

Controlli Automatici - Prima parte
10 Aprile 2018 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [3 - 5e^{-3t}] \cos(2t), \quad x_2(t) = [5t^2 + 2 \sin(3t)]e^{-4t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{3s}{s^2 + 4} - \frac{5(s + 3)}{(s + 3)^2 + 4}, \quad X_2(s) = \frac{10}{(s + 4)^3} + \frac{6}{(s + 4)^2 + 3^2}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{20}{s(s + 2)^2}, \quad G_2(s) = 2 + \frac{5(s - 3)}{(s - 3)^2 + 49}$$

Soluzione:

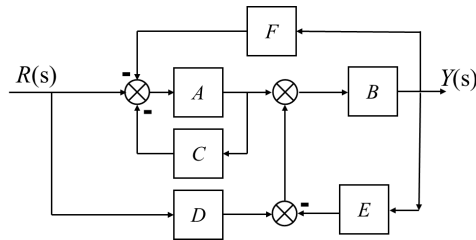
$$g_1(t) = 5 - 5e^{-2t} - 10te^{-2t}, \quad g_2(t) = 2\delta(t) + 5e^{3t} \cos(7t)$$

Infatti, per la funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}[G_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{20}{s(s + 2)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s} - \frac{5}{s + 2} - \frac{10}{(s + 2)^2}\right] = 5 - 5e^{-2t} - 10te^{-2t}$$

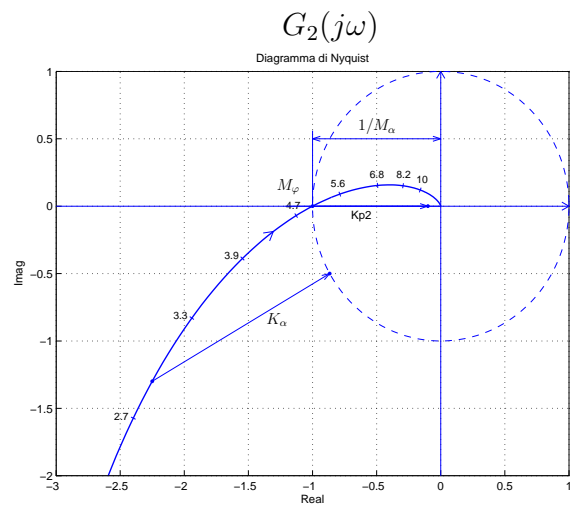
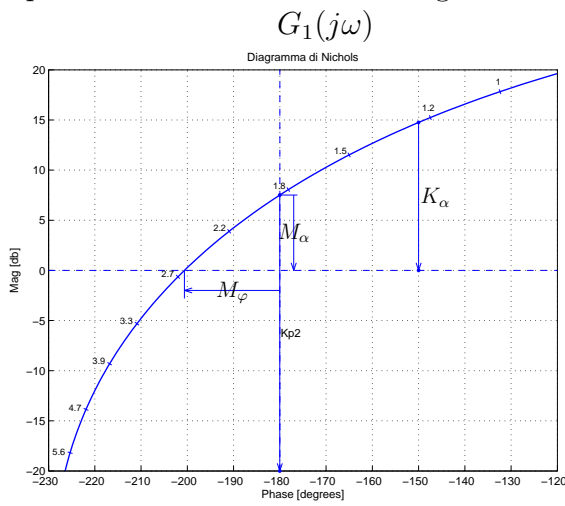
b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$:

$$G(s) = \frac{AB + DB(1 + AC)}{1 + AC + BE + ABF + ACBE}$$



- c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:
- il margine di ampiezza M_a del sistema;
 - il margine di fase M_φ del sistema;
 - il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 30$;
 - il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 10$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:



c.1) $M_a = -7.51 \text{ db} = 0.42$

c.1) $M_a = 1$

c.2) $M_\varphi = -20.62$

c.2) $M_\varphi = 0$

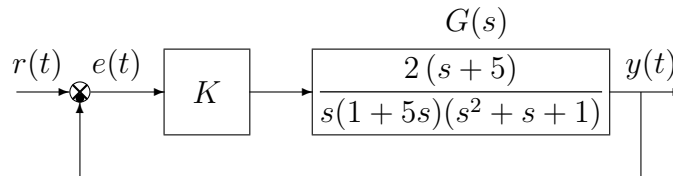
c.3) $K_\varphi = -14.75 \text{ db} = 0.182$

