Controlli Automatici - Prima parte
12 Aprile 2023 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = [5\,t^5\,e^{-3\,t} + \cos(4\,t)]\,e^{-2\,t}, \qquad x_2(t) = 5(t-3) + 4t^3 + \delta(t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{600}{(s+5)^6} + \frac{(s+2)}{(s+2)^2+16}, \qquad X_2(s) = \frac{5}{s^2} - \frac{15}{s} + \frac{24}{s^4} + 1.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{42}{(s+1)\,(s+2)\,(1+4s)} \qquad G_2(s) = 7 + \frac{2\,(s+4)}{(s+4)^2+9}$$

Soluzione:

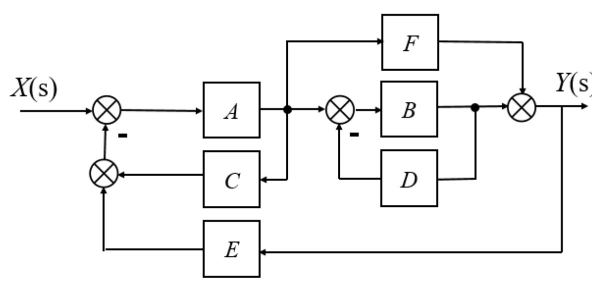
$$g_1(t) = -14\,e^{-t} + 6\,e^{-2\,t} + 8\,e^{-\frac{t}{4}}, \qquad g_2(t) = 7\,\delta(t) + 2\,\cos(3\,t)\,e^{-4\,t}.$$

Infatti, per la funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[G_1(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{42}{(s+1)\,(s+2)\,(1+4s)}\right]\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{14}{(s+1)} + \frac{6}{(s+2)} + \frac{8}{(s+\frac{1}{4})}\right] = -14\,e^{-t} + 6\,e^{-2\,t} + 8\,e^{-\frac{t}{4}}\end{aligned}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G(s) = \frac{A\,B + A\,F\,(1 + B\,D)}{1 + A\,C + B\,D + A\,B\,E + A\,F\,E + A\,C\,B\,D + A\,F\,E\,B\,D}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

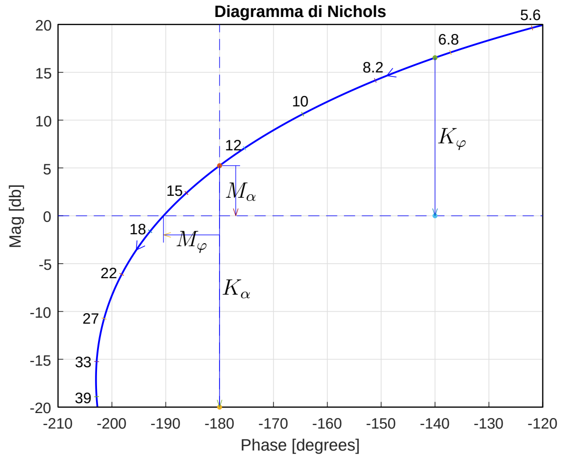
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 40$;

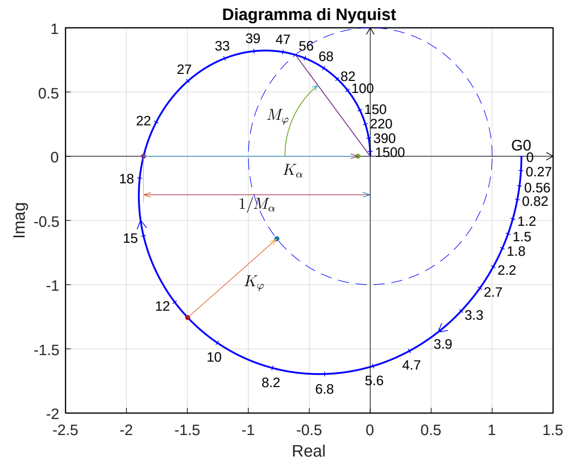
c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 10$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = -5.24$ db $= 0.547$

