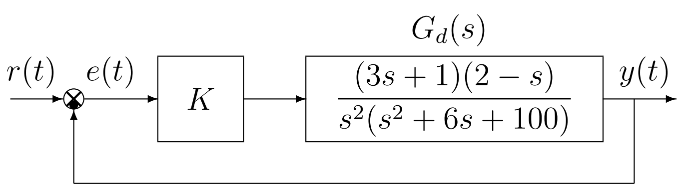
c.1) $M_a = 0.826$

c.2) $M_\varphi = -30.87°$

c.3) $K_\varphi = 0.662$

c.4) $y_r(t) = 1.3 \sin(1.2t - 167^o)$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
<u>Soluzione</u>. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(3s+1)(2-s)}{s^2(s^2+6s+100)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 6s^3 + (100-3K)s^2 + 5Ks + 2K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 100-3K & 2K \\ 3 & 6 & 5K & \\ 2 & 600-23K & 12K & \\ 1 & 5K(600-23K)-72K & & \\ 0 & 12K & & \end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < \frac{600}{23} = 26.09, \qquad\qquad K > 0.$$

Dalla riga 1 si ottiene la seguente disequazione:

$$5(600-23K) - 72 > 0 \qquad \rightarrow \qquad K < \frac{3000-72}{115} = 25.46 = K^*.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < K^* = 25.46.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{5K^* \ldots}$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_d(s)$.

<u>Soluzione</u>.

I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1. I diagrammi di

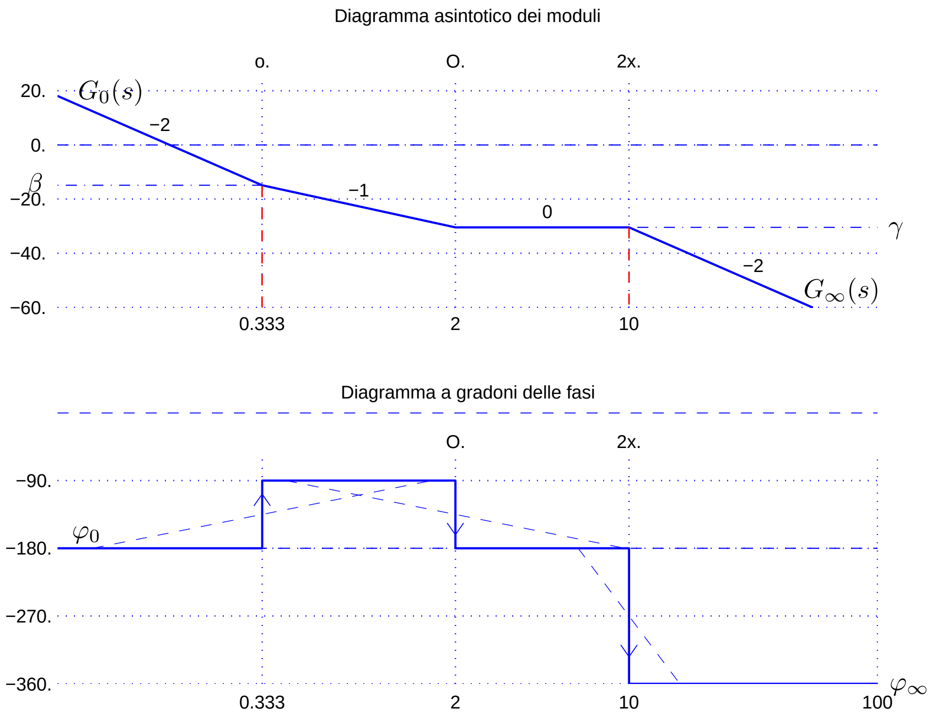


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{50\, s^2}, \qquad\qquad G_\infty(s) = -\frac{3}{s^2}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = -2\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.333$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.333} = 0.18 = -14.89 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = \frac{3}{100} = 0.03 = -30.46 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri stabili è $\delta = 6/(2\omega_n) = 0.3$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_d(s)$. Calcolare esattamente le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

<u>Soluzione</u>. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a φ_0 in quanto Δ_τ è positiva:

$$\Delta_\tau = 3 - \frac{1}{2} - \frac{6}{100} = 2.44 < 0.$$

Il sistema é di tipo 2 per cui non esiste nessun asintoto. La variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta_\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi$$

