Controlli Automatici - Prima parte
17 Aprile 2015 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ∥ Elet. ∥ Telec. ∥ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = (2\sin(7t) - 4)\,e^{3t}, \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ e^{-2\,(t-3)}\cos(4(t-3)) & t \geq 3 \end{cases}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{14}{(s-3)^2+49} - \frac{4}{(s-3)}, \qquad X_2(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+16}\,e^{-3s}.$$

a.2) Calcolare la trasformata di Laplace inversa $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ delle seguenti funzioni $Y(s)$:

$$Y_1(s) = \frac{8}{s(s+2)(s-2)}, \qquad Y_2(s) = \frac{48}{s^5} + \frac{12}{(s+5)^3} + e^{-2\,s}$$

Soluzione:

$$y_1(t) = -2 + e^{-2t} + e^{2t}, \qquad y_2(t) = 2\,t^4 + 6\,t^2 e^{-5\,t} + \delta(t-2)$$

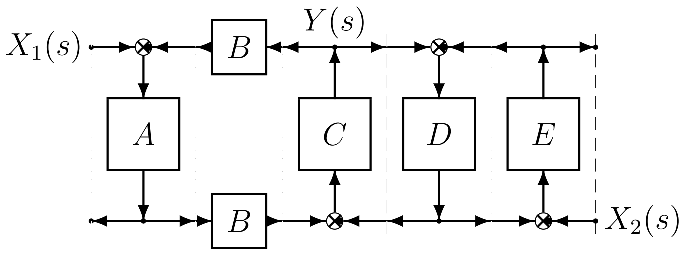
Infatti, per la funzione $Y_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[Y_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{s(s+2)(s-2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{2}{s} + \frac{1}{(s+2)} + \frac{1}{(s-2)}\right] = -2 + e^{-2t} + e^{2t}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi riportato in figura, calcolare le funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X_1(s)} = \frac{ABC(1+DE)}{1+AB^2C+CD+DE+AB^2CDE}$$

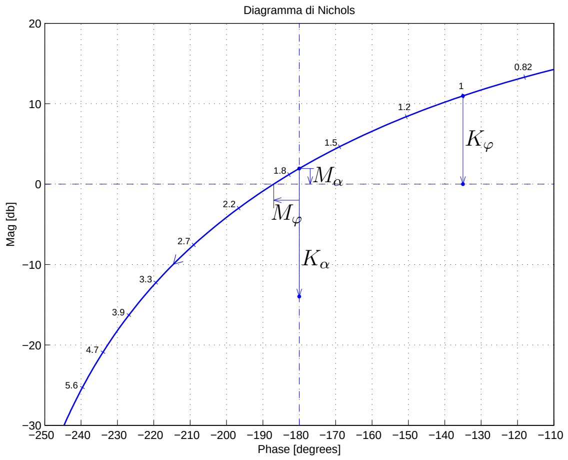
$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{X_2(s)} = \frac{-CDE}{1+AB^2C+CD+DE+AB^2CDE}$$



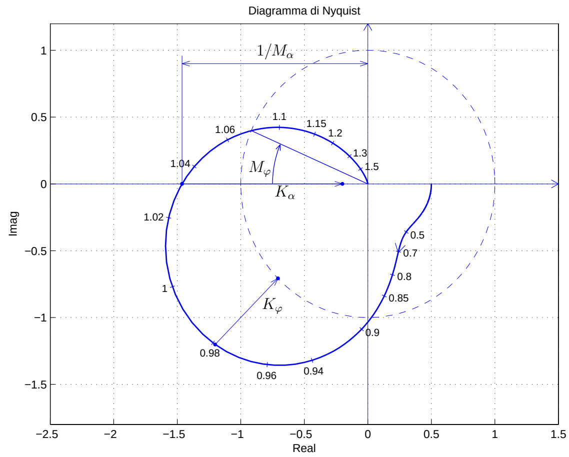
c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:
c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;
c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45°$;
c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = -1.937$ db $= 0.8$

