Controlli Automatici - Prima parte
11 Aprile 2022 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 5\,t^2\,e^{-4\,t} - 3\,e^{-5\,t}\sin(2t), \qquad x_2(t) = 3\,\delta(t-2) + 4\,e^t\cos(5t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{10}{(s+4)^3} - \frac{6}{(s+5)^2+4}, \qquad X_2(s) = 3\,e^{-2s} + \frac{4(s-1)}{(s-1)^2+5^2}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{9}{s(s+3)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{3\,(s+5)\,e^{-2\,s}}{(s+5)^2+49}$$

Soluzione:

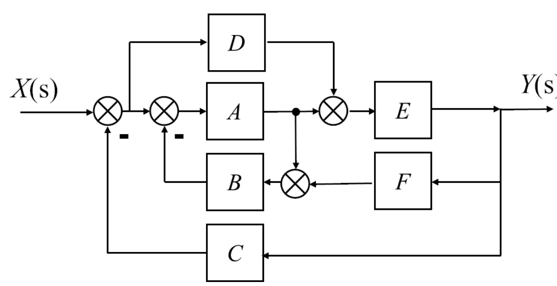
$$g_1(t) = 1 - e^{-3t} - 3\,t\,e^{-3t}, \qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 3\,e^{-5(t-2)}\cos(7\,(t-2)) & t \geq 2 \end{cases}$$

Infatti, per la funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{9}{s(s+3)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+3)} - \frac{3}{(s+3)^2}\right] = 1 - e^{-3t} - 3\,t\,e^{-3t}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G(s) = \frac{A\,E + D\,E\,(1+A\,B\,)}{1 + A\,B\, + A\,E\,F\,B\, + A\,E\,C\, + D\,E\,C\, + A\,B\,D\,E\,C}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

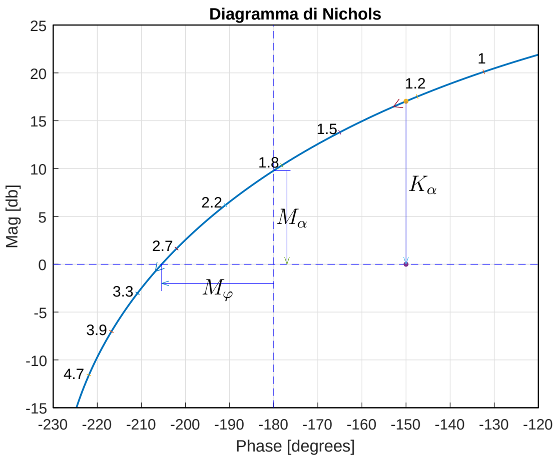
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 30$;

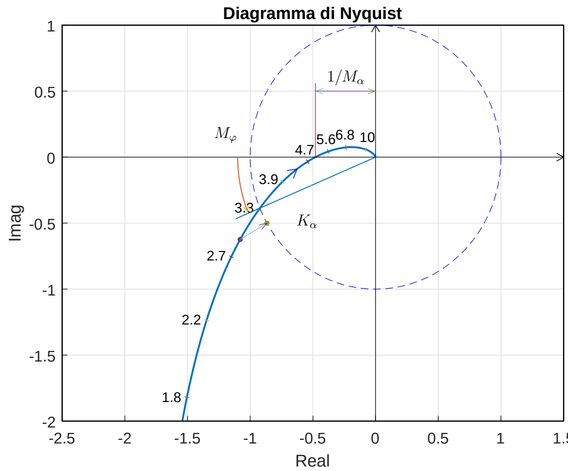
c.4) la risposta a regime $y_r(t)$ del sistema $G(s)$ ad un ingresso sinusoidale $x(t) = 3\sin(2.7t)$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



c.1) $\quad M_a = -9.79 \text{ db } = 0.32$

c.2) $\quad M_\varphi = -25.4$

c.3) $\quad K_\varphi = -17.035 \text{ db } = 0.14$

c.4) $$y_r(t) = \begin{cases} 3 \cdot 1.21 \sin(2.7t - 202^\circ) \\ 3.63 \sin(2.7t - 202^\circ) \end{cases}$$