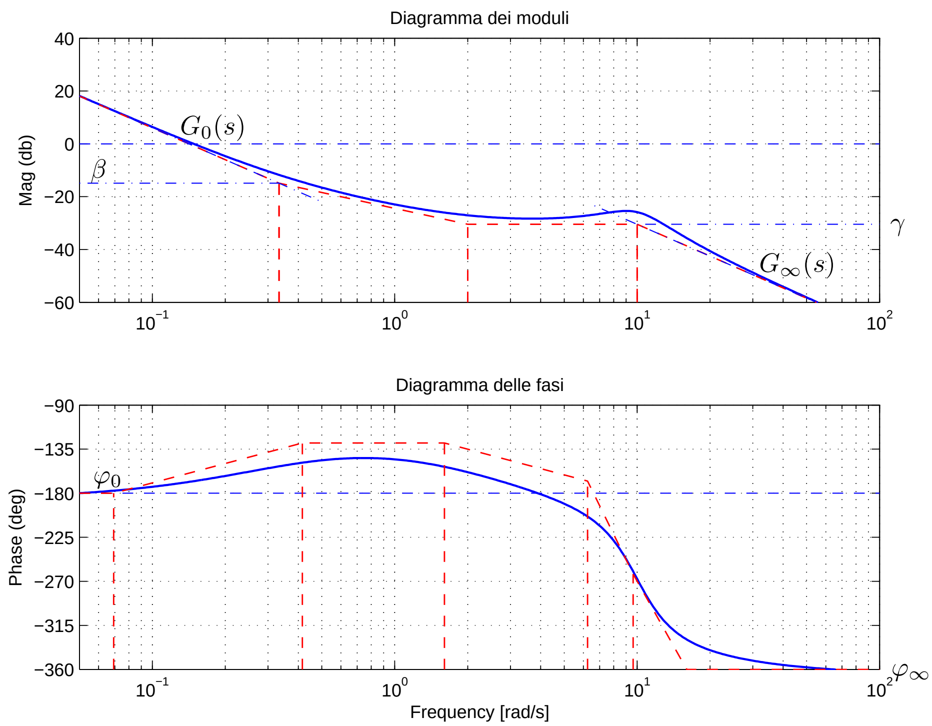


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G_d(s)$.

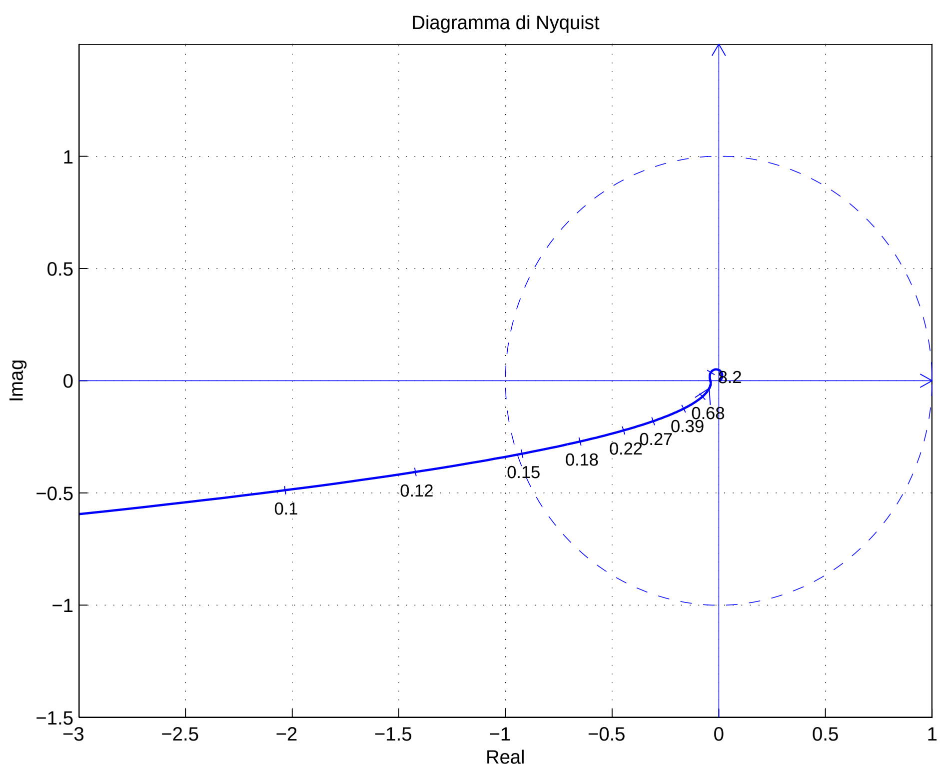


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di π in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -2\pi$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto a φ_∞ in quanto Δ_p è positiva:

$$\Delta_p = -\frac{1}{3} + 2 + 6 = 7.7666 > 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{25.46} = -0.0393$$

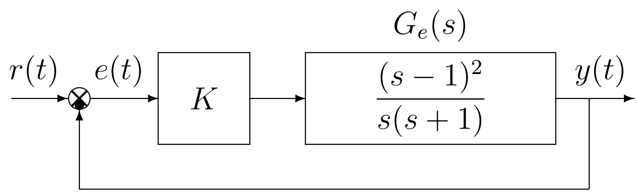
in corrispondente della pulsazione $\omega^* \simeq 4.6$.

d.4) Calcolare, in funzione di K, l'errore a regime e_a del sistema retroazionato per ingresso a parabola $r(t) = 3\,t^2$.