c.2) $M_\varphi = -7.031°$

c.3) $K_\varphi = -10.97$ db $= 0.283$

c.4) $K_\alpha = -15.92$ db $= 0.16$

c.1) $M_a = 0.68$

c.2) $M_\varphi = -23.49°$

c.3) $K_\varphi = 0.589$

c.4) $K_\alpha = 0.137$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:

$$r(t) \to \bigotimes \xrightarrow{e(t)} \boxed{K} \to \overset{G_d(s)}{\boxed{\dfrac{(s^2+2s+64)}{s^2(s+0.5)}}} \to y(t)$$

d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

<u>Soluzione</u>.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s^2+2s+64)}{s^2(s+0.5)} = 0 \quad \to \quad s^2(s+0.5) + K(s^2+2s+64) = 0$$

$$s^3 + (0.5+K)s^2 + 2Ks + 64K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2K \\ 2 & (0.5+K) & 64K \\ 1 & (0.5+K)2K - 64K & \\ 0 & 64K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$0.5 + K > 0, \qquad (K - 31.5)2K > 0, \qquad K > 0.$$

Si ottengono quindi i seguenti vincoli:

$$K > 0.5, \qquad K > 31.5, \qquad K > 0.$$

Ne segue che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 31.5 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{2K^*} = \sqrt{63} \simeq 7.94$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_d(s)$.

<u>Soluzione</u>. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

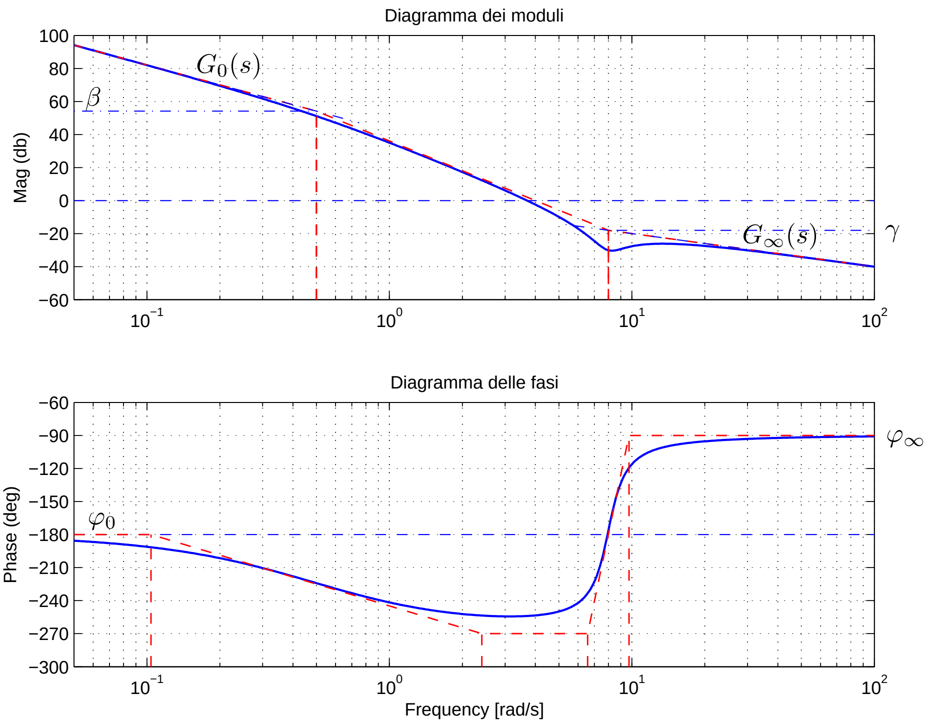


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G_d(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{128}{s^2}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.5$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 8$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.5} = 512 = 54.19 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=8} = \frac{1}{8} = -18.06 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri stabili è $\delta = 2/(2\omega_n) = 1/8 = 0.125$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_d(s)$. Calcolare esattamente le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

<u>Soluzione</u>. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ è mostrato in Fig. 2.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a φ_0 in quanto Δ_τ è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{2}{64} - 2 = -1.9688 < 0.$$