c.1) $\quad M_a = 2.08$

c.2) $\quad M_\varphi = 22.7$

c.3) $\quad K_\varphi = 0.801$

c.4) $$y_r(t) = \begin{cases} 3 \cdot 1.38 \sin(2.7t - 147^\circ) \\ 4.14 \sin(2.7t + 213^\circ) \end{cases}$$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:

$$r(t) \to \bigotimes \xrightarrow{e(t)} \boxed{K} \to \underbrace{\boxed{\frac{50(s^2+0.4s+0.64)}{s(s-10)(s-200)}}}_{G(s)} \to y(t)$$

d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{50K(s^2+0.4s+0.64)}{s(s-10)(s-200)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (50K - 210)s^2 + (20K + 2000)s + 32K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (20K+2000) \\ 2 & (50K-210) & 32K \\ 1 & (20K+2000)(50K-210) - 32K & \\ 0 & 32K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 4.2, \qquad 1000\,K^2 + 95868\,K - 420000 > 0, \qquad K > 0.$$

La seconda disequazione é soddisfatta per i valori di K esterni ai due valori limite K_1 e K_2:

$$K < K_1 = -100.06 \quad \cup \quad K > K_2 = 4.196$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > K^* = 4.2$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è, in modo approssimato:

$$\omega^* \simeq \sqrt{20K^* + 2000} = \sqrt{2084} = 45.65.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

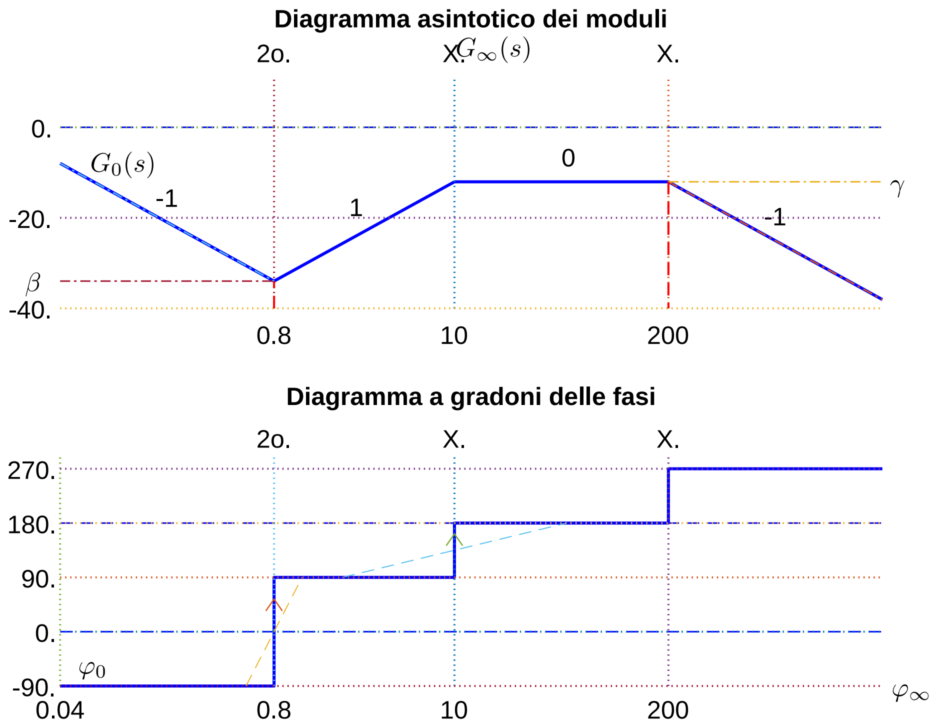


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{32}{2000\, s} = \frac{0.016}{s} = \frac{K}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{50}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.8$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 200$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.8} = \frac{0.016}{0.8} = 0.02 = -33.97 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=200} = \frac{50}{200} = 0.25 = -12 \text{ db}.$$

