Controlli Automatici A
15 Aprile 2013 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [4 - 3\cos(5\,t)]\,e^{-2\,t}, \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 5 \\ (t-5)^2\,e^{-3\,(t-5)} & t \geq 5 \end{cases}$$

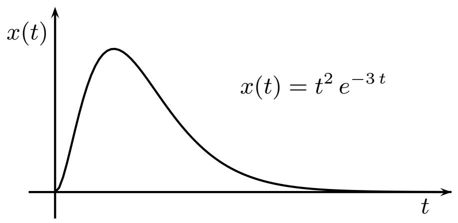
Soluzione:

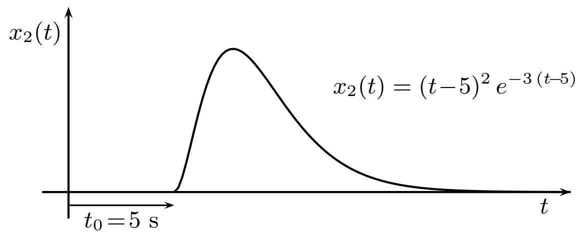
$$X_1(s) = \frac{4}{s+2} - \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+25}, \qquad X_2(s) = \frac{2\,e^{-5\,s}}{(s+3)^3}.$$

Infatti, per il primo segnale $x_1(t)$ si ha che:

$$\mathcal{L}\left[x_1(t)\right] = \mathcal{L}\left[4\,e^{-2\,t} - 3\cos(5\,t)\,e^{-2\,t}\right] = \frac{4}{s+2} - \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+25}$$

Il secondo segnale $x_2(t)$, invece, coincide con il segnale $x(t) = t^2\,e^{-3\,t}$ ritardato nel tempo di 5 secondi: $x_2(t) = x(t-5)$.





Si ha quindi che:

$$\mathcal{L}\left[x_2(t)\right] = \mathcal{L}\left[x(t-5)\right] = \mathcal{L}\left[x(t)\right]\,e^{-5\,s} = \mathcal{L}\left[t^2\,e^{-3\,t}\right]\,e^{-5\,s} = \left[\frac{2}{(s+3)^3}\right]\,e^{-5\,s} = \frac{2\,e^{-5\,s}}{(s+3)^3}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)(1+2\,s)}, \qquad G_2(s) = 2 + \frac{10}{(s+3)^2+25}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = 10 + 10\,e^{-t} - 20\,e^{-0.5\,t}, \qquad g_2(t) = 2\,\delta(t) + 2\,e^{-3\,t}\,\sin(5\,t)$$

Per la funzione $G_1(s)$ si ha:

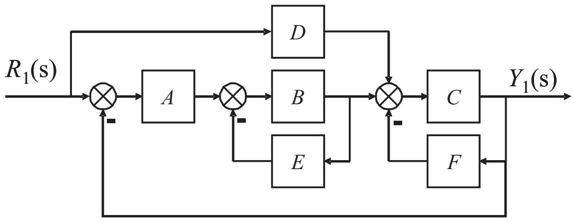
$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s(s+1)(s+0.5)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{s} + \frac{10}{(s+1)} - \frac{20}{(s+0.5)}\right] = 10 + 10\,e^{-t} - 20\,e^{-0.5\,t}$$

Per la funzione $G_2(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_2(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[2 + 2\,\frac{5}{(s+3)^2+25}\right] = 2\,\delta(t) + 2\,e^{-3\,t}\,\sin(5\,t)$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$:

$$G(s) = \frac{ABC + DC(1+BE)}{1 + BE + CF + ABC + BECF}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

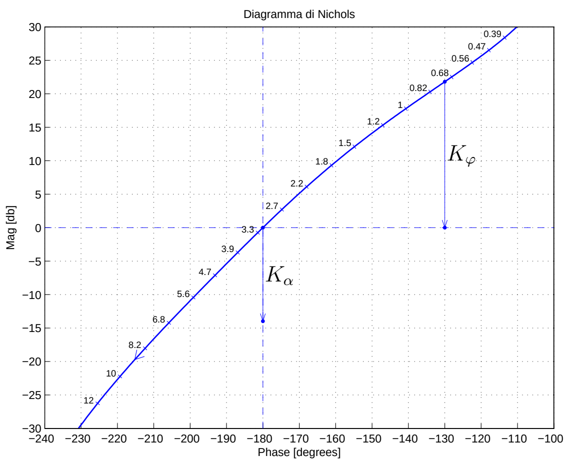
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50$;