Il sistema é di tipo 2 per cui non esiste nessun asintoto. La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta_\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

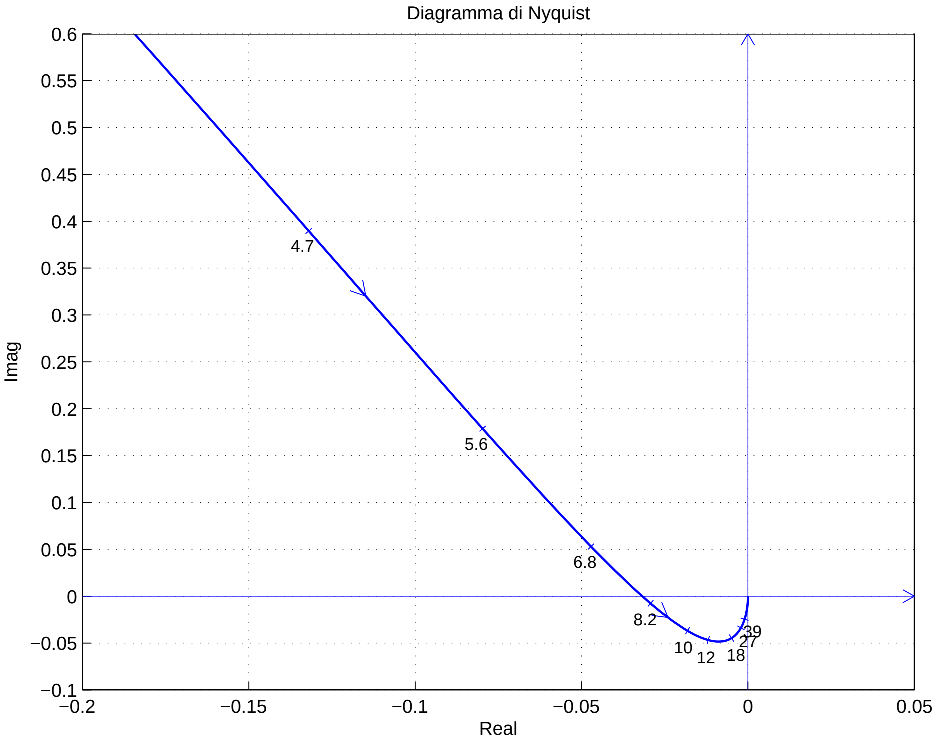


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto a φ_∞ in quanto Δ_p è negativa:

$$\Delta_p = -2 + 0.5 = -1.5 < 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{31.5} = -0.0317$$

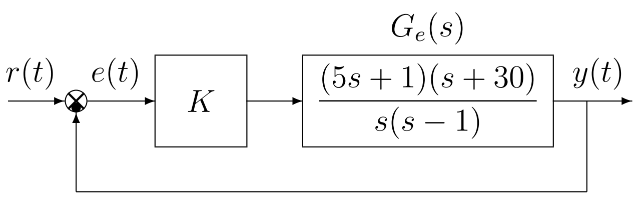
in corrispondente della pulsazione $\omega^* \simeq 7.94$.

d.4) Calcolare, in funzione di K, l'errore a regime e_a del sistema retroazionato per ingresso a parabola $r(t) = 2\,t^2$.

<u>Soluzione</u>. L'errore a regime e_v del sistema retroazionato per ingresso a parabola $r(t) = 2\,t^2$ è

$$e_a = \frac{R_0}{K_a} = \frac{4}{128K} = \frac{1}{32K}$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

<u>Soluzione</u>.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(5s+1)(s+30)}{s(s-1)} = 0 \qquad \to \qquad (5K+1)s^2 + (151K-1)s + 30K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$
\begin{array}{c|cc}
2 & (5K+1) & 30K \\
1 & (151K-1) & \\
0 & 30K &
\end{array}
$$