c.2) $M_\varphi = -10.42$

c.3) $K_\varphi = -16.53$ db $= 0.149$

c.4) $K_\alpha = -25.24$ db $= 0.055$

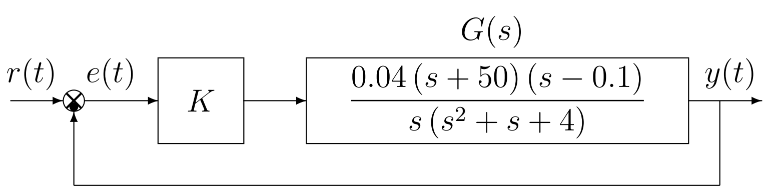
c.1) $M_a = 0.537$

c.2) $M_\varphi = -52.12$

c.3) $K_\varphi = 0.511$

c.4) $K_\alpha = 0.0537$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{0.04\,(s+50)\,(s-0.1)}{s\,(s^2+s+4)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (0.04K+1)s^2 + (1.996K+4)s + (-0.2K) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1.996K+4 \\ 2 & 0.04K+1 & -0.2K \\ 1 & 2.356K + 0.07984K^2 + 4 & \\ 0 & -0.2K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$0.04K+1>0, \qquad 2.356K+0.07984K^2+4>0, \qquad -0.2K>0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -25, \qquad (K < -27.7004) \cup (K > -1.8086), \qquad K < 0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K_1 = -1.8086 < K < 0.$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{-0.2K_1}{0.04K_1+1}} = 0.62445.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

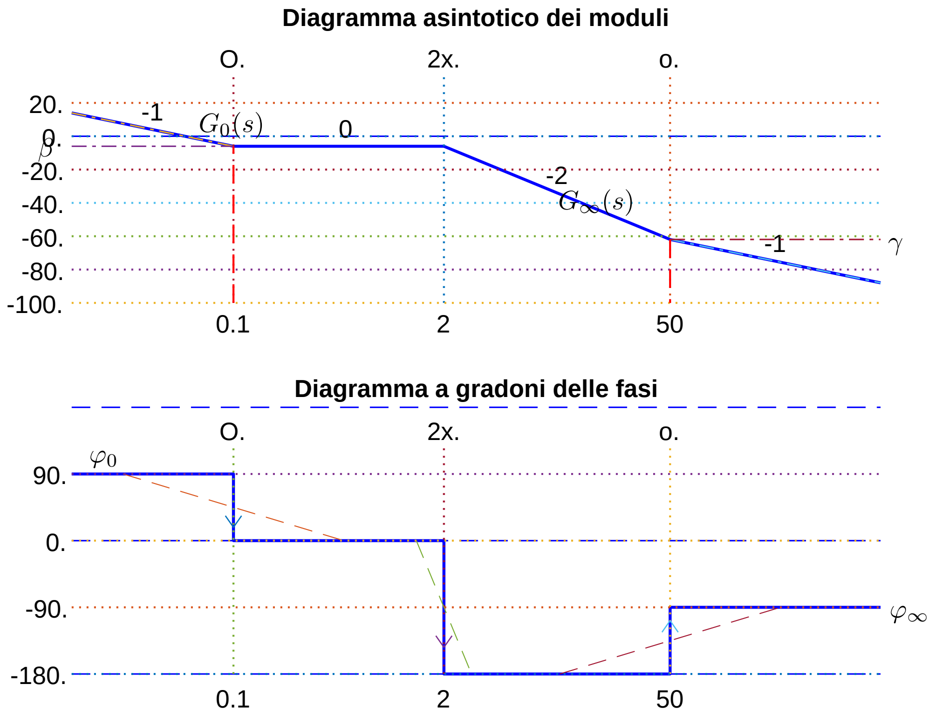


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{-0.05}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{0.04}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3\,\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 50$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.1} = 0.5 = -6.021 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=50} = 0.0008 = -61.94 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati: $\delta_1 = 0$ and $\delta_2 = 0.25$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{10}{-1} + \frac{1}{50} - \frac{1}{4} = -10.23 < 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto.

