Controlli Automatici - Prima parte
11 Aprile 2014 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = (3 + 2\,e^{-t})\cos(5t), \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = \cosh(\omega t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{3\,s}{s^2+25} + \frac{2\,(s+1)}{(s+1)^2+25}, \qquad X_2(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{s}{s^2-\omega^2}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G(s)$:

$$G_1(s) = \frac{e^{-2\,s}}{s(s+1)}, \qquad G_2(s) = 4 + \frac{20}{(s-3)^2+16}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 1 - e^{-(t-2)} & t \geq 2 \end{cases}, \qquad g_2(t) = 4\,\delta(t) + 5\,e^{3\,t}\,\sin(4\,t)$$

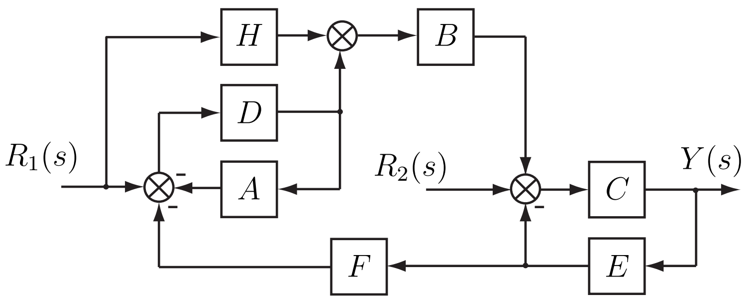
Infatti, per la funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\,s}}{s(s+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)}\right)e^{-2\,s}\right] = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 1 - e^{-(t-2)} & t \geq 2 \end{cases}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi riportato in figura, calcolare le funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{R_1(s)} = \frac{DBC + HBC(1+DA)}{1+AD+CE+DBCEF+ADCE}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{R_2(s)} = \frac{C(1+DA)}{1+AD+CE+DBCEF+ADCE}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

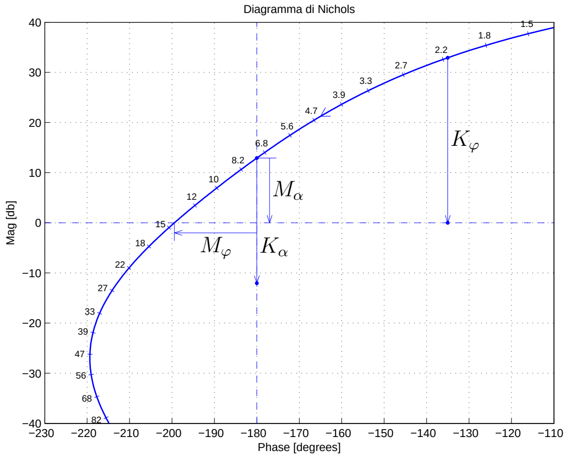
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45°$;

c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 4$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