Il sistema retroazionato è stabile quando i tre coefficienti dell'equazione caratteristica hanno tutti lo stesso segno:

$$
\begin{cases} 5K+1>0 \\ 151K-1>0 \\ 30K>0 \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} 5K+1<0 \\ 151K-1<0 \\ 30K<0 \end{cases}
$$

cioè

$$
\left[K > \frac{1}{151} = K_1^*\right] \cup \left[K < -\frac{1}{5} = K_2^*\right]
$$

La pulsazione ω_1^* corrispondente al valore limite K_1^* è soluzione dell'equazione caratteristica di partenza:

$$
(5K_1^*+1)s^2 + 30K_1^* = 0 \qquad \rightarrow \qquad \omega_1^* = \sqrt{\frac{30K_1^*}{(5K_1^*+1)}} \simeq 0.4385
$$

La pulsazione ω_2^* corrispondente al valore limite K_2^* è $\omega_2^* = \infty$ come si vede chiaramente dal diagramma di Nyquist calcolato in e.3).

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

<u>Soluzione</u>. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 3.

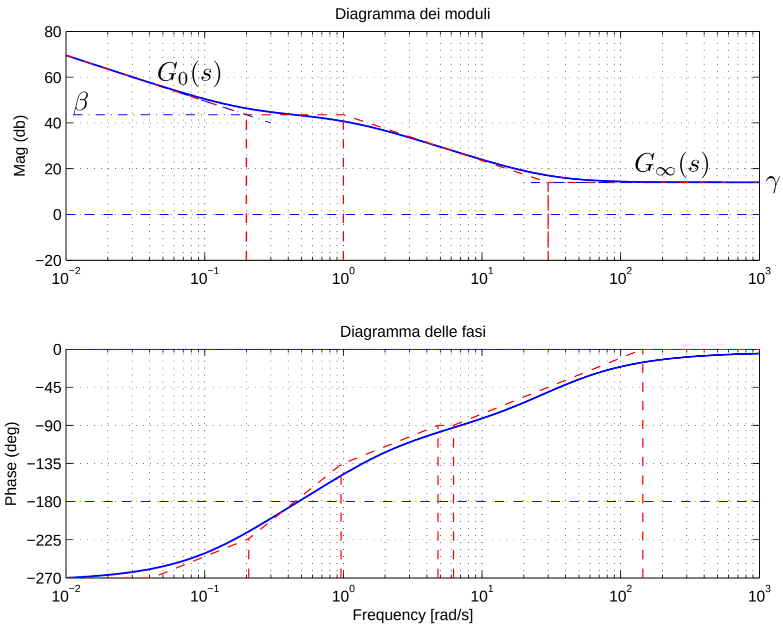


Figura 3: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$
G_0(s) = -\frac{30}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = 5
$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$
\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = 0.
$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.2$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 30$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.2} = \frac{30}{0.5} = 150 = 43.5 \text{ db}, \qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=30} = 5 = 13.98 \text{ db}.$$

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale e le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ è mostrato in Fig. 4. La fase iniziale