Soluzione. L'errore a regime e_a del sistema retroazionato per ingresso a rampa $r(t) = 3\,t^2$ è

$$e_a = \frac{R_0}{K_a} = \frac{6}{\frac{K}{50}} = \frac{300}{K}$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s-1)^2}{s(s+1)} = 0 \qquad \to \qquad (1+K)s^2 + (1-2K)s + K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & (1+K) & K \\ 1 & (1-2K) & \\ 0 & K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile quando tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno: a) segno positivo:

$$\begin{cases} (1+K) > 0 \\ (1-2K) > 0 \\ K > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad 0 < K < \frac{1}{2} = 0.5$$

b) segno negativo:

$$\begin{cases} (1+K) < 0 \\ (1-2K) < 0 \\ K < 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \nexists K$$

Il sistema retroazionato è quindi stabile per:

$$0 < K < 0.5 = K^*$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è :

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{\;}} = \frac{1}{\;} \simeq 0.5774$$

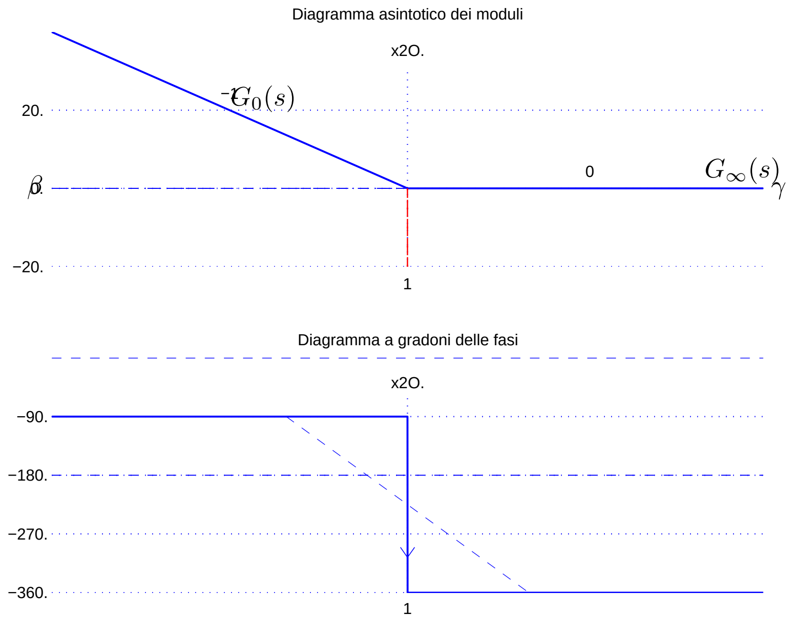


Figura 4: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_e(s)$.

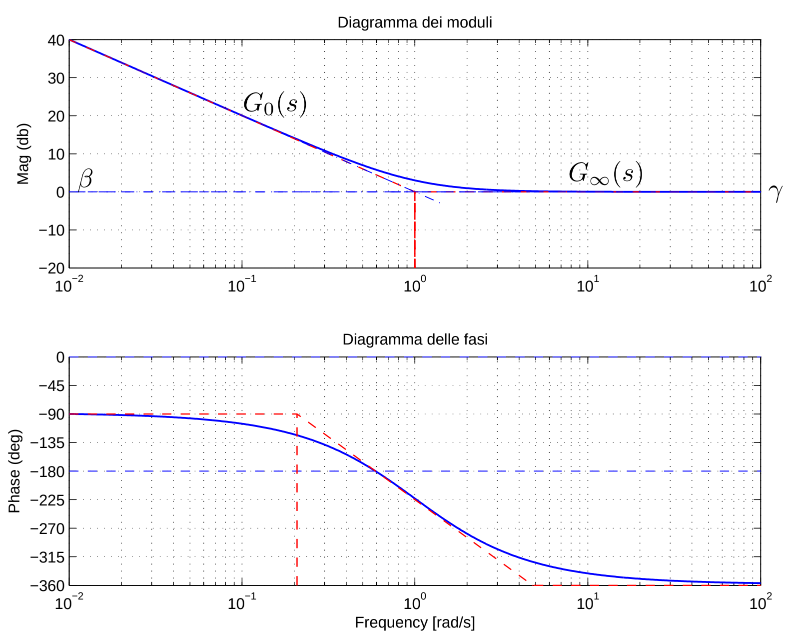


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

Soluzione. I diagrammi asintotici di Bode sono mostrati in Fig. 4. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 5.
Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = 1$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = 0 \equiv 2\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze i guadagni β e γ alla pulsazione $\omega = 1$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = \gamma = |G_\infty(s)|_{s=1} = 1 = 0 \text{ db}.$$