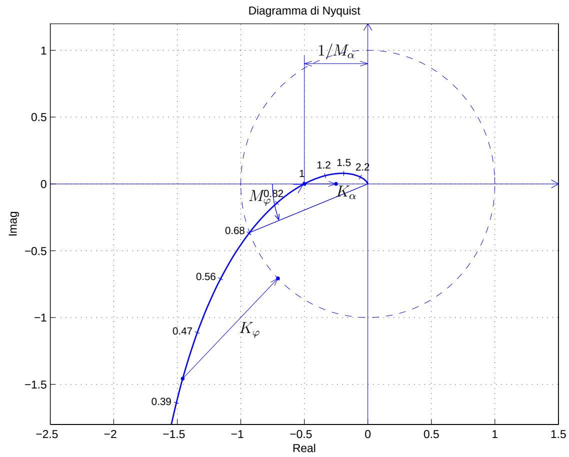
c.1) $M_a = -12.91$ db $= 0.226$

c.2) $M_\varphi = -19.42°$

c.3) $K_\varphi = -32.92$ db $= 0.022$

c.4) $K_\alpha = -24.95$ db $= 0.056$

$G_2(j\omega)$



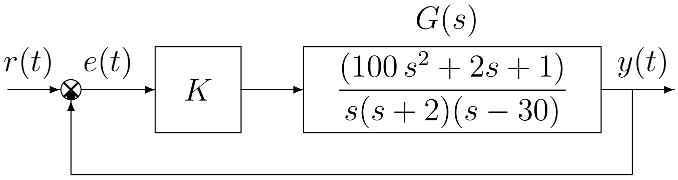
c.1) $M_a = 2$

c.2) $M_\varphi = 21.4°$

c.3) $K_\varphi = 0.49$

c.4) $K_\alpha = 0.5$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K\,(100\,s^2+2s+1)}{s(s+2)(s-30)} = 0 \quad \rightarrow \quad s(s+2)(s-30) + K\,(100\,s^2+2s+1) = 0$$

$$s^3 + (100\,K-28)s^2 + (2\,K-60)\,s + K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (2\,K-60) \\ 2 & (100\,K-28) & K \\ 1 & (100\,K-28)(2\,K-60)-K & \\ 0 & K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$100\,K - 28 > 0, \qquad 200\,K^2 - 6057\,K + 1680 > 0, \qquad K > 0.$$

Le radici della seconda disequazione sono:

$$K_{1,2} = \frac{6057 \pm \sqrt{6057^2 - 4\cdot 200\cdot 1680}}{400} = \begin{cases} K_1 = 0.28 \\ K_2 = 30.01 \end{cases}$$

Si ottengono quindi i seguenti vincoli:

$$K > 0.28, \qquad (K < 0.28) \cup (K > 30.01), \qquad K > 0.$$

Ne segue che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 30.01 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{(100\,K^* - 28)}} = \sqrt{2\,K^* - 60} \simeq 0.1$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

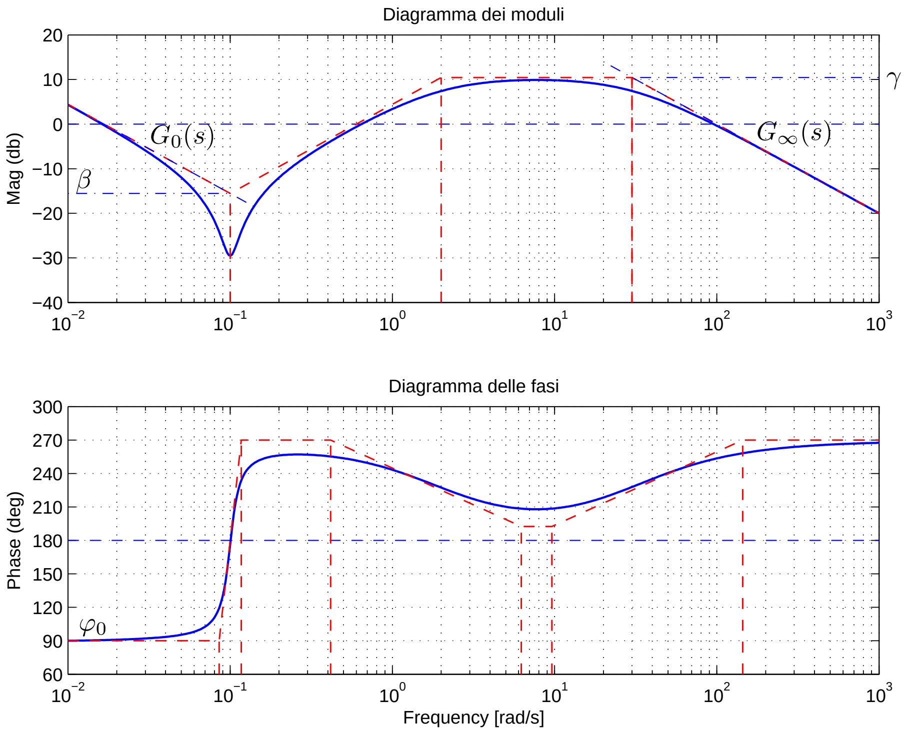


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

φ_∞

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = -\frac{1}{60\,s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{100}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi \equiv \frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3}{2}\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 30$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.1} = \frac{1}{6} = -15.56 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=30} = \frac{10}{3} = 10.46 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri stabili è $\delta = 0.02/(2\omega_n) = 0.1$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

<u>Soluzione</u>. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 2.