Essendo $M_{\omega_n} = 6$ db $= 2$, il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri stabili è $\delta = 1/(2M_{\omega_n}) = 0.25$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = \frac{0.4}{0.64} + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} = 0.73 > 0.$$

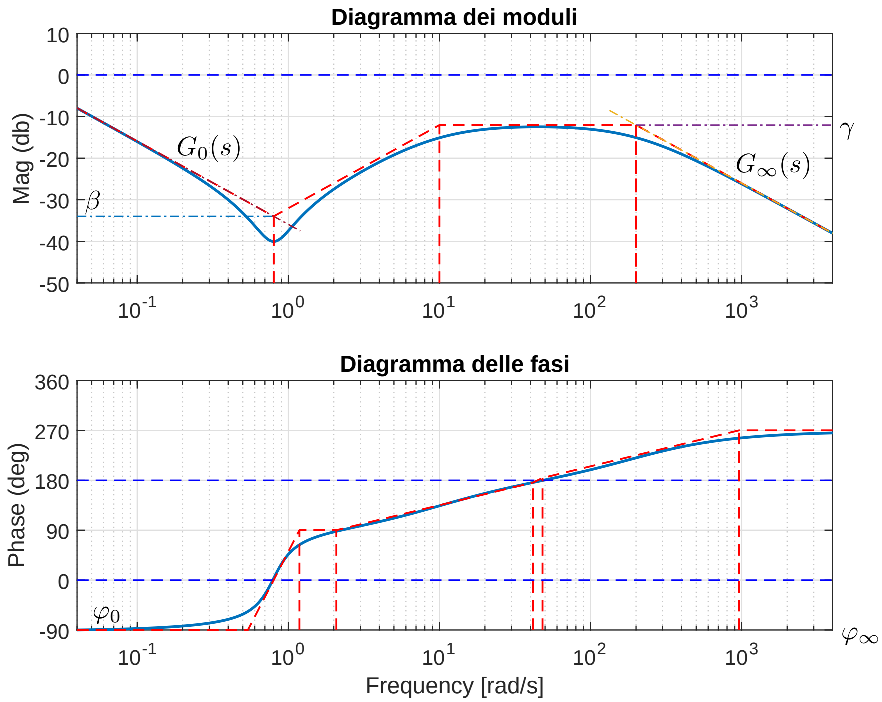


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

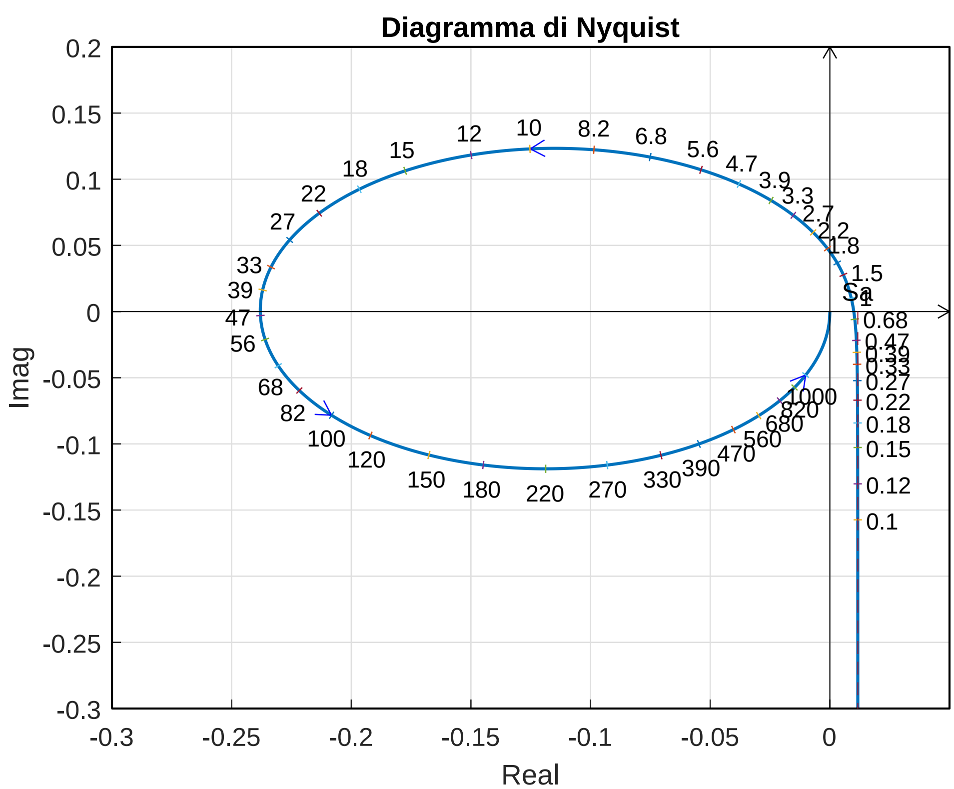


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = 0.016 \cdot 0.73 = 0.0117.$$

La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di 2π in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = \frac{3\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p delle pulsazioni critiche del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -0.4 - 10 - 200 = -210.4 < 0.$$

L'intersezione con il semiasse reale positivo avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{4.2} = 0.238$$

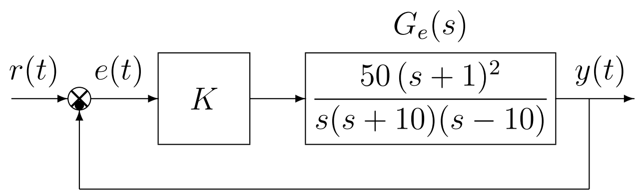
in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 45.65$.

d.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $|e_v| = 0.01$ per ingresso a rampa $x(t) = 3t$.

Soluzione. L'errore a regime e_p del sistema retroazionato per ingresso a rampa $x(t) = 3t$ è:

$$e_v = \frac{R_0}{K_v} = \frac{3}{0.016\,K} = 0.01 \qquad \to \qquad K = \frac{300}{0.016} = 18750.$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{50\,K\,(s+1)^2}{s(s+10)(s-10)} = 0 \qquad \to \qquad s^3 + 50Ks^2 + 100(K-1)s + 50K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100(K-1) \\ 2 & 50K & 50K \\ 1 & 5000K(K-1) - 50K & \\ 0 & 50K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile quando tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno:

$$K > K^* = \frac{5050}{5000} = 1.01$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è :

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{50K^*}{50K^*}} = 1$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

