Controlli Automatici - Prima parte
10 Aprile 2017 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [t^3 - 4\sin(3t)]\, e^{-2\,t}, \qquad x_2(t) = 5\delta(t) + 2\,e^{-3t}\cos(5t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6}{(s+2)^4} - \frac{12}{(s+2)^2+3^2}, \qquad X_2(s) = 5 + \frac{2(s+3)}{(s+3)^2+5^2}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{8}{s^2(s+2)}, \qquad G_2(s) = 4\,e^{-5\,s} + \frac{3}{s^2+81}$$

Soluzione:

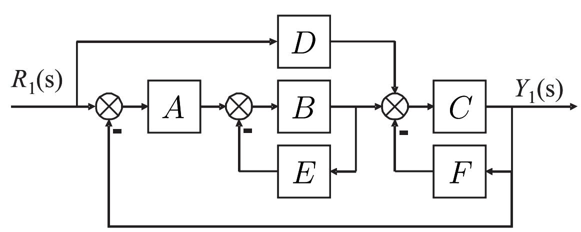
$$g_1(t) = -2 + 4t + 2e^{-2t}, \qquad g_2(t) = 4\,\delta(t-5) + \frac{1}{3}\sin(9\,t)$$

Infatti, per la funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{s^2(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{2}{s}+\frac{44}{s^2}+\frac{2}{(s+2)}\right] = -2 + 4t + 2e^{-2t}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$:

$$G(s) = \frac{A\,B\,C + D\,C\,(1+B\,E)}{1 + B\,E + C\,F + A\,B\,C + B\,E\,C\,F}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

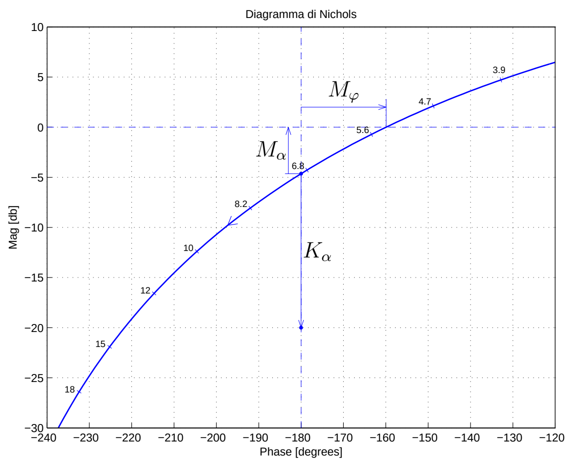
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\, G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 10$;

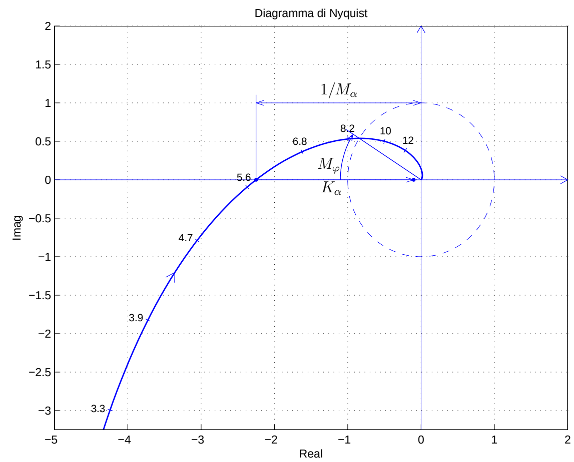
c.4) la risposta a regime $y_r(t)$ del sistema $G(s)$ ad un ingresso sinusoidale $x(t) = 2\cos(3.9t)$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$

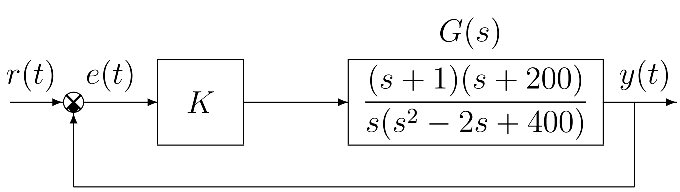


$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = 4.64$ db $= 1.71$	c.1) $M_a = 0.44$
c.2) $M_\varphi = 20.08$	c.2) $M_\varphi = -32.6$
c.3) $K_\alpha = -15.36$ db $= 0.171$	c.3) $K_\alpha = 0.044$
c.4) $y_r(t) = 3.44\cos(3.9t - 132.82)$	c.4) $y_r(t) = 8.29\cos(3.9t - 153.9^o)$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s+1)(s+200)}{s(s^2-2s+400)} = 0 \quad \to \quad s^3 + (K-2)s^2 + (400+201K)s + 200K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 400+201K \\ 2 & K-2 & 200K \\ 1 & (K-2)(400+201K)-200K & \\ 0 & 200K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 2, \qquad 201\,K^2 - 202\,K - 800 > 0, \qquad K > 0.$$