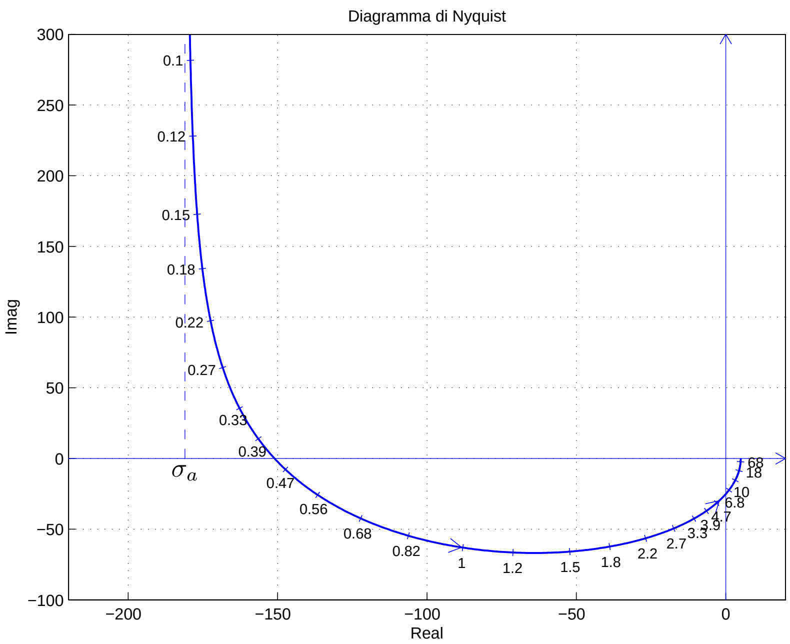


Figura 4: Diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta\tau = 5 + \frac{1}{30} + 1 = \frac{181}{30} > 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto:

$$\sigma_a = \Delta_\tau K = \frac{181}{30}(-30) = -181$$

La variazione di fase

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = 0$. Esistono due intersezioni σ_1^* e σ_2^* con l'asse reale:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K_1^*} = -152, \qquad \sigma_2^* = -\frac{1}{K_2^*} = 5$$

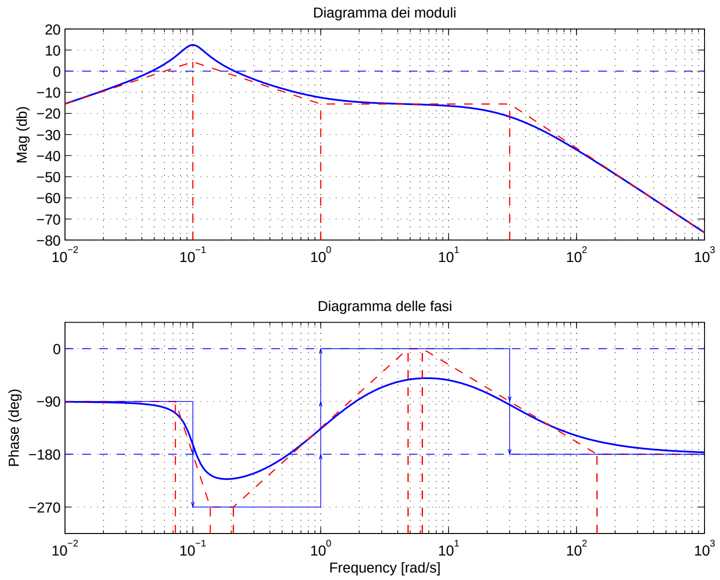
e.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $|e_v| = 0.01$ per ingresso a rampa $x(t) = 3\,t$.

Soluzione. In questo caso l'errore a regime per ingresso a rampa $x(t) = 3\,t$ è:

$$|e_v| = \frac{R_0}{|K_v|} = \frac{3}{30K} = 0.01 \qquad \to \qquad K = 10.$$

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

f.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.



$$G(s) = \frac{150\, s(s+1)^2}{(s^2 + 0.04s + 0.1^2)(s-1)(s+30)^2}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ. Nota: analizzare attentamente il diagramma delle fasi "a gradoni" nell'intorno della pulsazione $\omega = 1$.

f.2) Calcolare la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 4 + 3\,\sin(0.6\,t - \tfrac{\pi}{6}).$$

$y(t) = \nexists$ perchè il sistema è instabile.

Soluzione:

f.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{150\, s(s+1)^2}{(s^2 + 0.04s + 0.1^2)(s-1)(s+30)^2}.$$

Il valore $K = 150$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 30$:

$$|G_\infty(s)|_{s=30\,j} = \left|\frac{K}{s^2}\right|_{s=30\,j} = \frac{K}{900} = \gamma \simeq -15.56 \text{ db} \simeq 0.1667 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 150.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{5} = 0.2.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 8$ db $\simeq 2.5$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

f.2) La risposta a regime del sistema $G(s)$ al segnale $x(t)$ dato in ingresso non viene fornita perchè il sistema $G(s)$ è instabile.