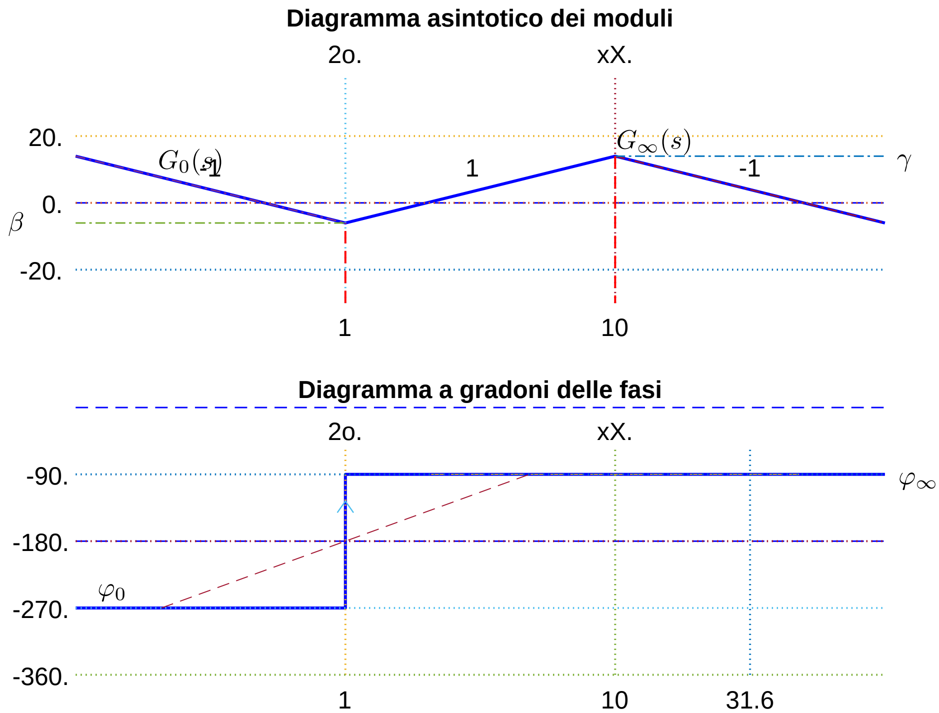


Figura 4: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

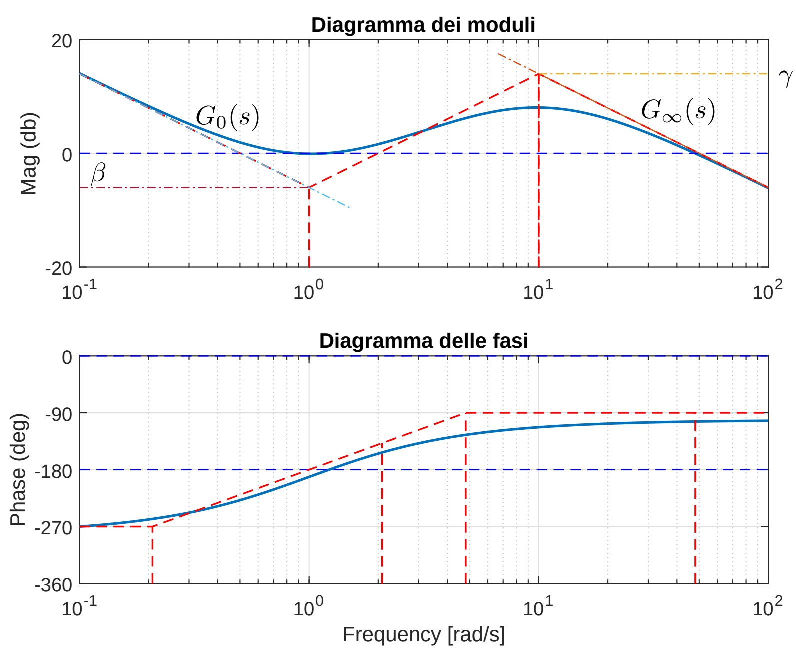


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

Soluzione.

I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 5. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{K}{s} = -\frac{0.5}{s}, \qquad G_\infty(s) = \frac{50}{s}$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}, \qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 0.5 = -6 \text{ db}, \qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 5 = 14 \text{ db}.$$