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = -0.05 \cdot (-10.23) = 0.5115.$$

Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi.$$

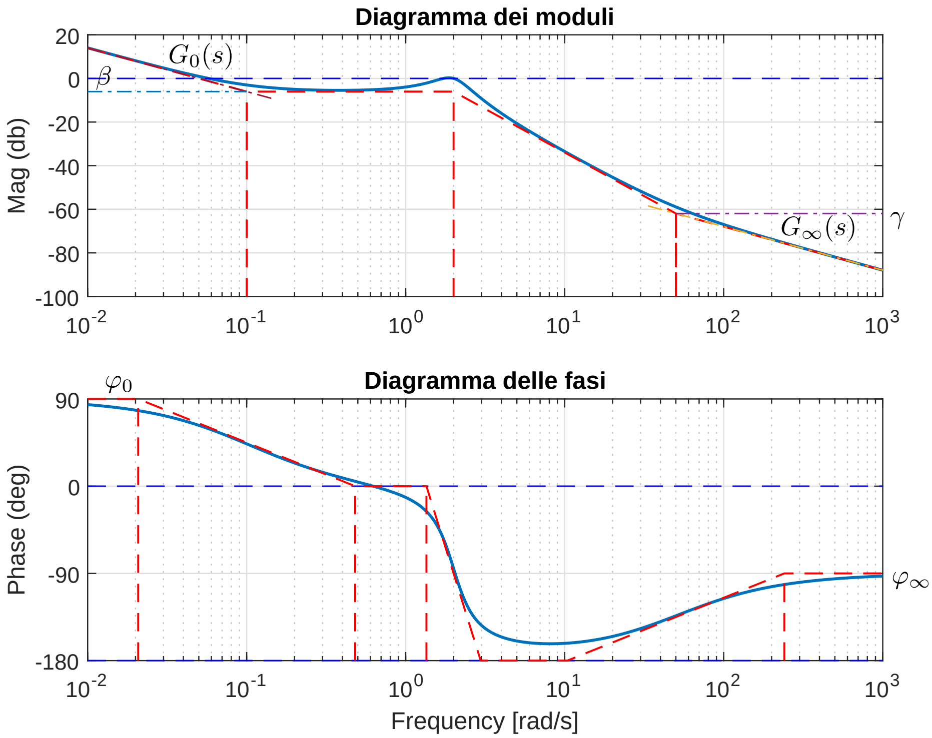


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

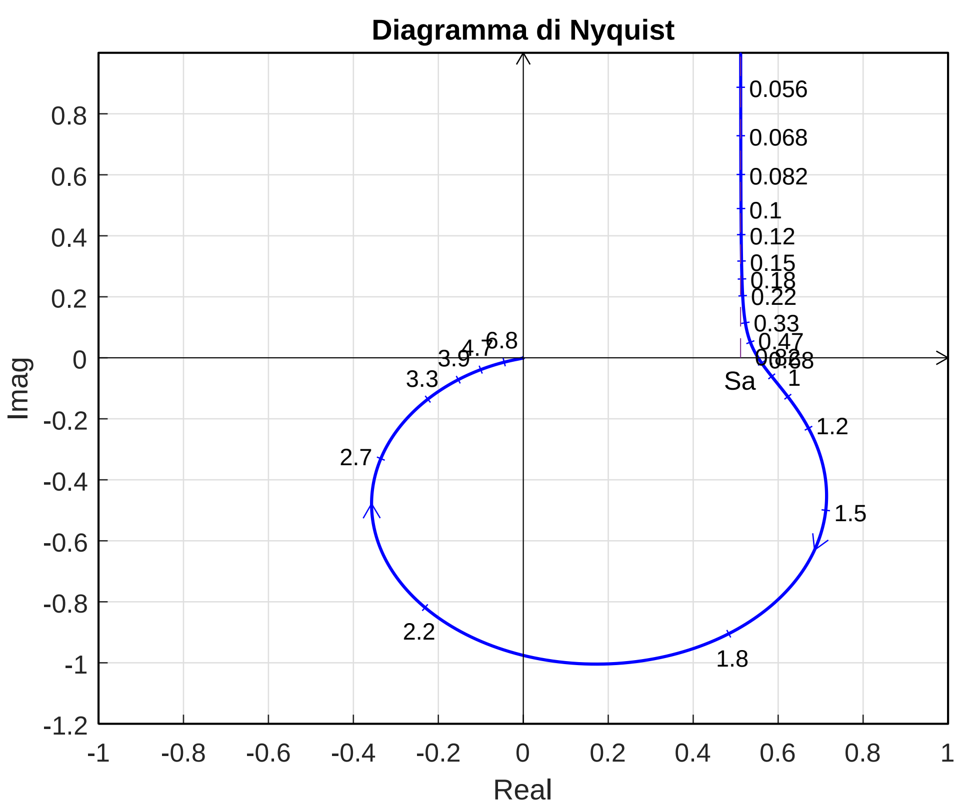


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\pi$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = 0.1 - 50 + 1 = -48.9 < 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K_1} = -\frac{1}{-1.8087} = 0.5528.$$

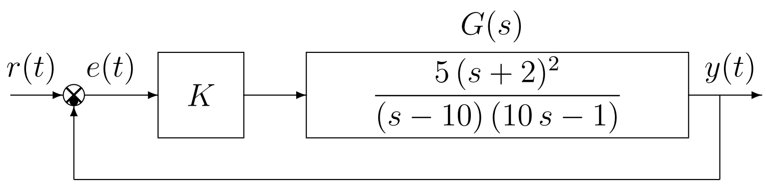
in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 0.62445$.

d.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $|e_v| = 0.01$ per ingresso a rampa $x(t) = 5t$.

Soluzione. L'errore a regime e_p del sistema retroazionato per ingresso a rampa $x(t) = 3t$ è:

$$e_v = \frac{R_0}{K_v} = \frac{5}{0.05\,K} = 0.01 \qquad \to \qquad K = \frac{500}{0.05} = 10000.$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{5\,(s+2)\,(s+2)}{(s-10)\,(10\,s-1)} = 0 \qquad \to \qquad (5K+10)s^2 + (20K-101)s + (20K+10) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 5K+10 & 20K+10 \\ 1 & 20K-101 & \\ 0 & 20K+10 & \end{array}$$

Imponendo che tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh siano positivi:

$$5K+10 > 0, \qquad 20K-101 > 0, \qquad 20K+10 > 0,$$

si ricava:

$$K > -2, \quad K > 5.05, \quad K > -0.5. \qquad \Rightarrow \qquad K > 5.05 = K^*.$$

Imponendo che tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh siano negativi:

$$5K+10 < 0, \qquad 20K-101 < 0, \qquad 20K+10 < 0,$$

si ricava:

$$K < -2, \quad K < 5.05, \quad K < -0.5. \qquad \Rightarrow \qquad K < -2 = K_1.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$(K < -2 = K_1) \cup (K > 5.05 = K^*).$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{20K^*+10}{5K^*+10}} = 1.7745.$$