In base alla regola dei segni dei coefficienti di una equazione di secondo grado, è possibile affermare che le due soluzioni K_1 e K_2 dell'equazione di secondo grado della riga 1 sono reali e di segni opposti: $K_1 < 0$ e $K_2 > 0$. Inoltre, la corrispondente disequazione è positiva all'esterno di tali valori. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > K_2 = \frac{202 + \sqrt{202^2 - 4(201)(-800)}}{402} = 2.56 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{400 + 201K^*}. = 30.24.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

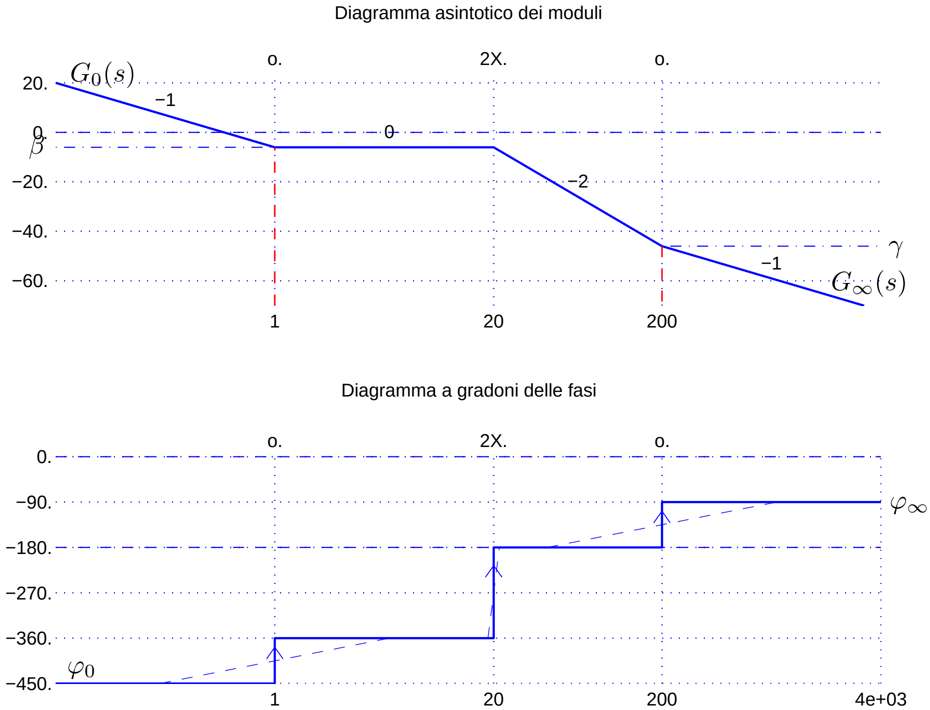


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{2s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \equiv -\frac{5\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 200$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = \frac{1}{2} = -6 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=200} = \frac{1}{200} = -46 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli instabili è $\delta = 2/(2\omega_n) = 2/40 = 0.05$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 1 + \frac{1}{200} + \frac{2}{400} = 1.01 > 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = 0.5 \cdot 1.01 = 0.505.$$