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale

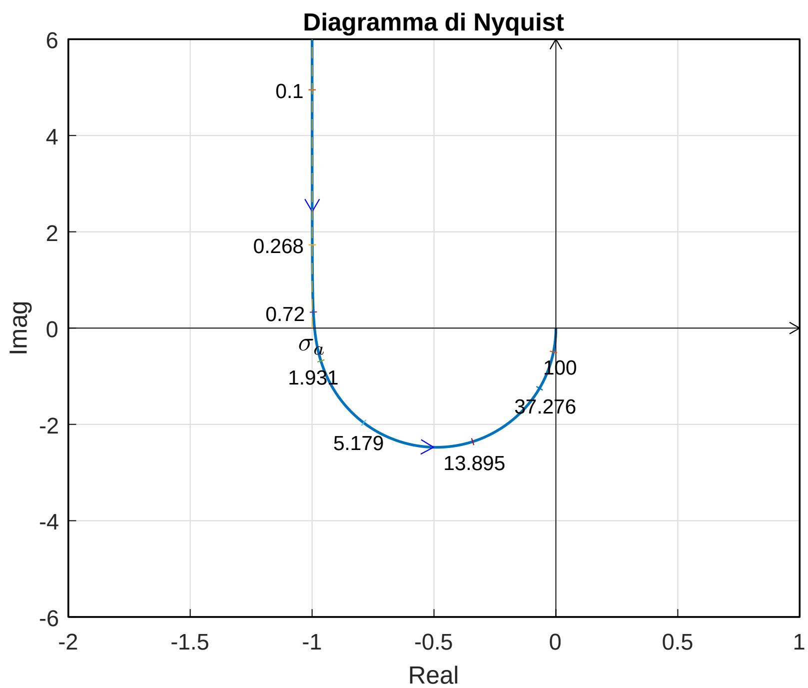


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta\tau = 2 - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 2 > 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale.

$$\sigma_a = \Delta_\tau K = -1$$

La variazione di fase

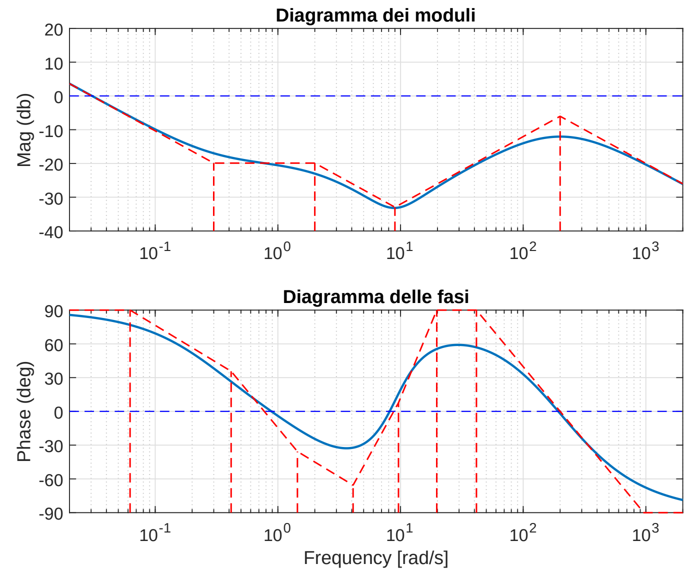
$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di π in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Esiste una sola intersezione σ^* con l'asse reale:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{1.01} = -0.99$$

in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 1$.

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.



Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{100(s-0.3)(s^2+9s+81)}{s(s+2)(s+200)^2}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

<u>Soluzione</u>:

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{100(s-0.3)(s^2+9s+81)}{s(s+2)(s+200)^2}.$$

Il valore $K = 100$ si determina, per esempio, calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.3$:

$$|G_0(s)|_{s=0.3\,j} = \left|\frac{K\,(-0.3)\;81}{s\;2\;200^2}\right|_{s=0.3\,j} = 0.001\;K = \beta \simeq -20 \text{ db} \simeq 0.1 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 100.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati instabili è $\delta = 0.5$. Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2 M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{2\;0.5} = 1.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq -6$ db $\simeq 0.5$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

Controlli Automatici - Prima parte

11 Aprile 2022 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Siano $Y(s)(s)$, $X_1(s)$ e $X_2(s)$ le trasformate di Laplace dei segnali temporali $y(t)$, $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Scrivere, la trasformata di Laplace $Y(s)$, in funzione delle trasformate di Laplace $X_1(s)$ e $X_2(s)$, corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t) + 5\,\ddot{y}(t) + \alpha\,\dot{y}(t) + 3\,y(t) = 3\,x_1(t) + \dot{x}_2(t) + 4\,x_2(t) \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{3\,X_1(s) + (s+4)X_2(s)}{s^3 + 5\,s^2 + \alpha\,s + 3}$$

Applicando il criterio di Routh, dire per quali valori del parametro α la funzione $Y(s)$ è stabile:

$$\alpha >= \frac{3}{5} = 0.6$$

Infatti, applicando il criterio di Routh al denominatore della funzione $Y(s)$

$$s^3 + 5\,s^2 + \alpha\,s + 3 = 0$$

si ottiene la seguente tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc l}
3 & 1 & \alpha & \rightarrow \\
2 & 5 & 3 & \rightarrow \\
1 & 5\alpha - 3 & & \rightarrow \quad \alpha > \frac{3}{5} = 0.6 \\
0 & 3 & & \rightarrow
\end{array}$$