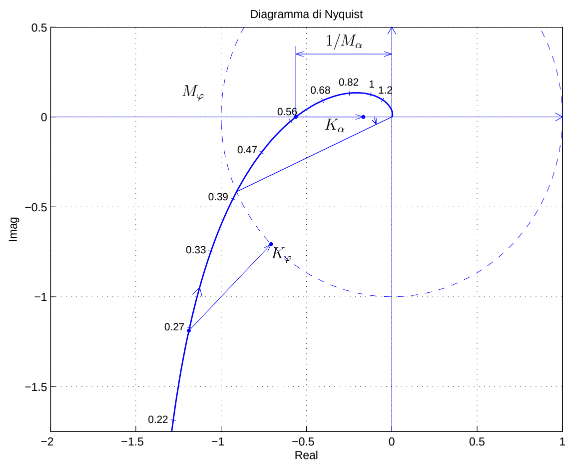
c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = 0$ db $= 1$

c.2) $M_\varphi = 0°$

c.3) $K_\varphi = -21.8$ db $= 0.0813$

c.4) $K_\alpha = -14.0$ db $= 0.2$

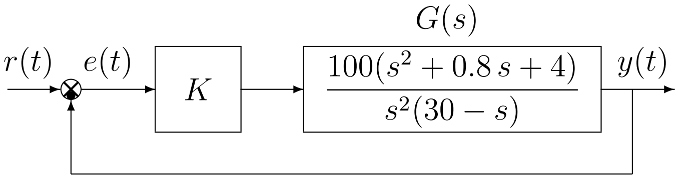
c.1) $M_a = 1.77$

c.2) $M_\varphi = 24.57°$

c.3) $K_\varphi = 0.595$

c.4) $K_\alpha = 0.296$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{100K(s^2 + 0.8\,s + 4)}{s^2(30 - s)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 - (30 + 100K)s^2 - 80K\,s - 400K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & -80K \\ 2 & -(30+100K) & -400K \\ 1 & (30+100K)80K+400K & \\ 0 & -400K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$-(30+100K) > 0, \qquad (30+100K)80K+400K > 0, \qquad -400K > 0.$$

dai quali si ricava:

$$K < -0.3, \qquad K < -0.35, \qquad K < 0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K <= -0.35 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{-80K^*.} = 5.292.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.
Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