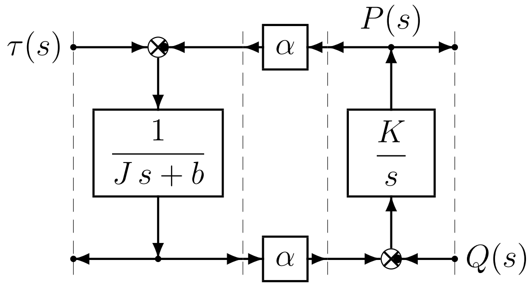
Controlli Automatici - Prima parte

17 Aprile 2015 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Dato il seguente schema a blocchi, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s)$ che lega l'ingresso $\tau(s)$ all'uscita $P(s)$ e la funzione di trasferimento $G_2(s)$ che lega l'ingresso $Q(s)$ all'uscita $P(s)$:



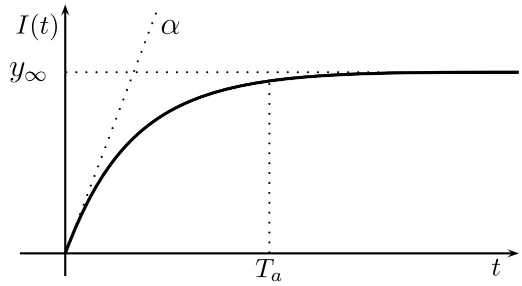
$$G_1(s) = \frac{P(s)}{\tau(s)} = \frac{\alpha K}{J\,s^2 + b\,s + \alpha^2 K}$$

$$G_2(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{-K(J\,s + b)}{J\,s^2 + b\,s + \alpha^2 K}$$

Scrivere inoltre la corrispondente equazione differenziale che lega il segnale di uscita $P(t)$ ai segnali di ingresso $\tau(t)$ e $Q(t)$:

$$J\,\ddot{P}(t) + b\,\dot{P}(t) + \alpha^2 K\,P(t) = \alpha K \tau(t) - K J\,\dot{Q}(t) - K b\,Q(t)$$

2. In figura è riportato l'andamento temporale $I(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)]$ corrispondente alla seguente funzione $I(s)$:



$$I(s) = \frac{1}{s(L\,s + R)}$$

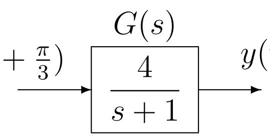
Calcolare, in funzione del parametri L ed R, il valore dei seguenti parametri (vedi figura):

$$y_\infty \simeq \frac{1}{R}, \qquad \alpha = \frac{1}{L}, \qquad T_a \simeq \frac{3L}{R}.$$

Per calcolare i parametri si utilizzi, eventualmente, i teoremi del valore iniziale e del valore finale.

3. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$x(t) = 5 + 3\cos(2t + \frac{\pi}{3})$



$y(t) \simeq 20 + \frac{12}{\sqrt{5}}\cos(2t + \frac{\pi}{3} - \arctan 2)$

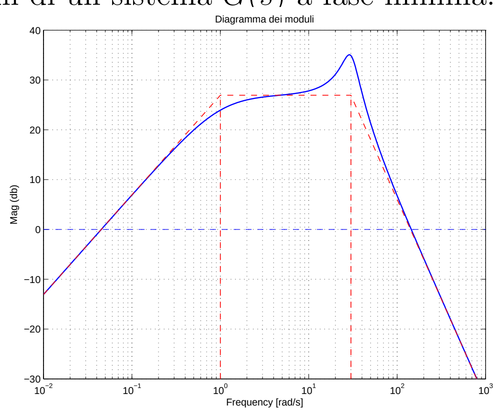
4. L'antitrasformata di Laplace della funzione $F(s)$ è definita come segue:

○ $f(t) := \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} dt$ ○ $f(t) := \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{-st} dt$

⊗ $f(t) := \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds$ ○ $f(t) := \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{-st} ds$

5. Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli di un sistema $G(s)$ a fase minima.