c.3) $K_\varphi = 0.384$

c.4) $K_\alpha = -27.51 \text{ db} = 0.042$

c.4) $K_\alpha = 0.1$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s+5)}{s(1+5s)(s^2+s+1)} = 0 \quad \rightarrow \quad 5s^4 + 6s^3 + 6s^2 + (K+1)s + 5K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 5 & 6 & 5K \\ 3 & 6 & K+1 & \\ 2 & 31-5K & 30K & \\ 1 & (31-5K)(K+1)-180K & & \\ 0 & 30K & & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < \frac{31}{6}, \quad 5K^2 + 154K - 31 < 0, \quad K > 0.$$

In base alla regola dei segni dei coefficienti di una equazione di secondo grado, è possibile affermare che le due soluzioni K_1 e K_2 dell'equazione di secondo grado della riga 1 sono reali e di segni opposti: $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$:

$$K_{1,2} = \frac{-154 \pm \sqrt{154^2 - 4(5)(-31)}}{10} = \begin{cases} K_1 = -31 \\ K_2 = 0.2 \end{cases}$$

La disequazione è negativa all'interno dei valori K_1 e K_2 . Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < K_2 = K^* = 0.2.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^* + 1}{6}} = \sqrt{\frac{1.2}{6}} = 0.447.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi “asintotici” di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

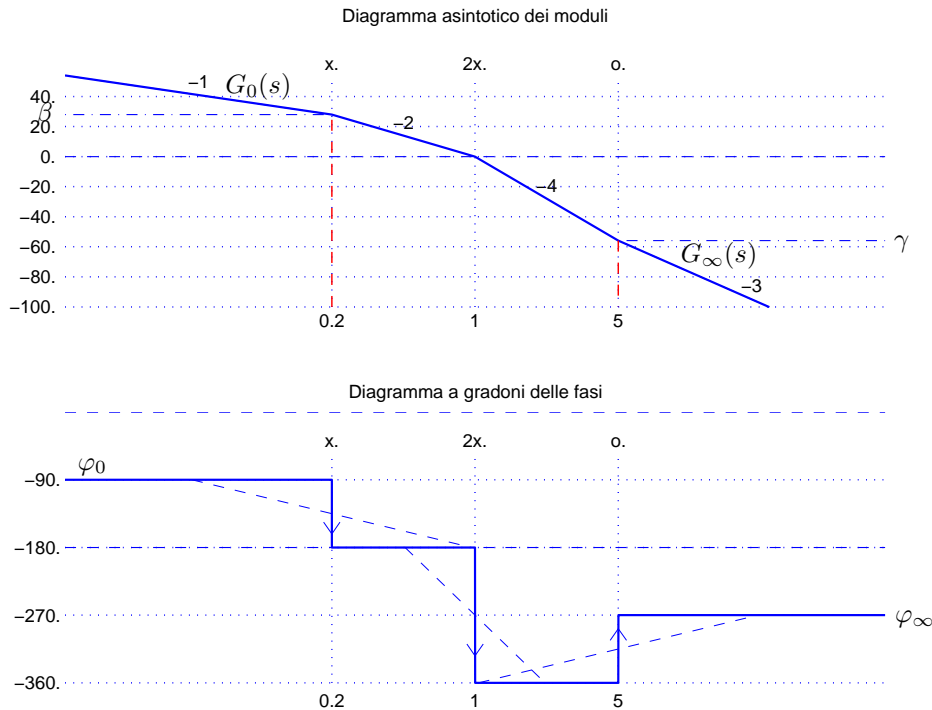


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{5}{s}, \quad G_\infty(s) = \frac{1}{5s^3}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.2$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 5$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.2} = 25 = 27.96 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=5} = \frac{1}{625} = -55.92 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli instabili è $\delta = 1/(2\omega_n) = 0.5$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l’asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* .

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3.