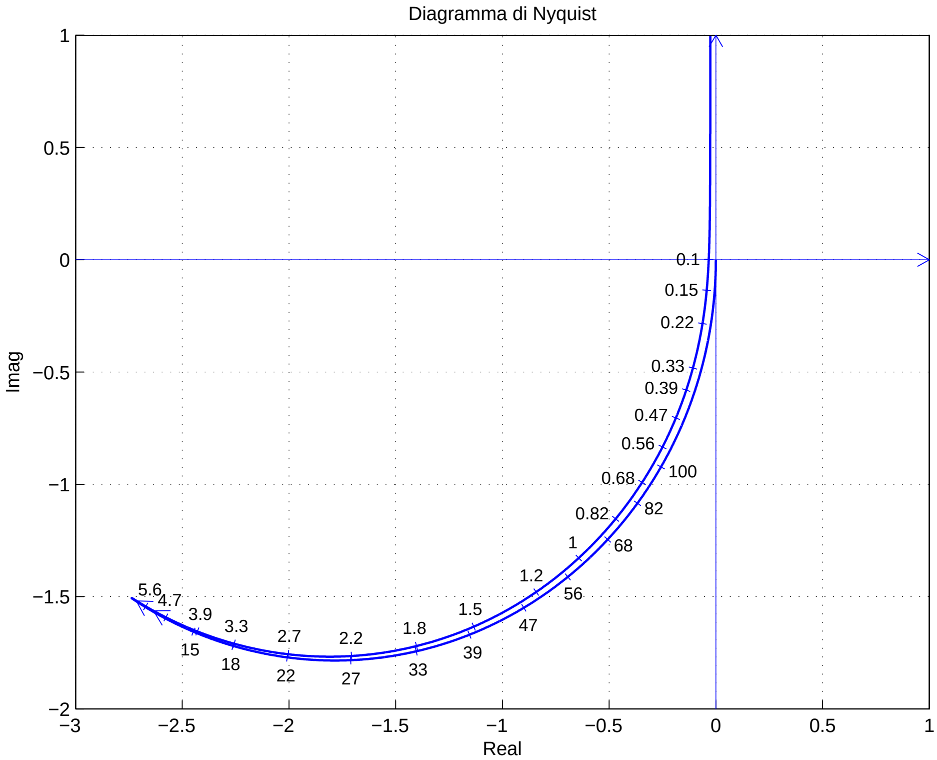


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a φ_0 in quanto Δ_τ è positiva:

$$\Delta\tau = 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{30} = 1.533 > 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = -\frac{1}{60} \cdot 1.533 = -0.0256.$$

La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta_\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di π in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto a φ_∞ in quanto Δ_p è negativa:

$$\Delta_p = -0.02 + 2 - 30 = -28.02 < 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.0333$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* \simeq 0.1$.

d.4) Calcolare in funzione di K l'errore a regime e_v del sistema retroazionato per ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

Soluzione. L'errore a regime e_v del sistema retroazionato per ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$ è