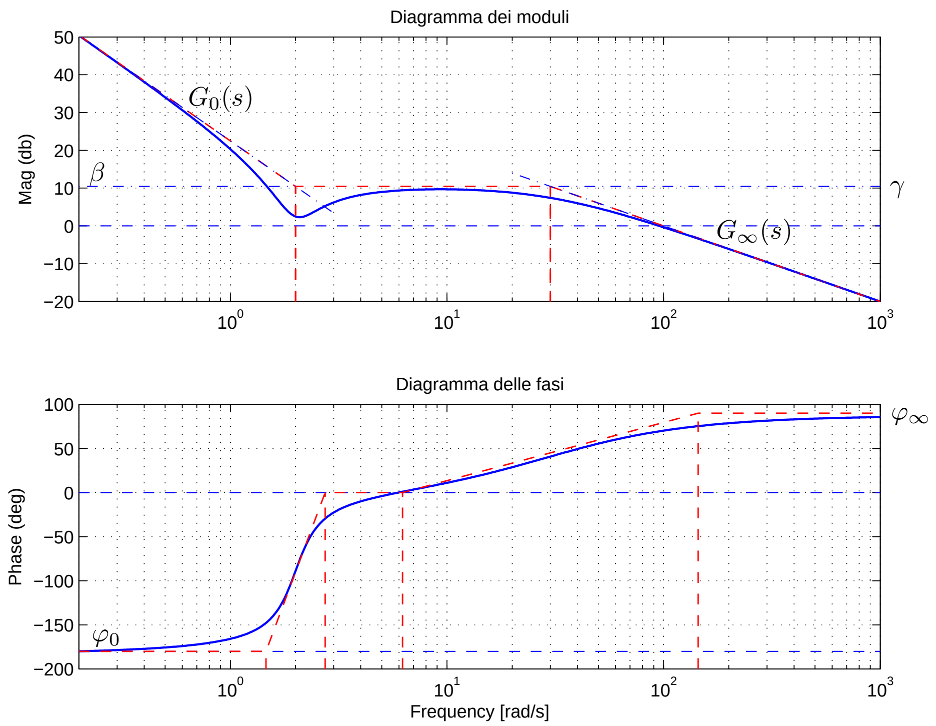


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

$$G_0(s) = \frac{40}{3s^2}, \qquad G_\infty(s) = -\frac{100}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad \varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 2$ e il guadagno γ in corrispondenza de lla pulsazione $\omega = 30$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=2} = \frac{10}{3} = 10.46 \text{ db}, \qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=30} = \frac{10}{3} = 10.46 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri stabili è $\delta = 0.8/(2\omega_n) = 0.2$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 2. La fase iniziale del

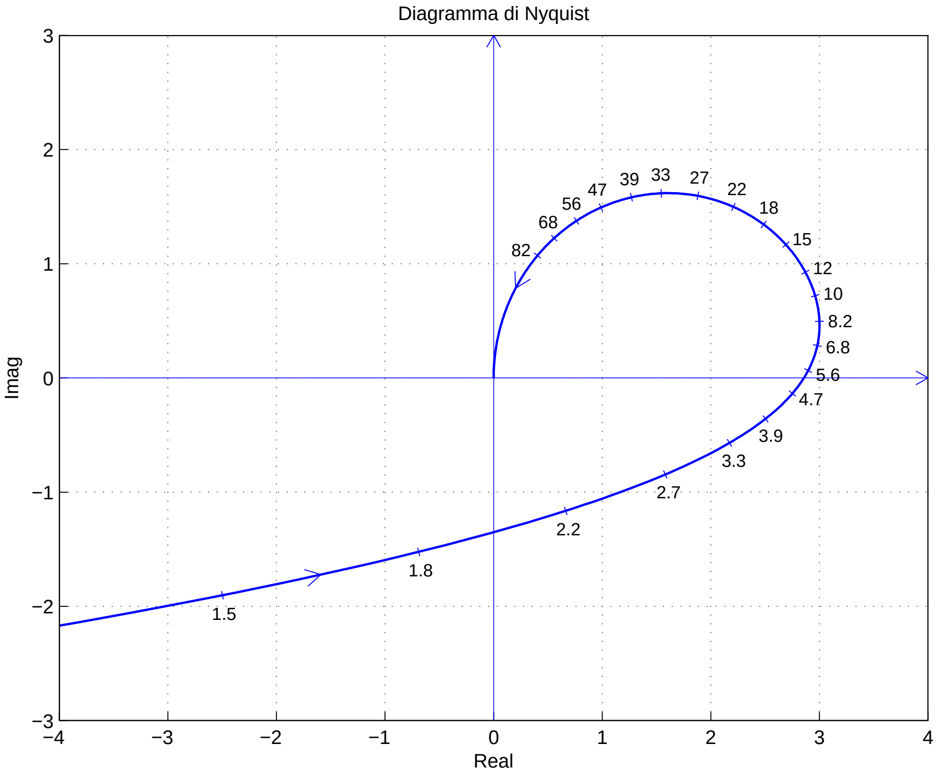


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$: andamento generale e zoom.

sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 0.2 + \frac{1}{30} = 0.233 > 0.$$

Il sistema é di tipo 2 per cui non esiste nessun asintoto. La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