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'eventuale asintoto verticale e le eventuali intersezioni σ_i^* con il semiasse reale negativo.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale

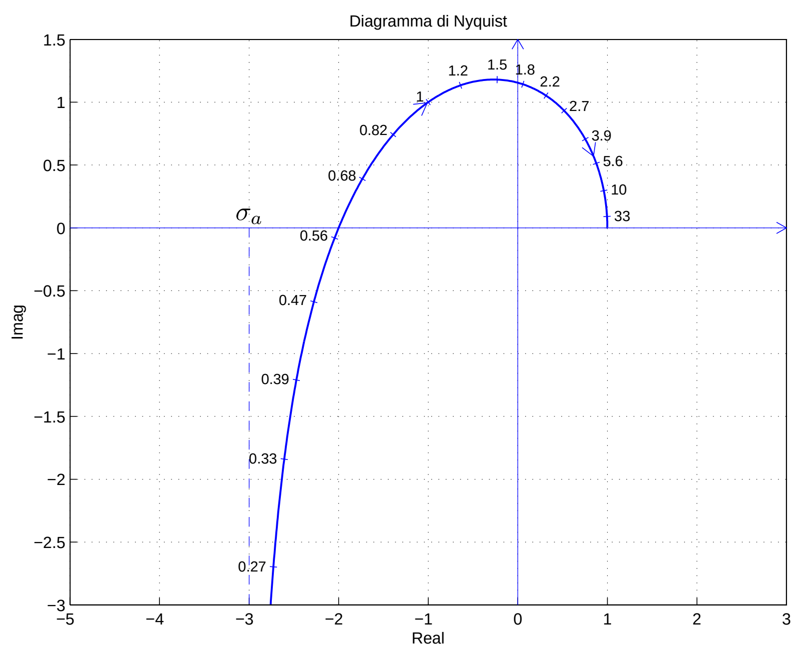


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta_\tau = -2 - 1 = -3 < 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale:

$$\sigma_a = \Delta_\tau\, K = -3$$

La variazione di fase

$$\Delta\varphi = -\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi$$

indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\frac{3}{2}\pi$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = 0$.
Esiste una intersezione σ^* con il semiasse reale negativo:

$$\sigma^* = -\frac{1}{\quad} = -2.$$

Tale intersezione avviene alla pulsazione $\omega_1^* = 0.5774$.

e.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $|e_v| = 0.02$ per ingresso a rampa $x(t) = 3\,t$.

Soluzione. In questo caso l'errore a regime per ingresso a rampa $x(t) = 2\,t$ è:

$$e_v = \frac{R_0}{K_v} = \frac{3}{K} = 0.02 \qquad \to \qquad K = 150.$$

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

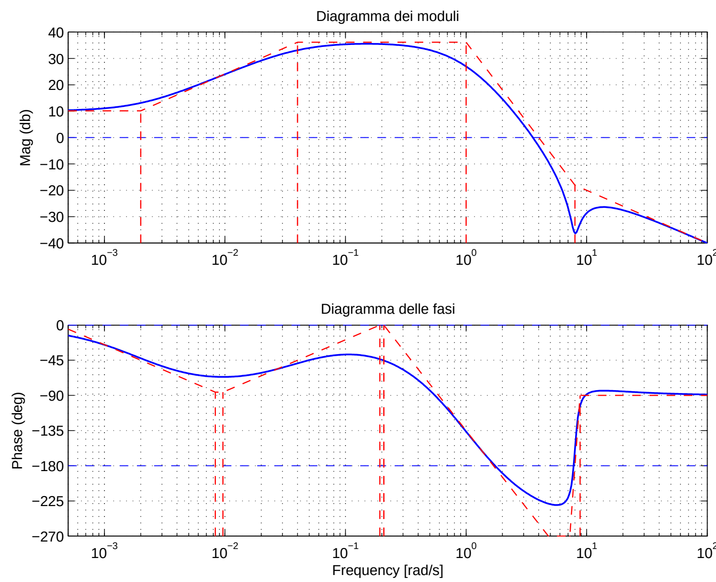
f.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{(s-0.002)(s^2+s+64)}{(s-0.04)(s+1)^3}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

f.2) Calcolare l'errore a regime e_p del sistema retroazionato quando in ingresso è presente un gradino di ampiezza unitaria:

$$e_p = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+3.2} = 0.2381.$$



Soluzione:

f.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{(s-0.002)(s^2+s+64)}{(s-0.04)(s+1)^3}.$$

Il valore $K = 1$ si determina, per esempio, calcolando il guadagno statico della funzione $G(s)$:

$$|G(s)|_{s=0} = \frac{0.002 \cdot 64}{0.04} = 3.2\,K \simeq 10 \text{ db} \simeq 3.2 \qquad \to \qquad K \simeq 1.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{16} = 0.0625.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 18$ db $\simeq 8$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