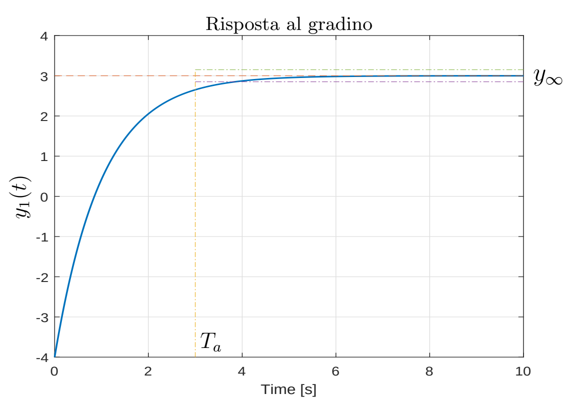
La funzione $Y(s)$ é stabile per $\alpha > 0.6$.

2. Utilizzando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{3 - 4s}{1 + s}$$

Calcolare il valore iniziale y_0, il valore finale y_∞ e il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$:

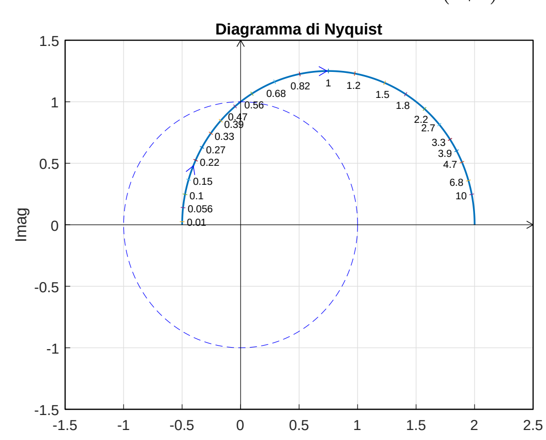
$$y_0 = -4, \qquad y_\infty \simeq 3, \qquad T_a \simeq 3\,\text{s}.$$



3. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{(4s-1)}{2(s+1)}$.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

- ⊗ $-\frac{1}{2} < K < 2$;
- ○ $-2 < K < \frac{1}{2}$;
- ○ $(K < -\frac{1}{2}) \cup (K > 2)$;
- ○ $(K < -2) \cup (K > \frac{1}{2})$;



4. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 4 + 4\cos(2t) \longrightarrow \boxed{\overset{G(s)}{\dfrac{4(s-2)}{(s+2)}}} \longrightarrow y(t) \simeq -16 + 16\cos\left(2t - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

Infatti si ha che:

$$G(j2) = \frac{4(j2-2)}{(j2+2)} \qquad \rightarrow \qquad |G(j2)| = 4, \qquad \arg G(j2) = -\frac{\pi}{2}$$

5. In un sistema del 2^o ordine la distanza del poli dall'origine (a parità di direzione) influisce sui seguenti parametri della risposta al gradino

⊗ tempo di ritardo ⊗ tempo di salita
⊗ tempo di assestamento ○ coefficiente di smorzamento

6. In figura sono mostrati i diagrammi di Bode di un sistema lineare $G(s)$. Nei limiti della precisione del grafico, calcolare:

a) la posizione del polo dominante p_1 del sistema $G(s)$:

$$p_1 \simeq -0.3$$

b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino del sistema $G(s)$:

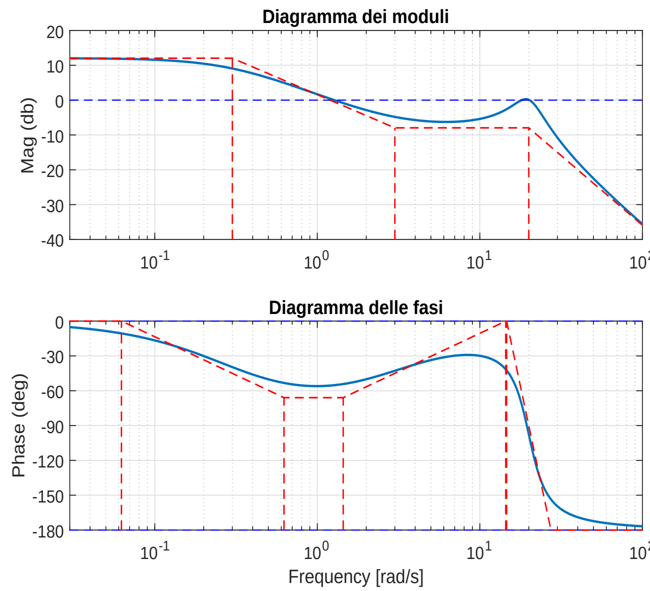
$$T_a \simeq \frac{3}{0.3} \text{ s} = 10 \text{ s.}$$

c) i margini di stabilità del sistema $G(s)$:

$$M_\varphi \simeq 124.8^\circ, \qquad M_a \simeq \infty.$$

d) il guadagno statico K_0 del sistema $G(s)$:

$$K_0 \simeq 12 \text{ db} \simeq 2$$



7. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $f(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della traslazione in s":

$$\mathcal{L}[e^{-a\,t} f(t)] = F(s+a)$$

8. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:

$$r(t) = 3 \;\; e(t) \;\; \boxed{\frac{3(s+2)}{(2+s)^2}} \;\; y(t) \qquad r(t) = 3\,t \;\; e(t) \;\; \boxed{\frac{(2+s)}{s^2(s+1)}} \;\; y(t) \qquad r(t) = 4\,t^2 \;\; e(t) \;\; \boxed{\frac{s+4}{s^2(s+1)}} \;\; y(t)$$

$$e(\infty) = \frac{3}{1+\frac{6}{4}} = \frac{12}{10} = 1.2 \qquad e(\infty) = \frac{3}{\infty} = 0 \qquad e(\infty) = \frac{8}{4} = 2$$

9. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

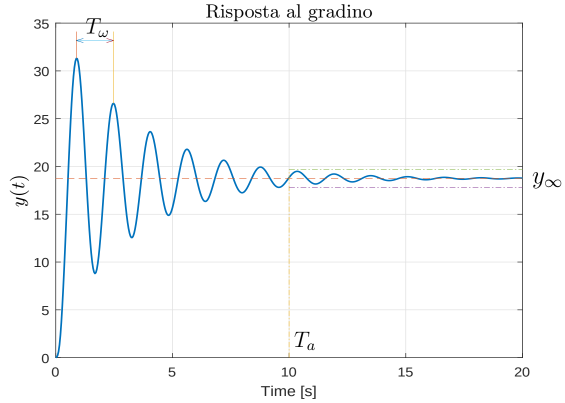
$$G(s) = \frac{80(6+0.5s)(2s+20)(s^2+8s+30^2)}{(3s+18)(0.5s+4)(\mathbf{s^2+0.6s+16})(s^2+10s+400)}$$

Calcolare inoltre:

a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;

b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;

c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:



$$y_\infty = 18.75, \qquad T_a \simeq 10\,\mathrm{s}, \qquad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{4} = 1.57\,\mathrm{s}$$

10. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(5\,s-2)(1+4\,s)}{s^2(5+s)^2}\,e^{-2\,t_0 s} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rl} M(\omega) = & \dfrac{\sqrt{4+25\omega^2}\sqrt{1+16\omega^2}}{\omega^2(25+\omega^2)} \\[2ex] \varphi(\omega) = & \pi - \arctan\dfrac{5\omega}{2} + \arctan 4\omega - \pi - 2\arctan\dfrac{\omega}{5} - 2\,t_0\,\omega \end{array} \right.$$