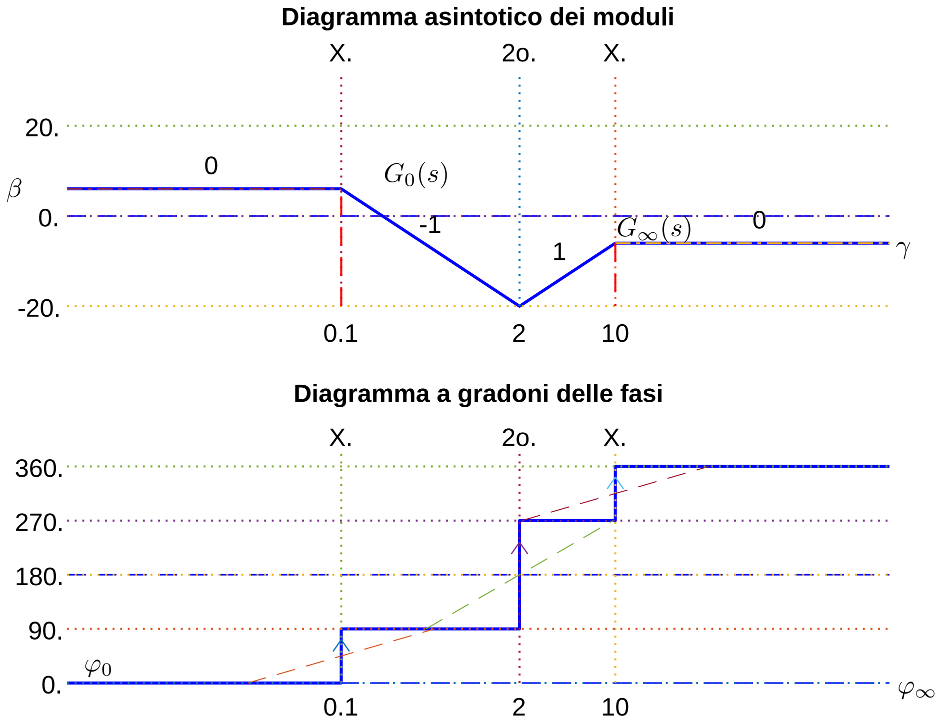


Figura 4: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

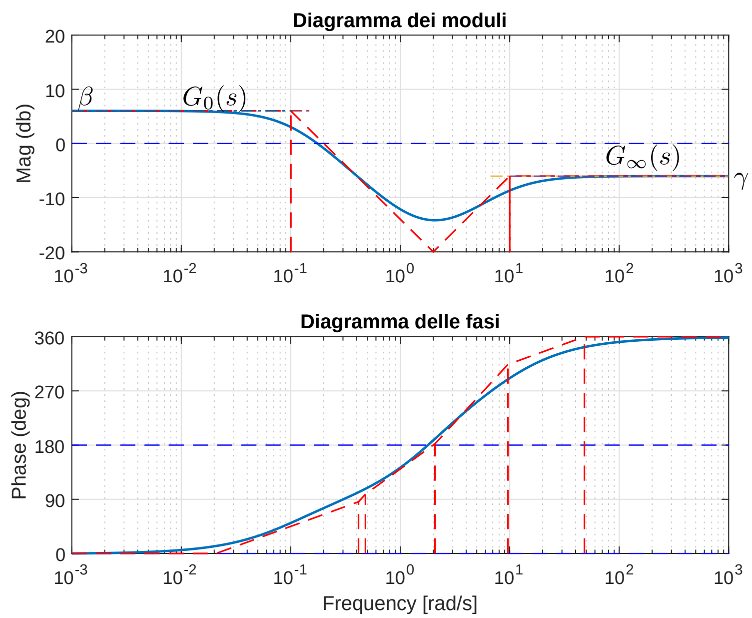


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

Soluzione.

I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = 2, \qquad\qquad G_\infty(s) = 0.5.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \qquad\qquad \varphi_\infty = 0.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.1} = 2 = 6.021 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 0.5 = -6.021 \text{ db}.$$

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione.

Il diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ è mostrato in Fig. 6.