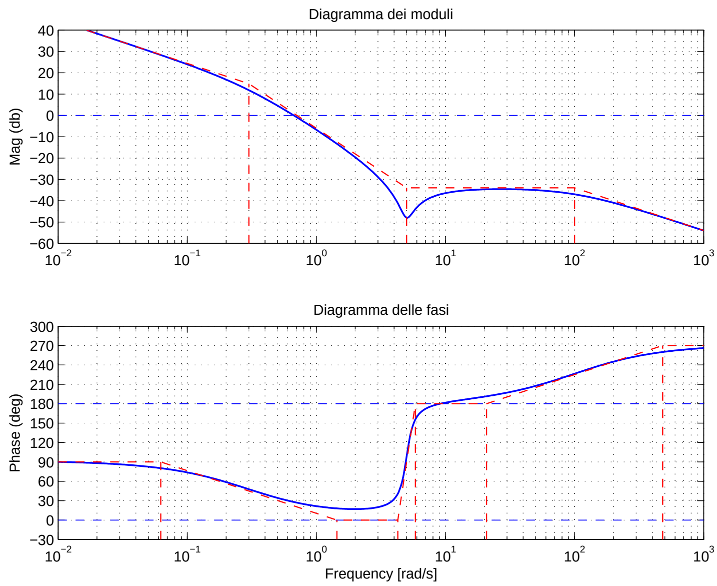
Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = \frac{\pi}{2}$. Esiste una sola intersezione con il semiasse reale positivo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = 2.857.$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 5.292$.

e) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

e.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.



$$G(s) = \frac{2(s^2 + s + 25)}{s(s + 0.3)(s - 100)}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

e.2) Per $t \to \infty$, la risposta al gradino $y(t)$ del sistema $G(s)$:

- ◯ tende ad un valore costante;
- ◯ tende ad una rampa;
- ◯ tende ad una sinusoide;
- ⊗ tende all'infinito;

Soluzione:

e.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{2(s^2 + s + 25)}{s(s + 0.3)(s - 100)}.$$

Il valore $K = 2$ si determina calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.3$:

$$|G_0(s)|_{s=0.3\,j} = \left|\frac{25K}{-30\,s}\right|_{0.3\,j} = \frac{25K}{9} = \beta \simeq 15 \text{ db} \simeq 5.6 \qquad \to \qquad K \simeq 2.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

f) Calcolare la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ sollecitato dall'ingresso $x(t)$:

$$x(t) = 2 + 5\sin(4t) \longrightarrow \boxed{\overset{G(s)}{\dfrac{2}{(s+3)}}} \longrightarrow y_\infty(t) \simeq \tfrac{4}{3} + 2\sin(4t - \arctan(\tfrac{4}{3}))$$

Soluzione. La risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema si calcola facilmente utilizzando la funzione di risposta armonica $G(j\omega)$. Il valore della $G(j\omega)$ per $\omega = 0$ e per $\omega = 4j$ è il seguente:

$$G(0) = \frac{2}{3}, \qquad G(4j) = \frac{2}{3 + 4j} = \frac{2}{\sqrt{9 + 16}} e^{-j\arctan(\frac{4}{3})} = \frac{2}{5} e^{-j\arctan(\frac{4}{3})}$$

La risposta a regime $y_\infty(t)$ si ottiene nel seguente modo:

$$y_\infty(t) = 2\,G(0) + 5|G(4j)|\sin(4t + \arg G(4j)) = \frac{4}{3} + 2\sin(4t - \arctan\tfrac{4}{3})$$

g) Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

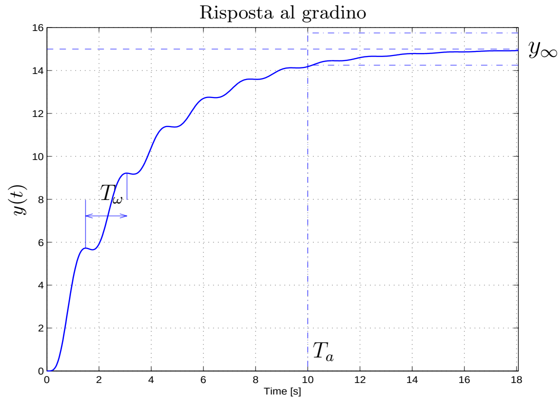
$$G(s) = \frac{30\,(3 + 0.2\,s)(s^2 + 20\,s + 80^2)}{(10\,s + 3)(0.2\,s + 8)(s^2 + 8\,s + 100)(s^2 + 0.6\,s + 16)}$$

Calcolare inoltre:

a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;

b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;

c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:



$$y_\infty = 15, \qquad T_a \simeq 10\,\mathrm{s}, \qquad T_\omega \simeq 1.58\,\mathrm{s}.$$