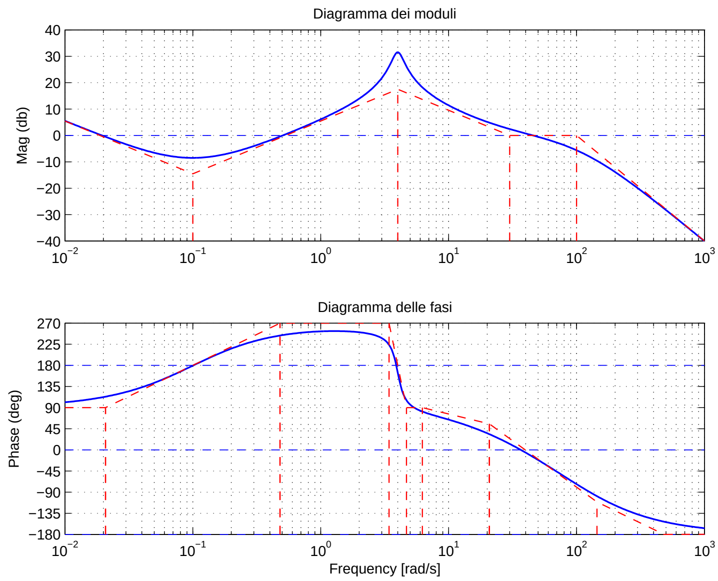
$$e_v = \frac{R_0}{K_v} = \frac{3}{-\frac{K}{60}} = -\frac{180}{K}$$

e) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

e.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{10000(s+0.1)^2(s-30)}{s(s^2+0.8s+4^2)(s+100)^2}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



e.2) Calcolare la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 4\,\cos(0.1\,t + \tfrac{\pi}{3}).$$

$$y(t) = 1.5\,\cos(0.1\,t + \tfrac{\pi}{3} + 180°)$$

e.3) Calcolare l'errore a regime e_p del sistema retroazionato quando in ingresso è presente un gradino unitario:

$$e_p = 0.$$

Soluzione:

e.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{10000(s+0.1)^2(s-30)}{s(s^2+0.8s+4^2)(s+100)^2}.$$

Il valore $K = 10000$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100\,j} = \left|\frac{K}{s^2}\right|_{100\,j} = \frac{K}{10000} = \gamma \simeq 0 \text{ db} \simeq 1 \qquad \to \qquad K \simeq 10000.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 14$ db $= 2$ di legge dal diagramma di Bode dei moduli.

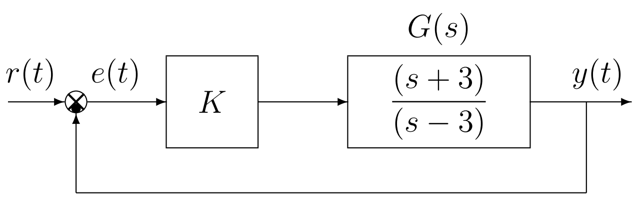
e.2) La risposta a regime del sistema $G(s)$ al segnale dato è la seguente:

$$\begin{aligned} y_\infty(t) &= 4\,|G(0.1\,j)|\,\cos(0.3\,t + \tfrac{\pi}{3} + \arg G(0.1\,j)) \\ &= 1.5\,\cos(0.1\,t + \tfrac{\pi}{3} + 180°). \end{aligned}$$

Infatti si ha che $G(0.1j) \simeq 0.375\,e^{+180°j}$.

e.3) L'errore a regime e_p del sistema retroazionato quando in ingresso è presente un gradino unitario è nullo perchè il sistema $G(s)$ è di tipo 1.

f) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



f.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s+3)}{(s-3)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad (K+1)s + 3(K-1) = 0.$$

Il sistema retroazionato è stabile se quando i due coefficienti dell'equazione caratteristica hanno lo stesso segno:

$$[(K+1) > 0,\ \ (K-1) > 0] \cup [(K+1) < 0,\ \ (K-1) < 0]$$

cioè

$$[K > 1] \cup [K < -1] \qquad \Leftrightarrow \qquad |K| > 1.$$

f.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 3. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