Utilizzando la formula di Bode, calcolare in modo approssimato la fase φ del sistema $G(s)$ in corrispondenza delle seguenti pulsazioni ω:



$$\omega_1 = 0.04 \quad \to \quad \varphi_1 \simeq \tfrac{\pi}{2}$$
$$\omega_2 = 1 \quad \to \quad \varphi_2 \simeq \tfrac{\pi}{4}$$
$$\omega_3 = 30 \quad \to \quad \varphi_3 \simeq -\tfrac{\pi}{2}$$
$$\omega_4 = 400 \quad \to \quad \varphi_4 \simeq -\pi$$

6. Per un sistema del 2^o ordine privo di zeri e caratterizzato da una coppia di poli complessi coniugati, scrivere le funzioni $S(\delta)$ e $M_R(\delta)$ che legano la massima sovraelongazione $S\%$ e il picco di risonanza M_R al coefficiente di smorzamento δ:

$$S(\delta) = 100\, e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \qquad\qquad M_R(\delta) = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$

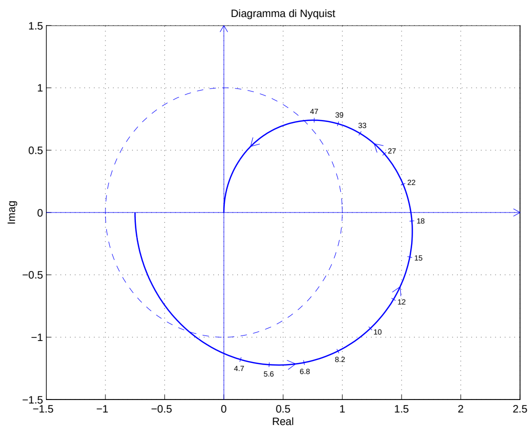
7. Posto $a_0 \neq 0$, l'equazione ausiliaria che di ottiene dalla tabella di Routh quando tutti gli elementi di una riga si annullano:

⊗ ha radici simmetriche rispetto all'origine
⊗ è composta solo da termini di grado pari in s
○ è composta solo da termini di grado dispari in s
⊗ ha radici simmetriche rispetto all'asse immaginario

8. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $3\dot{y}(t) + 2\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 4$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$3\,(s\,Y(s) - 4) + 2\,Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{4}{s + 0.666} \quad \rightarrow \quad y(t) = 4\,e^{-0.666\,t}.$$

9. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{-60(s+3)}{(s-8)(s-30)}$. Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:



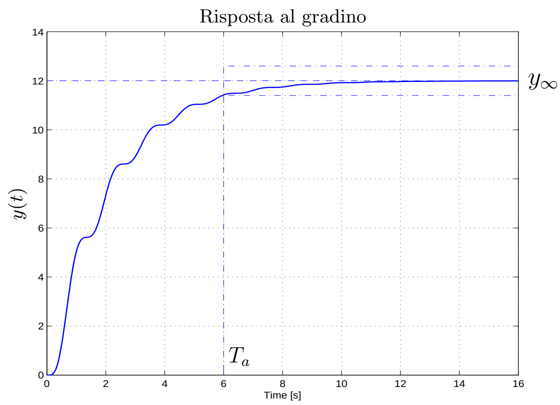
○ $0 < K < K^* < \infty$;
○ $0 < K^* < K < \infty$;
○ $-\infty < K^* < K < 0$;
⊗ $-\infty < K < K^* < 0$;

Fornire una stima dei valore di K^* e ω^*:

$$K^* \simeq -\frac{1}{1.6} = -0.625, \qquad \omega^* \simeq 19$$

10. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{200(5 + 0.1s)(s^2 + 30s + 60^2)}{(2s + 1)(2s + 30)(s^2 + 20s + 400)(s^2 + s + 25)}$$



Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 12, \qquad T_a \simeq \frac{3}{0.5} = 6\,\text{s}, \quad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{5} = 1.26\,\text{s}.$$

11. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(1 - 2s)}{s(s-5)^2}\, e^{-3\,s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{1+4\omega^2}}{\omega(\omega^2+25)} \\ \varphi(\omega) = -\arctan 2\omega - \frac{\pi}{2} - 2\left(\pi - \arctan\frac{\omega}{5}\right) - 3\,\omega \end{cases}$$