Controlli Automatici A

15 Aprile 2013 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Siano $X_1(s)$ e $X_2(s)$ le trasformate di Laplace delle funzioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Il teorema della trasformata del prodotto integrale afferma che

$$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty x_1(\tau)\,x_2(t-\tau)\,d\tau\right] = X_1(s)\,X_2(s)$$

2. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

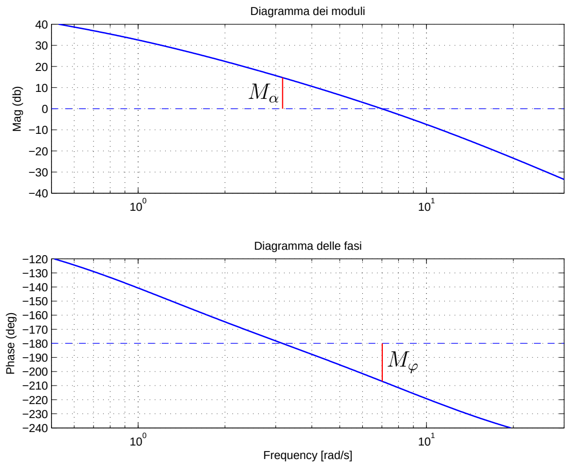
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+2}{(s+3)(s+1)^2} \qquad \rightarrow \qquad \dddot{y} + 5\,\ddot{y} + 7\,\dot{y} + 3\,y = \ddot{x} + 2\,x$$

3. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco, relativi ad un sistema $G(s)$ a fase minima.

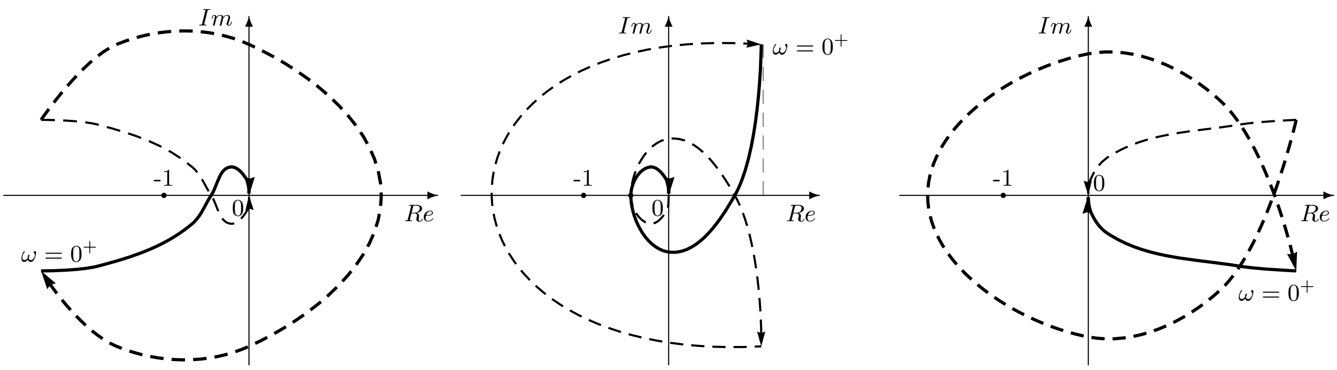
   Leggere il margine di fase M_φ e il margine di ampiezza M_α del sistema $G(s)$:

   $$M_\varphi \simeq -27 \text{ gradi}$$

   $$M_\alpha \simeq 0.184 \ (-14.7 \text{ db}),$$



4. Chiudere all'infinito i seguenti diagrammi di Nyquist. Nota: tutti i diagrammi di Nyquist fanno riferimento a sistemi con tutti i poli a parte reale negativa eccezion fatta per un polo semplice o doppio nell'origine.



5. Un sistema $G(s)$ retroazionato è asintoticamente stabile:

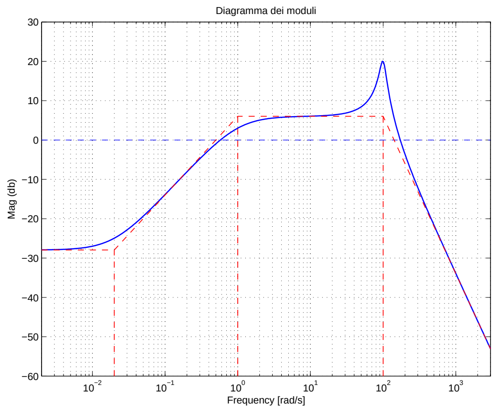
   ⊗ se e solo se il suo margine di fase M_φ è positivo;

   ○ se e solo se il suo margine di ampiezza M_a è positivo;

   ○ se e solo se il suo margine di fase M_φ è maggiore di $\frac{\pi}{2}$;

   ⊗ se e solo se il suo margine di ampiezza M_a è maggiore di 1;

6. Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli di un sistema $G(s)$ a fase minima.