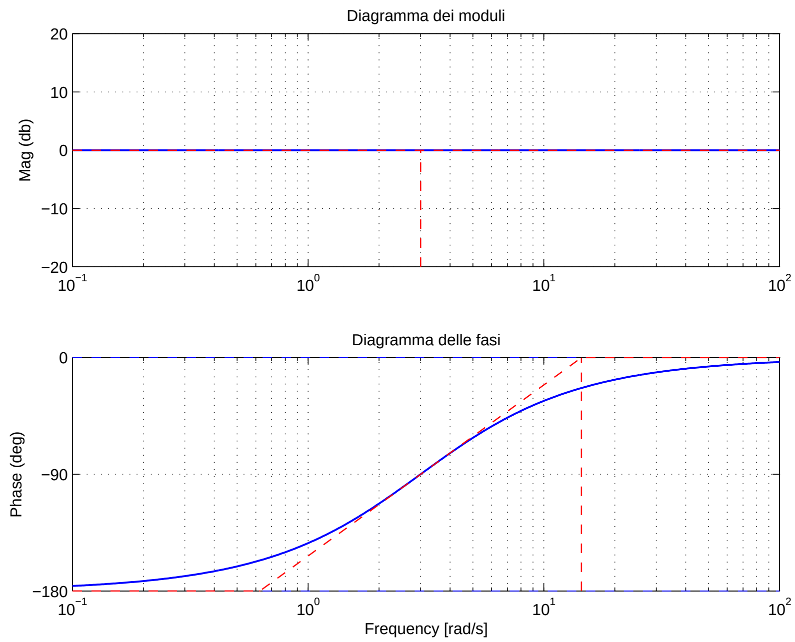


Figura 3: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

$$G_0(s) = -1, \qquad\qquad G_\infty(s) = 1$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = 0.$$

f.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 4. Il sistema é di tipo 0 per cui non esiste nessun asintoto. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta\tau = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} > 0.$$

La variazione di fase $\Delta\varphi = \pi$ indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di π in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = 0$.

f.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $e_p = 0.01$ per ingresso a gradino unitario.

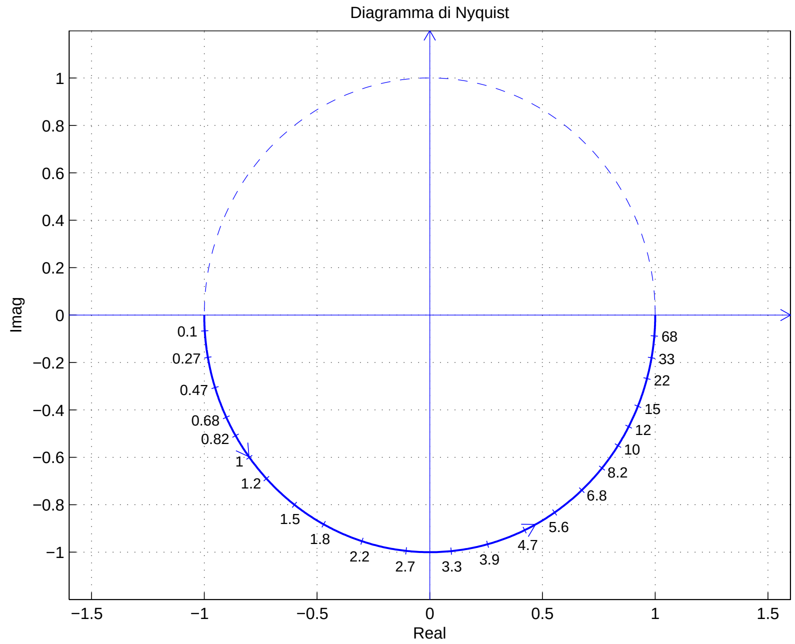


Figura 4: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Soluzione. In questo caso errore a regime per ingresso a gradino unitario è:

$$e_p = \frac{R_0}{1+K_p} = \frac{1}{1-K} = 0.01 \qquad \rightarrow \qquad K = -99.$$

Controlli Automatici - Prima parte

11 Aprile 2014 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Calcolare l'antitrasformata $y(t)$ della seguente funzione $Y(s)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[1 + \frac{1}{s+1}\right] = \delta(t) + e^{-t}$$