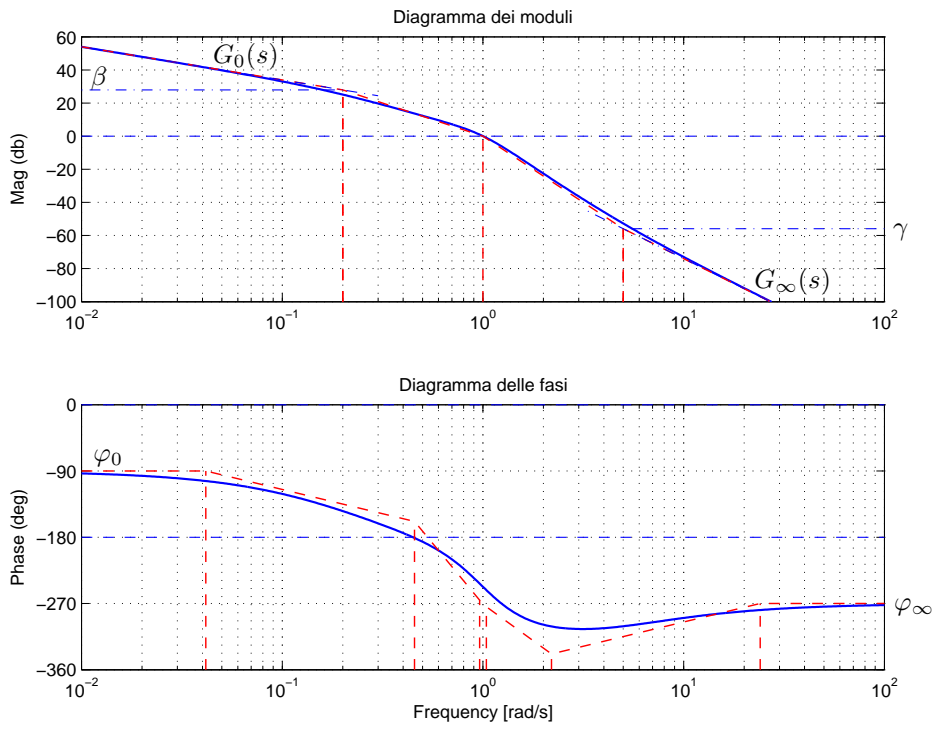


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

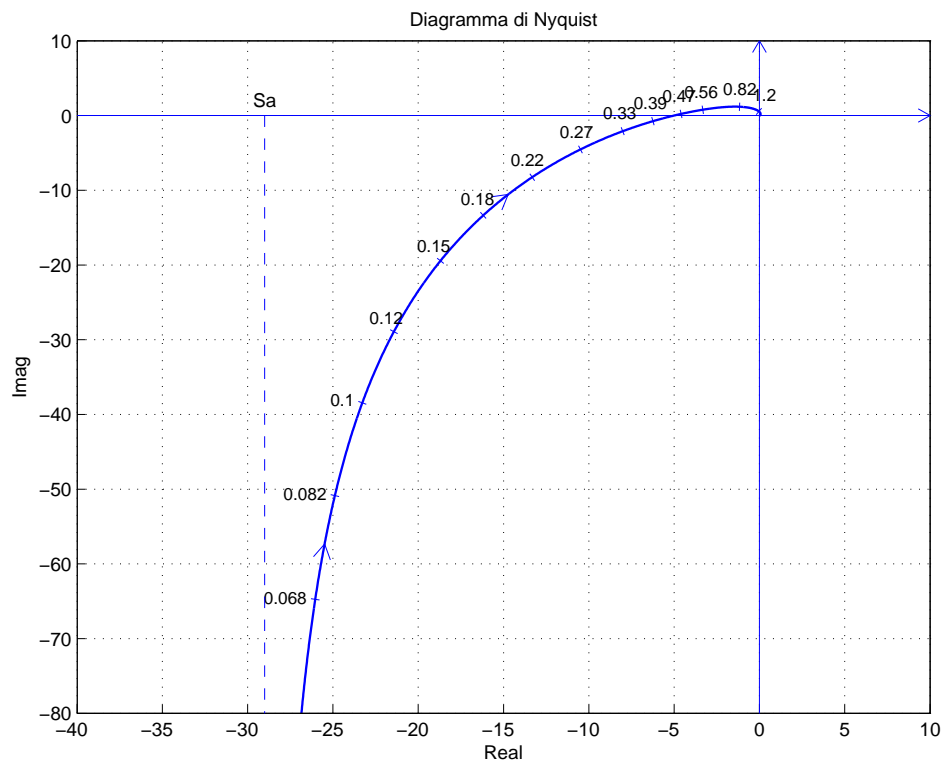


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = \frac{1}{5} - 5 - 1 = -5.8 < 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto:

$$\sigma_a = K\Delta\tau = 5 \cdot (-5.8) = -29.$$

La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\pi$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p delle pulsazioni critiche del sistema è negativa:

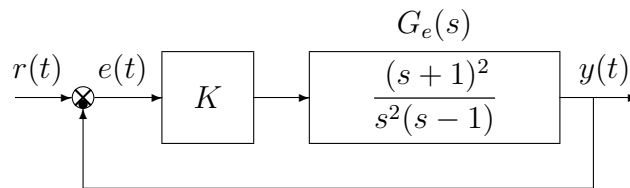
$$\Delta_p = -5 + \frac{1}{5} + 1 = -3.8 < 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{0.2} = -5$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 0.447$.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s+1)^2}{s^2(s-1)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (K-1)s^2 + 2Ks + K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2K \\ 2 & (K-1) & K \\ 1 & 2K(K-1) - K & \\ 0 & K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile quando tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno:

$$\begin{cases} (K-1) > 0 \\ K(2K-3) > 0 \\ K > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad K > K^* = 1.5$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è :

$$\omega_1^* = \sqrt{2K^*} = \sqrt{3} \simeq 1.732$$

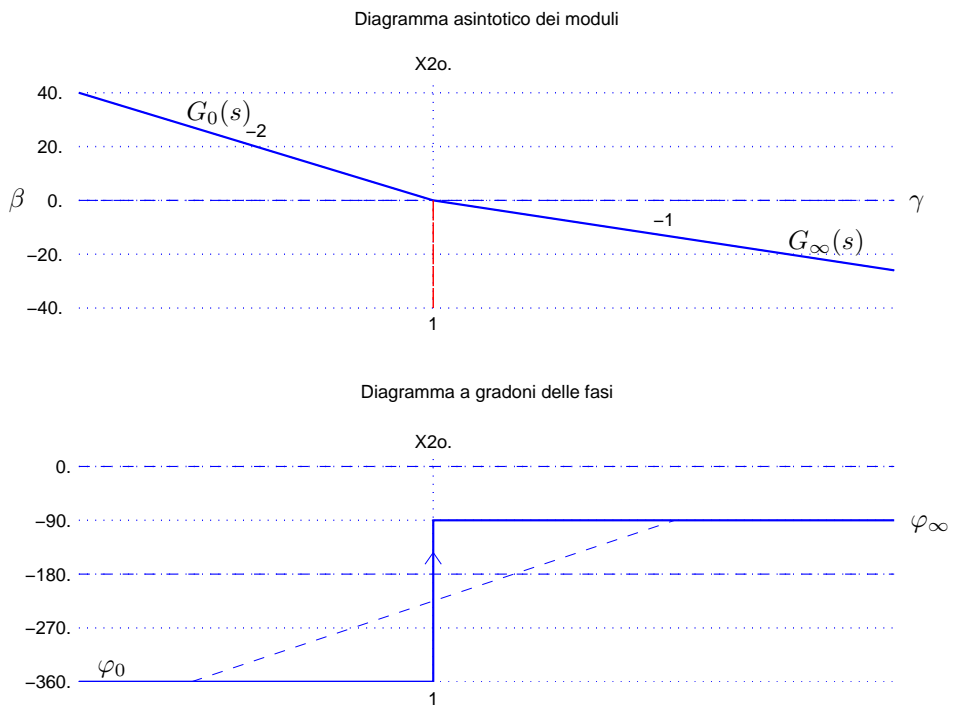


Figura 4: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

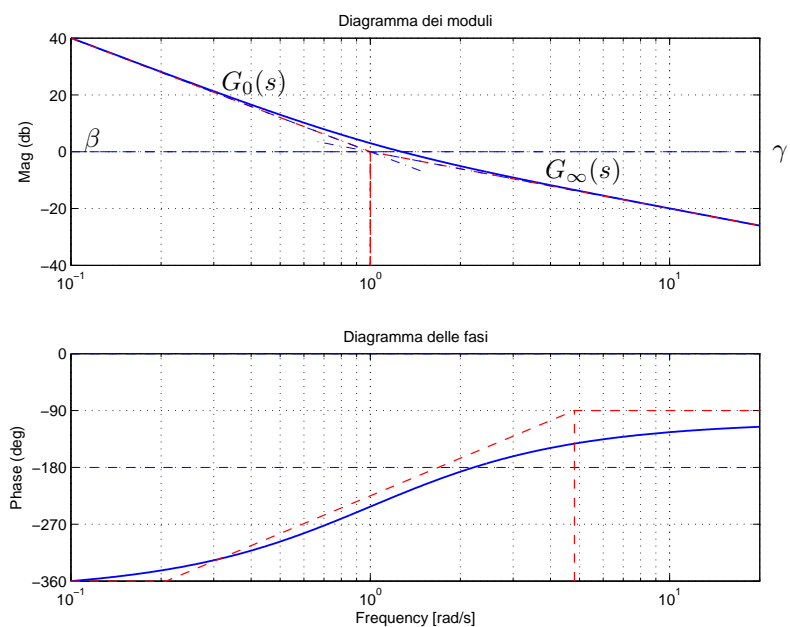


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

Soluzione.

I diagrammi “asintotici” di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = -\frac{1}{s^2}, \quad G_\infty(s) = \frac{1}{s}$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -2\pi \equiv 0, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 1$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 1 = 0 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=1} = 1 = 0 \text{ db}.$$

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale e le eventuali intersezioni σ_i^* con l’asse reale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale

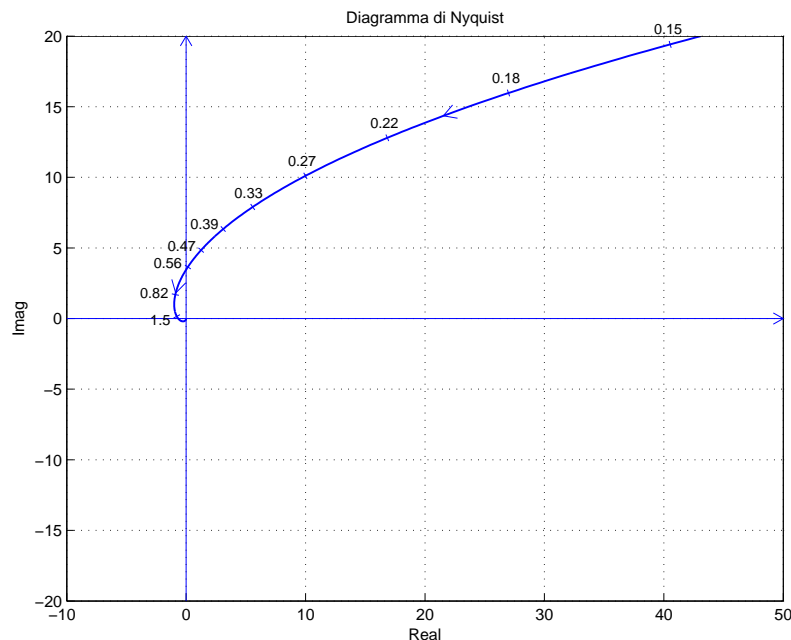


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

del sistema è $\varphi_0 = -2\pi$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta\tau = 2 + 1 = 3 > 0.$$

Il sistema è di tipo 2 per cui non esistono asintoti. La variazione di fase

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Esiste una sola intersezione σ^* con l’asse reale:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{1.5} = -0.666$$

in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 1.732$.

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

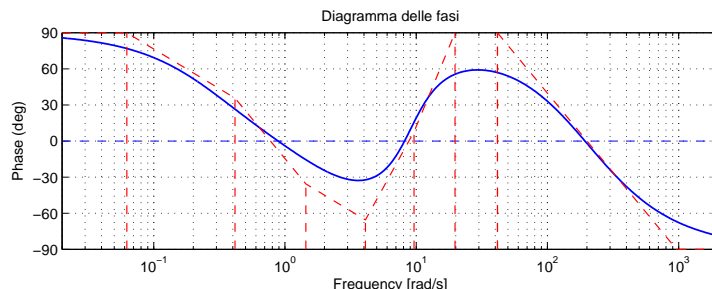
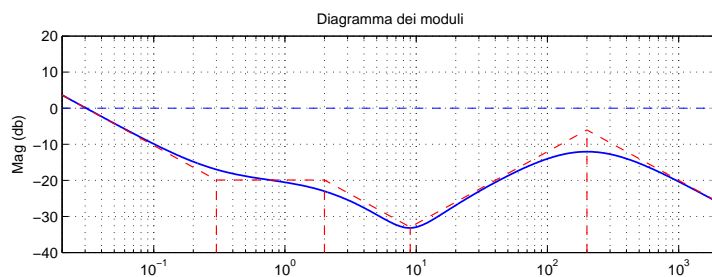
f.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{100(s - 0.3)(s^2 + 9s + 81)}{s(s + 2)(s + 200)^2}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ .

f.2) Calcolare la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 2 \sin(0.06t) + \cos(3t - \frac{\pi}{4}).$$



f.2) La risposta a regime del sistema $G(s)$ al segnale dato è la seguente:

$$y_\infty(t) = 3 |G(80j)| \sin(80t + \frac{\pi}{6} + \arg G(80j)). \simeq 30 \sin(80t + \frac{\pi}{6} - 360^\circ).$$

Infatti si ha che $G(80j) \simeq 10 e^{-360^\circ j}$.

Soluzione:

f.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{200(s - 0.3)(s^2 + 9s + 81)}{s(s + 2)(s + 200)^2}$$

Il valore $K = 200$ si determina, per esempio, calcolando il modulo β dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 200$:

$$|G_\infty(s)|_{s=200j} = \left| \frac{K}{s} \right|_{s=200j} = \frac{K}{200} = \beta \simeq 0 \text{ db} \simeq 1 \quad \rightarrow \quad K \simeq 200.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{2} = 0.5.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 0 \text{ db} \simeq 1$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

Controlli Automatici - Prima parte

10 Aprile 2018 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s+3)^2}{3s^4 + s^3 + 6s^2 + s + 4} \quad \rightarrow \quad 3\ddot{y} + \ddot{y} + 6\dot{y} + \dot{y} + 4y = \ddot{x} + 6\dot{x} + 9x$$

Applicare il Criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione $G(s)$:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & \\ 2 & 3 & 4 & \\ 1 & -1 & & \\ 0 & 4 & & \end{array}$$

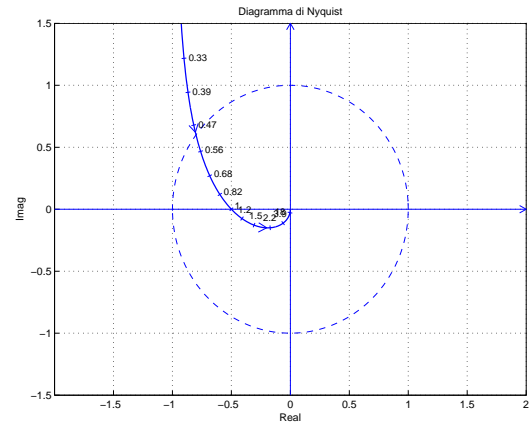
- Il sistema $G(s)$ è stabile
 Il sistema $G(s)$ è instabile
 Il sistema $G(s)$ è a fase minima

2. Sia dato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{0.5(s+1)}{s(s-1)}$.

In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K :

$$K > K^* = -\frac{1}{-0.5} = 2$$

Calcolare dal grafico, in modo approssimato, i valori limite dell'intervallo di ammissibilità del parametro K .



3. Per un sistema del 2° ordine privo di zeri, scrivere le funzioni $S(\delta)$ e $M_R(\delta)$ che legano la massima sovraelongazione $S\%$ e il picco di risonanza M_R al coefficiente di smorzamento δ :

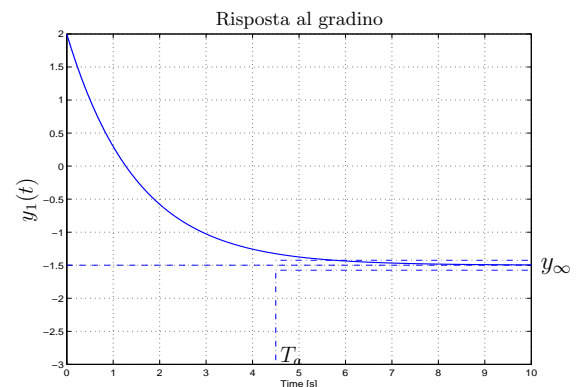
$$S(\delta) = 100 e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}, \quad M_R(\delta) = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$

4. Utilizzando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{6s-3}{3s+2}$$

Calcolare il valore iniziale y_0 , il valore finale y_∞ e il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$:

$$y_0 = 2, \quad y_\infty \simeq -1.5 \text{ s}, \quad T_a \simeq 4.5 \text{ s}.$$



5. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $4\dot{y}(t) + 3y(t) = 0$ con condizione iniziale $y(0) = 5$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$4[sY(s) - 5] + 3Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{5}{s + \frac{3}{4}} \quad \rightarrow \quad y(t) = 5 e^{-0.75t}.$$

6. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 4 + 4 \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \frac{12}{(s+2)^2} \rightarrow y(t) \simeq 12 + 6 \cos\left(2t - \frac{\pi}{3} - 90^\circ\right)$$

Infatti si ha che:

$$G(j2) = \frac{12}{(j2+2)^2} \rightarrow |G(j2)| = \frac{12}{(4+4)} = \frac{3}{2}, \quad \arg G(j2) = -2 \arctan \frac{2}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

7. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2(3+5s)(s-4)}{s(2s+1)(7s+3)} \rightarrow y_0 = \frac{10}{14} \quad y_\infty = -8$$

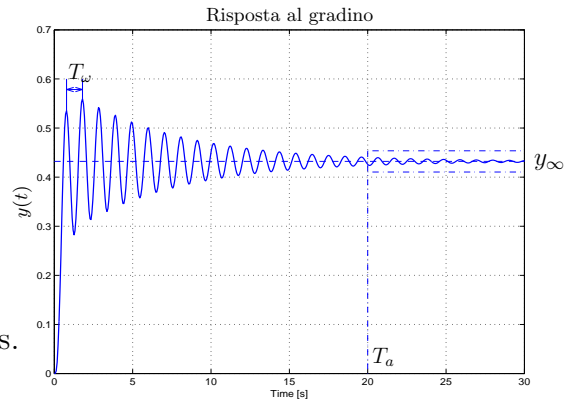
8. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{30(1+0.5s)(s+20)(s^2+16s+60^2)}{(3s+18)(5s+1)(s^2+30s+900)(s^2+5s+64)}$$

Calcolare inoltre:

- il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \rightarrow \infty$;
- il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
- il periodo T_w dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 0.432, \quad T_a \simeq 20 \text{ s}, \quad T_w \simeq \frac{2\pi}{6} = 1.05 \text{ s}.$$



9. In figura sono mostrati i diagrammi di Bode di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione del grafico, calcolare:

- la posizione del polo dominante p_1 del sistema $G(s)$:

$$p_1 \simeq -0.2.$$

- il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino del sistema $G(s)$:

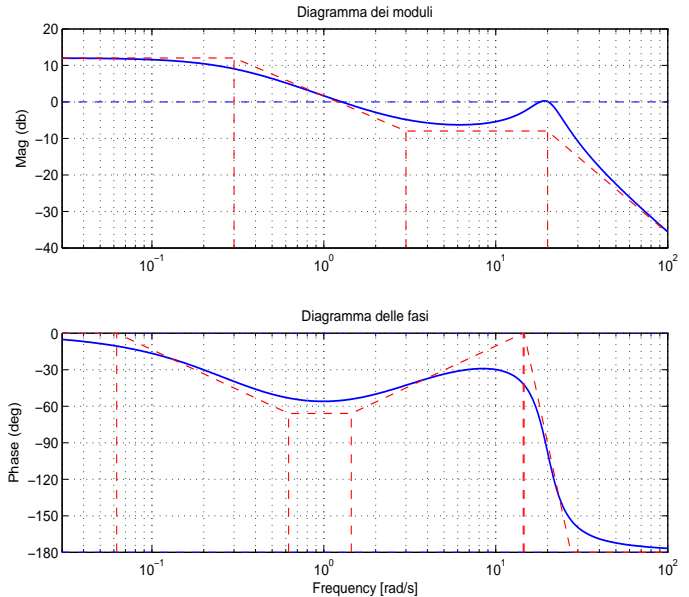
$$T_a \simeq \frac{3}{0.2} \text{ s} = 15 \text{ s}.$$

- i margini di stabilità del sistema $G(s)$:

$$M_\varphi \simeq 120^\circ, \quad M_a \simeq \infty.$$

- il guadagno statico K_0 del sistema $G(s)$:

$$K_0 \simeq 12 \text{ db} \simeq 4$$



10. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(3s-2)(1+2s)}{s^2(s+5)^2} e^{-4t_0s} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{9\omega^2+4}\sqrt{4\omega^2+1}}{\omega^2(\omega^2+25)} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan \frac{3\omega}{2} + \arctan 2\omega - 4t_0\omega - \pi - 2 \arctan \frac{\omega}{5} \end{cases}$$