Controlli Automatici - Prima parte

17 Giugno 2016 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t) + 5\,\ddot{y}(t) + 2\,y(t) = 4\,\dot{x}(t) + 3\,x(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4\,s+3}{s^3+5\,s^2+2}$$

2. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{3\,(s^2+3s+1)}{(s+2)^2(2\,s-3)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = \frac{3}{2} \qquad\qquad y_\infty = \nexists$$

3. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 6 + 5\cos(3t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{s+1}{s+4}} \longrightarrow y(t) \simeq \tfrac{3}{2} + \sqrt{10}\cos(3t + \arctan 3 - \arctan \tfrac{3}{4})$$

4. Posto $a_0 \neq 0$, l'equazione ausiliaria che si ottiene dalla tabella di Routh quando tutti gli elementi di una riga si annullano:

   ⊗ ha radici simmetriche rispetto all'origine
   ⊗ è composta solo da termini di grado pari in s
   ○ è composta solo da termini di grado dispari in s
   ⊗ ha radici simmetriche rispetto all'asse immaginario

5. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $f(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della traslazione in s":

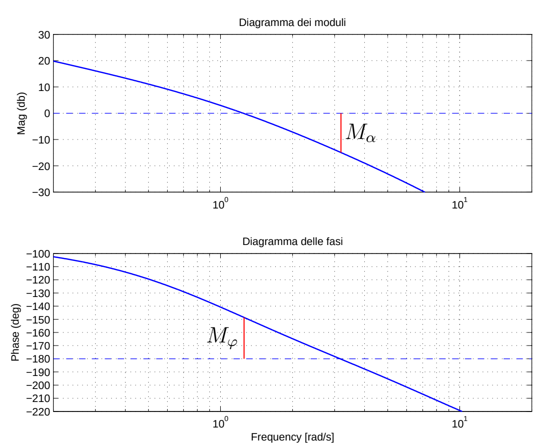
$$\mathcal{L}[e^{-a\,t} f(t)] = F(s+a)$$

6. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco, relativi ad un sistema $G(s)$ a fase minima.

   Leggere il margine di fase M_φ e il margine di ampiezza M_α del sistema $G(s)$:

$$M_\varphi \simeq 31.4 \text{ gradi}$$

$$M_\alpha \simeq 5.59 \text{ (14.95 db)},$$



7. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $\dot{y}(t) + 4\,y(t) = 0$ con condizione iniziale $y(0) = 3$.

$$sY(s) - 3 + 4Y(s) = 0 \qquad \rightarrow \qquad Y(s) = \frac{3}{s+4} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = 3\,e^{-4t}$$

8. Il picco di risonanza M_R di un sistema del 2° ordine è:

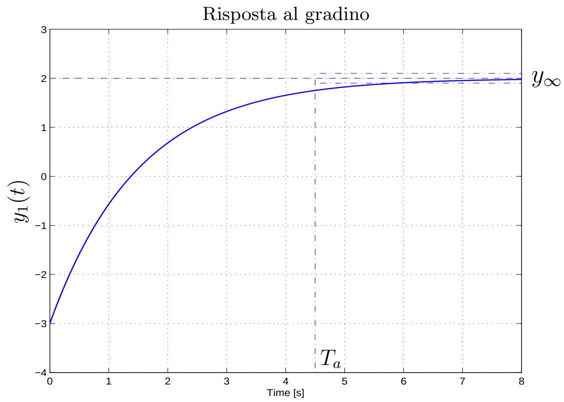
   ○ $M_R = \frac{\delta}{\ldots}$ ⊗ $M_R = \frac{1}{\ldots}$ ○ $M_R = \frac{1}{\ldots}$ ○ $M_R = \frac{\delta}{\ldots}$

9. Utilizzando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

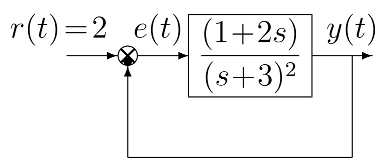
$$G(s) = \frac{4-9s}{3s+2}$$

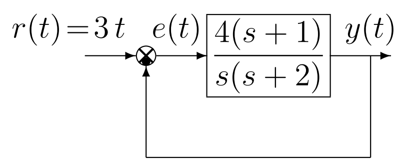
Calcolare il valore iniziale y_0, il valore finale y_∞ e il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$:

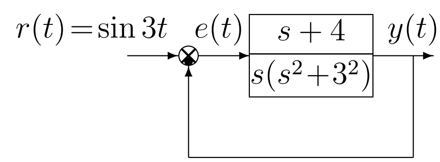
$$y_0 = -3, \qquad y_\infty \simeq 2, \qquad T_a \simeq 4.5\,\text{s}.$$



10. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:





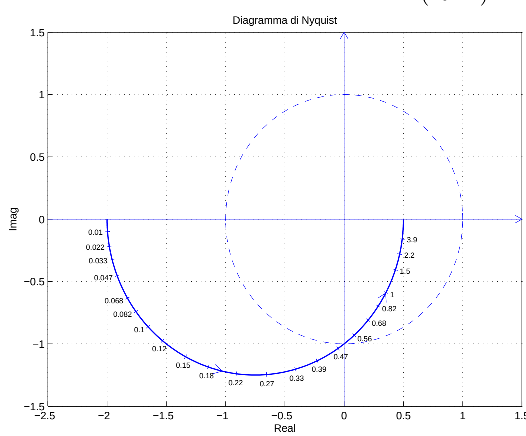


$$e(\infty) = \frac{2}{1+\frac{1}{9}} = \frac{18}{10} = 1.8 \qquad e(\infty) = \frac{3}{2} = 1.5 \qquad e(\infty) = 0$$

11. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{2(s+1)}{(4s-1)}$.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

- ◯ $-2 < K < \frac{1}{2}$;
- ◯ $-\frac{1}{2} < K < 2$;
- ⊗ $(K < -2) \cup (K > \frac{1}{2})$;
- ◯ $(K < -\frac{1}{2}) \cup (K > 2)$;

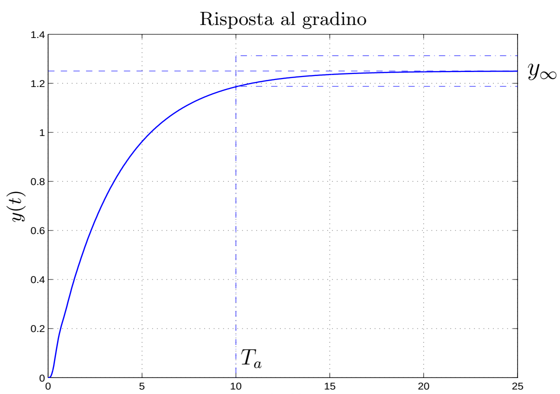


12. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{810(5+0.3s)(s^2+10s+30^2)}{(2s+30)(\mathbf{10s+3})(s^2+6s+81)(s^2+16s+400)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 1.25, \qquad T_a \simeq 10, \qquad T_\omega \simeq \nexists.$$



13. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s-3)(1+2s)}{s(1-s)^2}\, e^{-2\,s} \quad \to \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{9+\omega^2}\sqrt{1+4\omega^2}}{\omega(1+\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan\frac{\omega}{3} + \arctan 2\omega - \frac{\pi}{2} + 2\arctan\omega - 2\,\omega \end{cases}$$