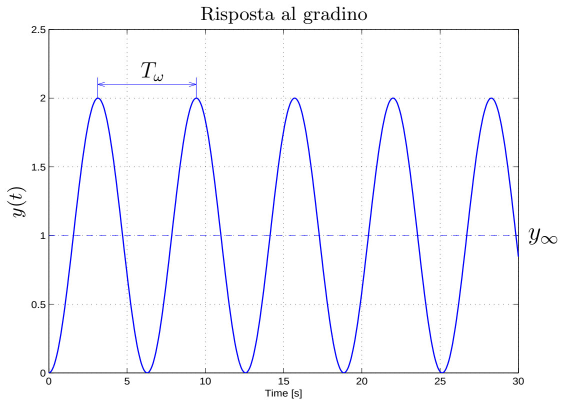
2. a) Scrivere, in funzione dei segnali $F(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{M\,s^2 + K} \qquad \rightarrow \qquad M\ddot{y}(t) + K\,y(t) = F(t)$$

b) Nel riquadro a fianco disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario della funzione $G(s)$.

c) Calcolare, in funzione dei parametri K e K del sistema, il valore a regime y_∞, il tempo di assestamento T_a e il periodo di oscillazione T_ω della risposta al gradino $y(t)$:

$$y_\infty = \frac{1}{K}, \qquad T_a \simeq \infty \ , \qquad T_\omega \simeq 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}.$$



3. In figura sono mostrati i diagrammi di Bode di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione del grafico, calcolare:

a) la posizione del polo dominante p_1 del sistema $G(s)$:

$$p_1 \simeq -0.5.$$

b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino del sistema $G(s)$:

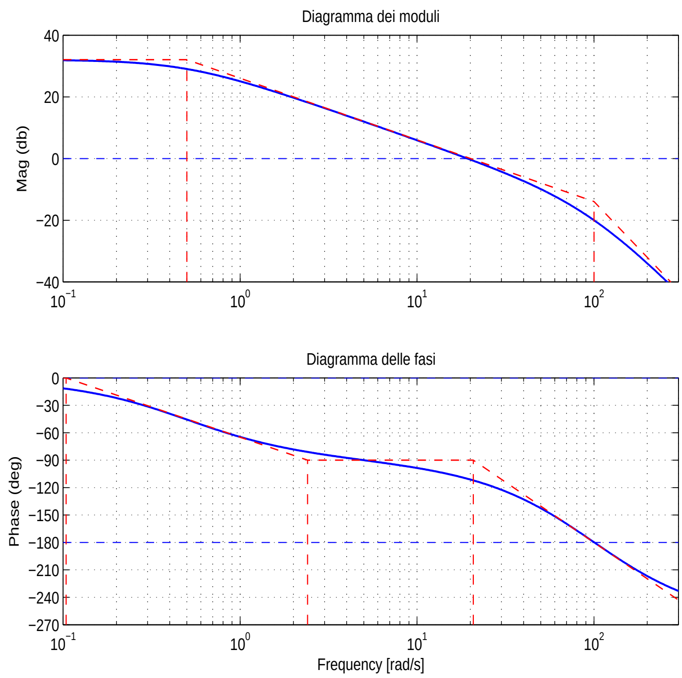
$$T_a \simeq \frac{3}{0.5}\ \text{s} = 6\ \text{s}.$$

c) i margini di stabilità del sistema $G(s)$:

$$M_\varphi = 70°, \qquad M_a = 10,$$

d) l'errore a regime del sistema retroazionato per ingresso a gradino unitario:

$$e_p \simeq \frac{R_0}{1+G(0)} = \frac{1}{41} \simeq 0.025$$



4. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $C\dot{v}(t) + v(t)/R = 0$ partendo dalla condizione iniziale $v(0) = v_0$.
Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$C\,(s\,V(s) - v_0) + V(s)/R = 0 \quad \rightarrow \quad V(s) = \frac{v_0}{s + \frac{1}{RC}} \quad \rightarrow \quad v(t) = v_0\, e^{-\frac{t}{RC}}.$$