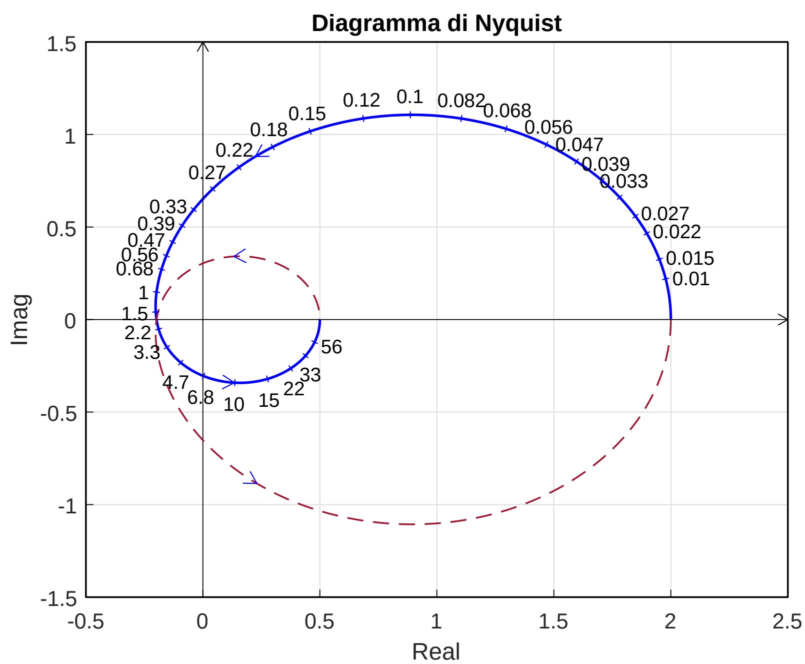


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = 0$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{-10} - \frac{10}{-1} = 11.1 > 0.$$

Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = 0$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = +2\,\pi.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $+2\,\pi$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = 0$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = 0$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

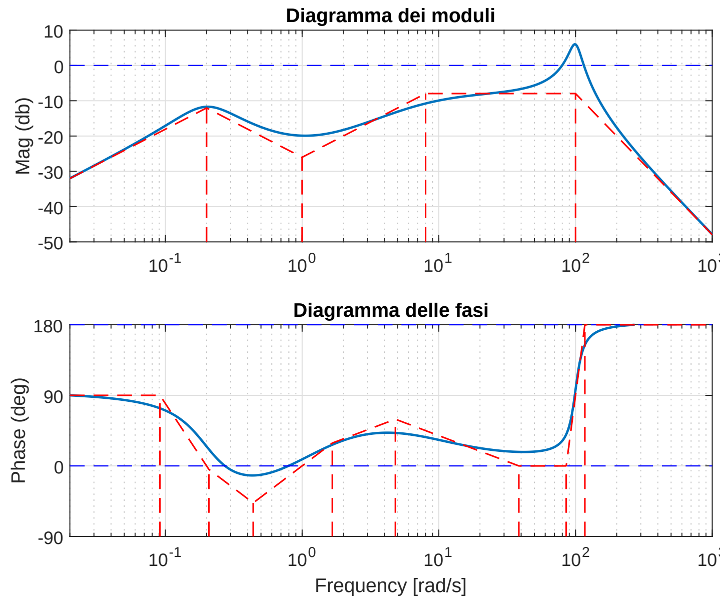
$$\Delta_p = -2 - 2 - 10 - 0.1 = -14.1 < 0.$$

Per $K = K^*$, l'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{5.05} = -0.198.$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 1.7745$.

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.



Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{4000s(s+1)^2}{(s^2+0.2s+0.2^2)(s+8)(s^2-20s+100^2)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{4000\, s\, (s+1)^2}{(s^2+0.2s+0.2^2)(s+8)(s^2-20s+100^2)}$$

Il valore $K = 4000$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100\,j} = \left|\frac{K}{s^2}\right|_{s=100\,j} = \frac{K}{100^2} = \gamma \simeq -8 \text{ db} \simeq 0.4 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 4000.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati instabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{10} = 0.1.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 14$ db $\simeq 5$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli. Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati stabili è $\delta = 0.5$:

Controlli Automatici - Prima parte

12 Aprile 2023 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

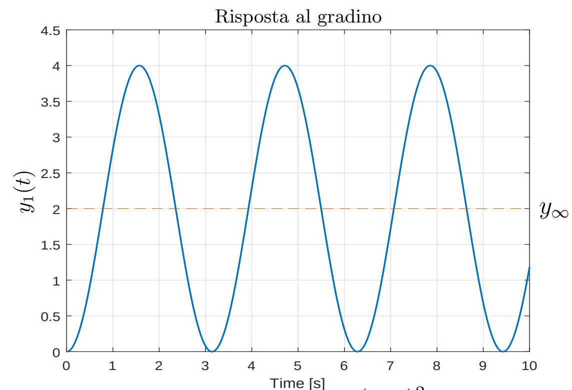
Si risponda alle seguenti domande.

1. Siano $Y(s)$ e $X(s)$ le trasformate di Laplace dei segnali temporali $y(t)$ e $x(t)$. Scrivere l'equazione differenziale, in funzione di $x(t)$, $y(t)$ e delle loro derivate prime e successive, corrispondente alla seguente funzione di trasferimento $\frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s+3)^2}{4\,s^4+3\,s^3+s^2+5\,s+2} \quad \rightarrow \quad 4\,\ddddot{y}(t)+3\,\dddot{y}(t)+\ddot{y}(t)+5\,\dot{y}(t)+2\,y(t) = \ddot{x}(t)+6\,\dot{x}(t)+9\,x(t)$$

2. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino del seguente sistema:

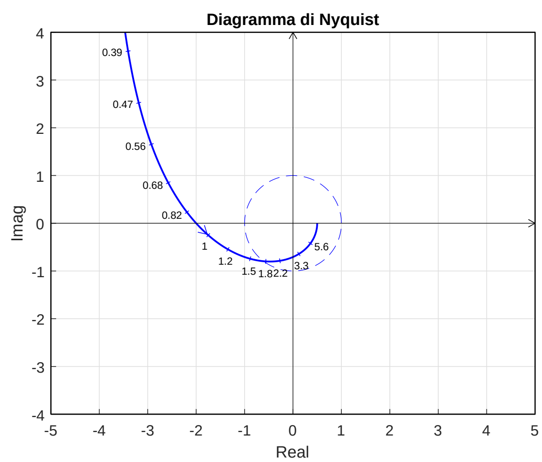
$$G(s) = \frac{8}{(s^2+4)}$$



Calcolare il valore iniziale y_0, il valore y_∞ e il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$:

$$y_0 = 0, \qquad y_\infty \simeq 2, \qquad T_a \simeq \infty$$

3. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{0.5(s+2)^2}{s(s-1)}$.



Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

- ○ $-2 < K < \frac{1}{2}$;
- ○ $-\frac{1}{2} < K < 2$;
- ⊗ $(K < -2) \cup (K > \frac{1}{2})$;
- ○ $(K < -\frac{1}{2}) \cup (K > 2)$;

4. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale $x(t)$:

$$x(t) = 9 + 0.5\sin(3\,t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{5\,s}{(s+4)^2}} \longrightarrow y(t) \simeq 0 + 0.3\,\sin\left(3\,t + \tfrac{\pi}{2} - 2\,\arctan\left(\tfrac{3}{4}\right)\right)$$

Infatti si ha che:

$$G(j3) = \frac{15\,j}{(j3+4)^2} \quad \rightarrow \quad |G(j3)| = 0.6, \qquad \arg G(j3) = \frac{\pi}{2} - 2\,\arctan\left(\frac{3}{4}\right)$$