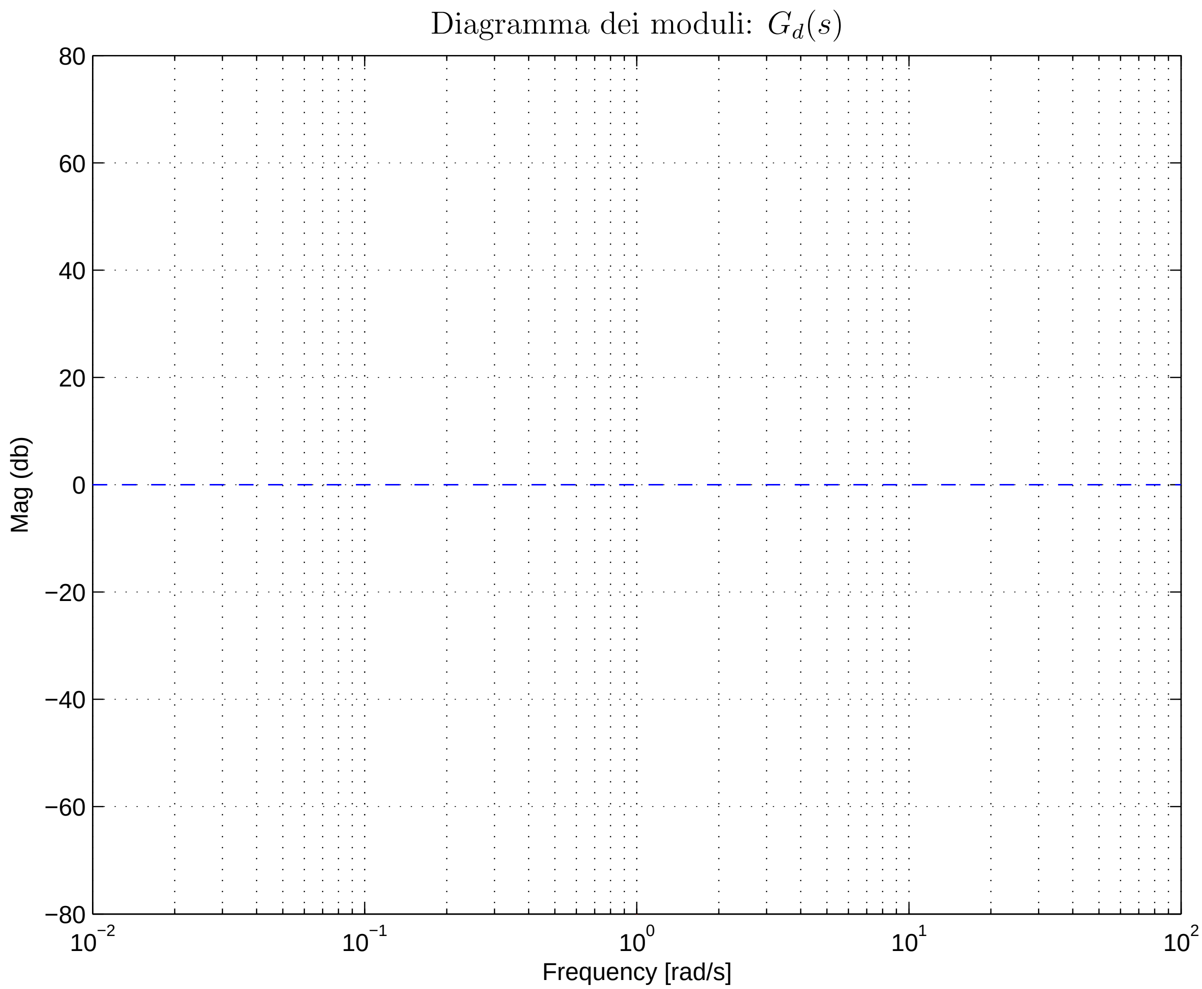


Diagramma dei moduli: $G_d(s)$
Mag (db)
80
60
40
20
0
−20
−40
−60
−80
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency [rad/s]