5. Enunciare il principio del modello interno valido per l'errore a regime dei sistemi retroazionati.
Principio del modello interno. *affinche sia neutralizzato (con errore a regime nullo) un modo r(t) in ingresso corrispondente ad un polo nellorigine di ordine h, occorre che lo stesso modo sia presente nel regolatore (o nel sistema controllato), che pertanto deve avere un polo nellorigine pure di ordine h o superiore, cio'e contenere un modello del sistema elementare 1/sh che genera quel modo.*

6. *Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:*

$$x(t) = 2\sin(3t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{3}{s+3}} \longrightarrow \quad y(t) \simeq \frac{2}{\sqrt{2}}\sin(3t - \tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin(3t - \tfrac{\pi}{4})$$

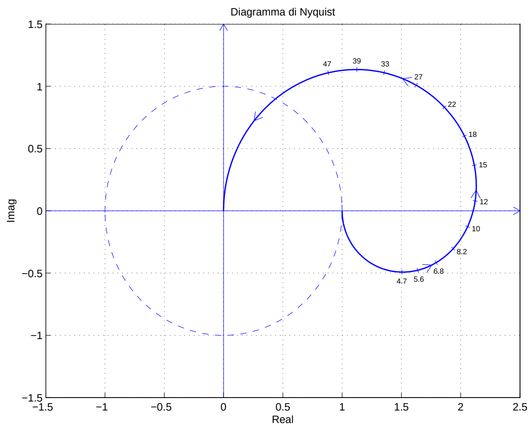
7. *Il picco di risonanza M_R di un sistema del 2° ordine è:*

⊗ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$ ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$ ○ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$ ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

8. *La pulsazione di risonanza ω_R di un sistema del 2° ordine è:*

○ $\omega_R = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$ ○ $\omega_R = \omega_n\delta\sqrt{1-\delta^2}$ ⊗ $\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\delta^2}$ ○ $\omega_R = \omega_n\delta\sqrt{1-2\delta^2}$

9. *Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione* $G(s) = \frac{80(3-s)}{(s-8)(s-30)}$.
Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:



○ $-\infty < \alpha^* < K < 0$;
○ $-\infty < K < \beta^* < 0$;
⊗ $\alpha^* < K < \beta^* < 0$;
○ *nessuno dei precedenti;*

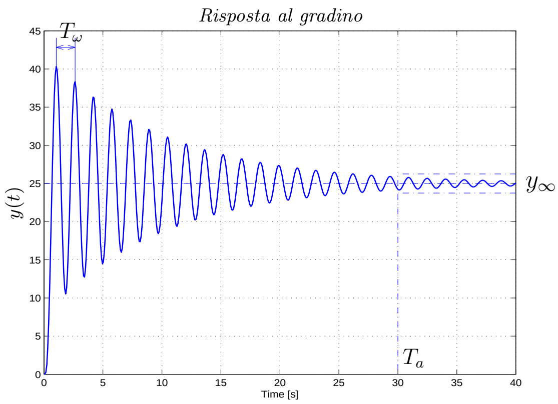
Calcolare (se esistono) i valori α^* e β^*:

$$\alpha^* \simeq -1, \qquad \beta^* \simeq -0.47.$$

10. *Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:*

$$G(s) = \frac{200(4 + 0.3s)(s^2 + 20s + 80^2)}{(2s + 16)(0.5s + 2)(s^2 + 10s + 400)(s^2 + 0.2s + 16)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:



$$y_\infty = 25, \qquad T_a \simeq \frac{3}{0.1} = 30\,s, \quad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{4} = 1.57\,s.$$

11. *Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:*

$$G(s) = \frac{(3\,s-1)^2}{s^2(s+5)}\,e^{-2\,s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{1+9\omega^2}{\omega^2\sqrt{25+\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -\pi - 2\arctan 3\omega - \arctan\frac{\omega}{5} - 2\,\omega \end{cases}$$