Utilizzando la formula di Bode, calcolare in modo approssimato la fase φ del sistema $G(s)$ in corrispondenza delle seguenti pulsazioni ω:

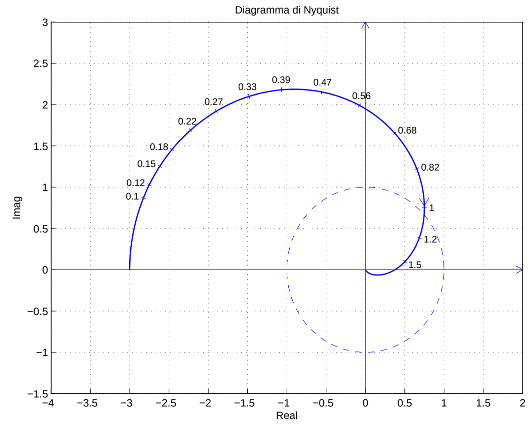
$$\omega_1 = 0.02 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 \simeq \tfrac{\pi}{4}$$

$$\omega_2 = 0.15 \quad \rightarrow \quad \varphi_2 \simeq \tfrac{\pi}{2}$$

$$\omega_3 = 100 \quad \rightarrow \quad \varphi_3 \simeq -\tfrac{\pi}{2}$$

$$\omega_4 = 2000 \quad \rightarrow \quad \varphi_4 \simeq -\pi$$

7. Sia dato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \dfrac{-3}{(s+1)^3}$.



In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

$$-2.667 = -\frac{8}{3} < K < \frac{1}{3} = 0.333$$

Calcolare dal grafico, in modo approssimato, i valori limite dell'intervallo di ammissibilità del parametro K.

8. Calcolare la posizione σ_a dell'asintoto verticale del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$:

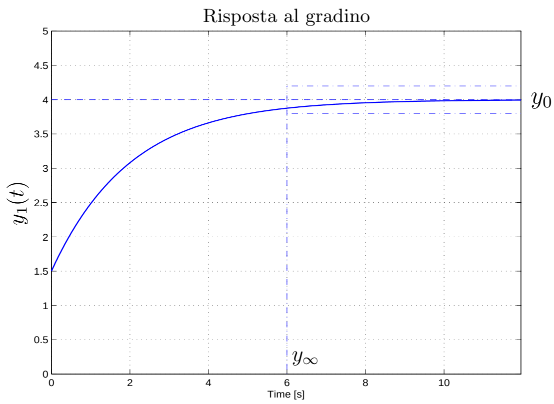
$$G(s) = \frac{(2\,s-5)^2}{s(10\,s^2+4\,s-8)} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_a = -\frac{25}{8}\left(-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16} = 0.937$$

9. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $2\dot{y}(t) + 3\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 5$.

Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$2\,(s\,Y(s) - 5) + 3\,Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{5}{s+1.5} \quad \rightarrow \quad y(t) = 5\,e^{-1.5\,t}.$$

10. Utilizzando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino del seguente sistema:



$$G(s) = \frac{3\,s+4}{2\,s+1}$$

Calcolare il valore iniziale y_0, il valore finale y_∞ e il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$:

$$y_0 = 1.5, \qquad y_\infty \simeq 4\,\text{s}, \qquad T_a \simeq 6\,\text{s}.$$

11. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(2+3\,s)(2\,s-1)}{s^2(s+5)^2}\,e^{-4\,t_0 s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{4+9\omega^2}\,\sqrt{1+4\omega^2}}{\omega^2(25+\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = \arctan\frac{3\omega}{2} - \arctan 2\omega - 2\arctan\frac{\omega}{5} - 4\,t_0\,\omega \end{cases}$$