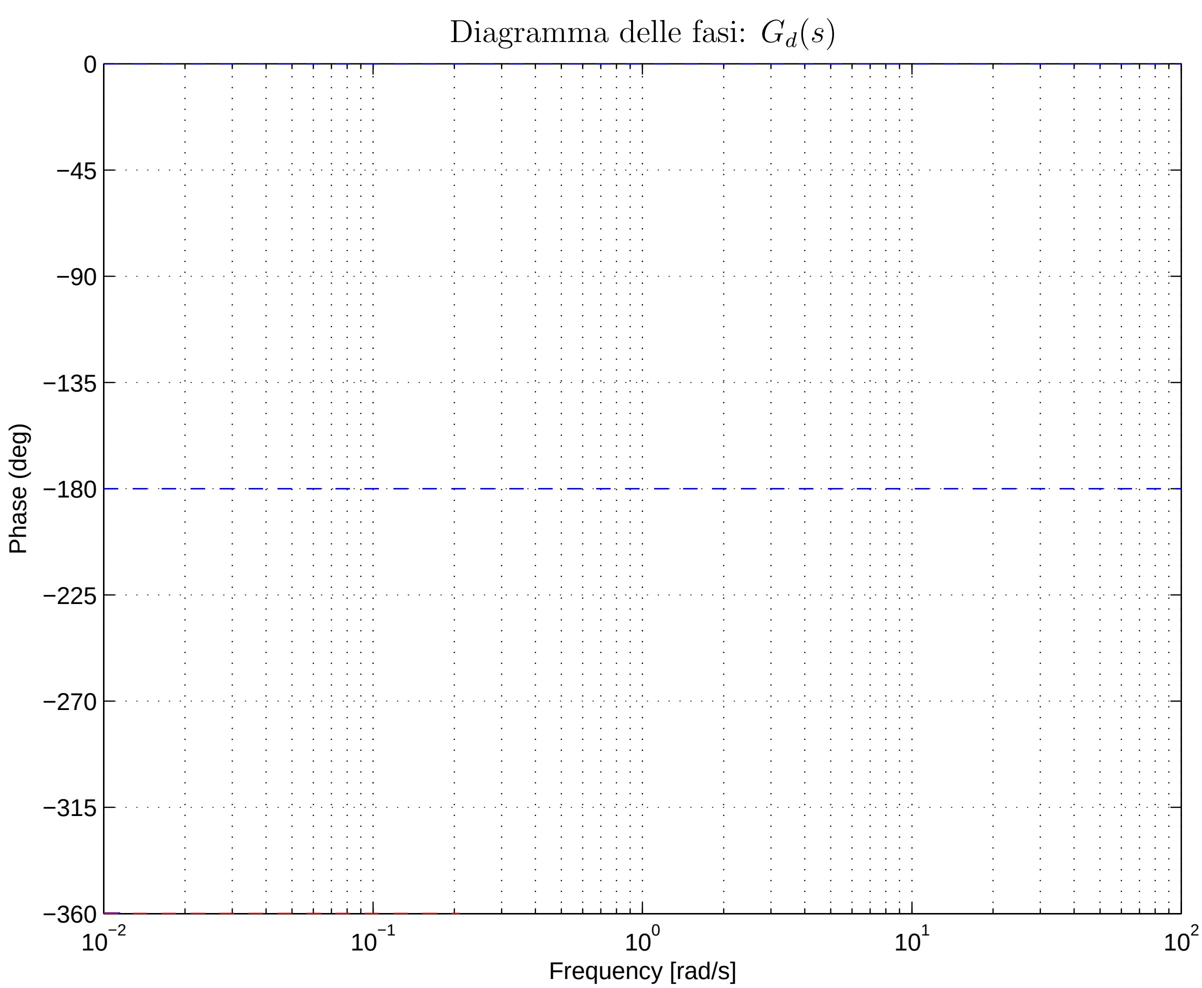


Diagramma delle fasi: $G_d(s)$
Phase (deg)
0
−45
−90
−135
−180
−225
−270
−315
−360
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency [rad/s]

Diagramma dei moduli: $G_e(s)$

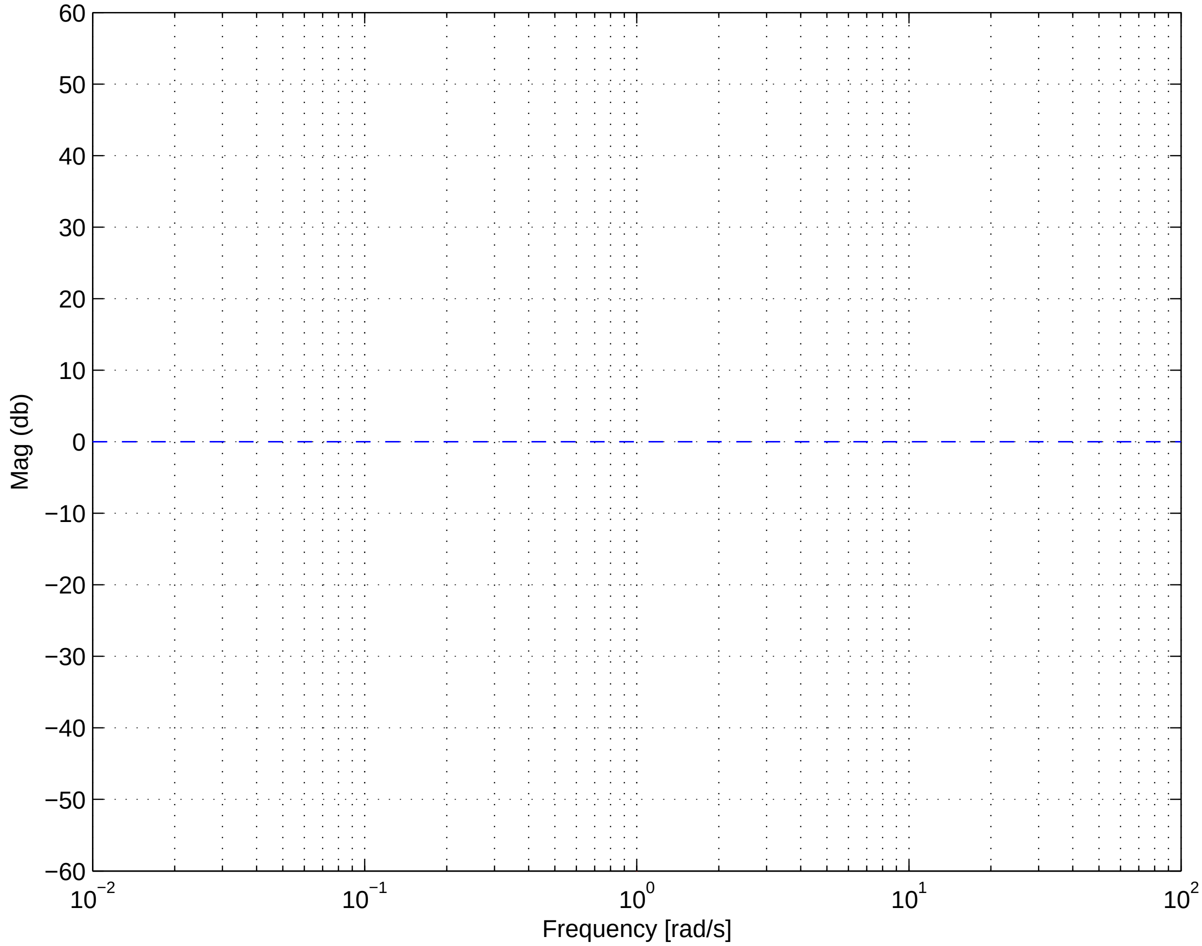


Diagramma delle fasi: $G_e(s)$