5. Nella Tabella di Routh, le soluzioni dell'equazione ausiliaria sono:

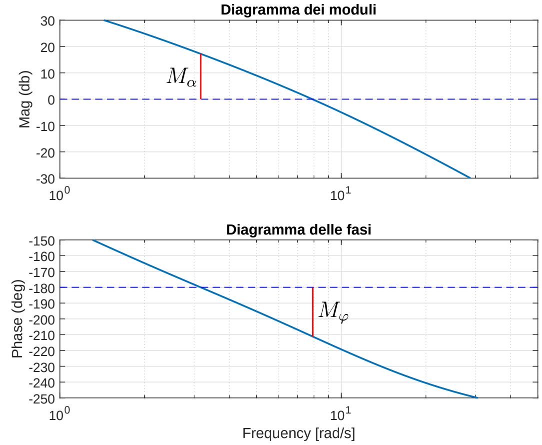
- ⊗ Sempre in numero pari
- ⊗ Un sottoinsieme delle soluzioni dell'equazione caratteristica
- ○ Sempre complesse coniugate
- ⊗ Simmetriche rispetto all'origine del piano complesso

6. Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode riportati a fianco, relativi ad un sistema $G(s)$ a fase minima.

   Leggere il margine di fase M_φ e il margine di ampiezza M_α del sistema $G(s)$:

   $$M_\varphi \simeq -31.19 \text{ gradi}$$

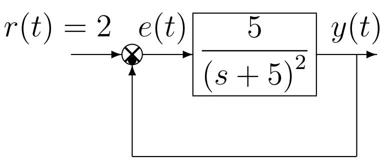
   $$M_\alpha \simeq 0.138 = -17.214 \text{ db}$$



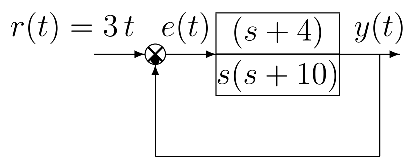
7. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $f(t)$. Fornire l'enunciato della proprietà della "Trasformata dell'integrale":

   $$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

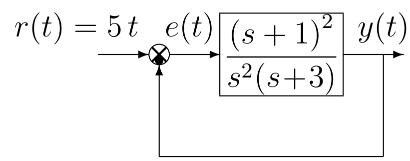
8. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{2}{1+\frac{1}{5}} = \frac{10}{6} = 1.666$$



$$e(\infty) = \frac{3}{\frac{4}{10}} = 7.5$$



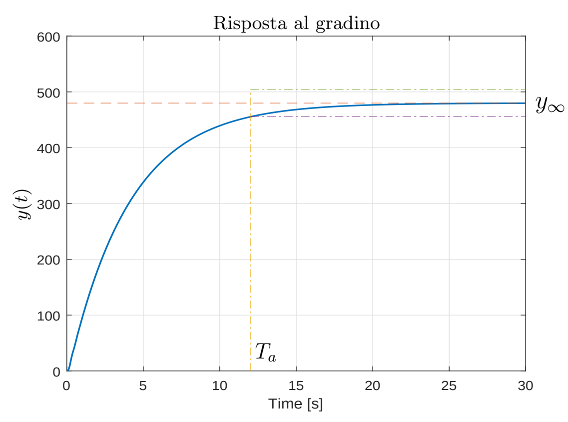
$$e(\infty) = \frac{5}{\infty} = 0$$

9. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

   $$G(s) = \frac{400(9+0.4s)(2s+30)(s^2+12s+40^2)}{(\mathbf{4s+1})(0.5s+3)(s^2+16s+400)(s^2+10s+300)}$$

   Calcolare inoltre:
   a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
   b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
   c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

   $$y_\infty = 480, \qquad T_a \simeq 12\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq \nexists$$



10. La funziona di risposta armonica $F(\omega) = G(j\omega)$:

    - [x] È una funzione complessa di variabile reale
    - [ ] È una funzione complessa di variabile complessa
    - [x] Descrive la risposta a regime di un sistema dinamico lineare tempo-invariante asintoticamente stabile sottoposto ad ingresso sinusoidale
    - [ ] Descrive la risposta durante il transitorio di un sistema dinamico lineare tempo-invariante asintoticamente stabile sottoposto ad ingresso sinusoidale