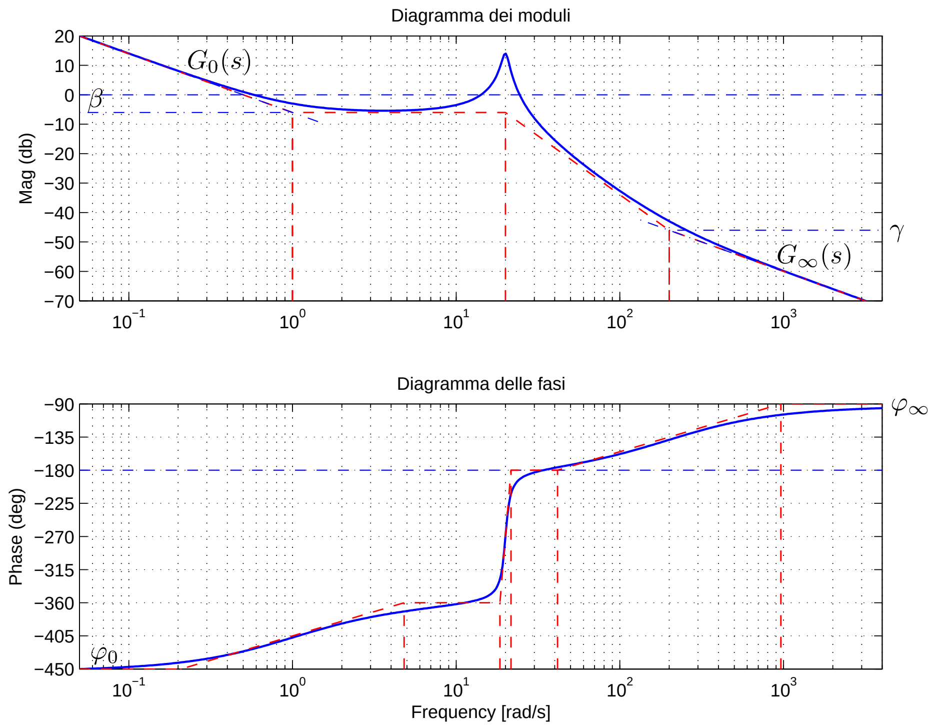


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

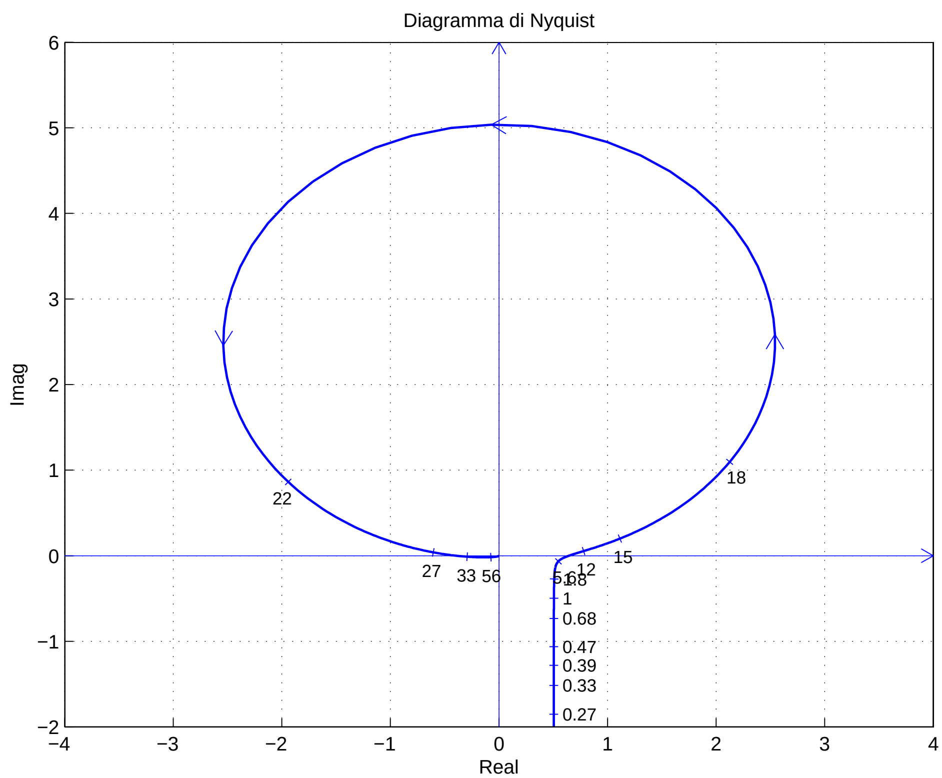


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi = 2\pi$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di 2π in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = \frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p delle pulsazioni critiche del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -1 - 200 - 2 = -203 < 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{2.56} = -0.3906$$

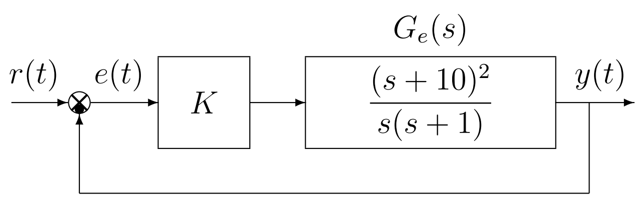
in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 30.24$.

d.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $|e_v| = 0.01$ per ingresso a rampa $x(t) = 6t$.

<u>Soluzione</u>. L'errore a regime e_p del sistema retroazionato per ingresso a rampa $x(t) = 6t$ è

$$e_v = \frac{R_0}{K_v} = \frac{6}{\frac{K}{2}} = 0.01 \qquad \to \qquad K = 1200.$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

<u>Soluzione</u>.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s+10)^2}{s(s+1)} = 0 \qquad \to \qquad (K+1)s^2 + (20K+1)s + 100K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & (K+1) & 100K \\ 1 & (20K+1) & \\ 0 & 100K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile quando tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno: a) segno positivo:

$$\begin{cases} (1+K) > 0 \\ (20K+1) > 0 \\ 100K > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad K > 0$$

b) segno negativo:

$$\begin{cases} (1+K) < 0 \\ (20K+1) < 0 \\ 100K < 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad K < -1$$

Il sistema retroazionato è quindi stabile per:

$$(K < -1) \cup (K > 0)$$

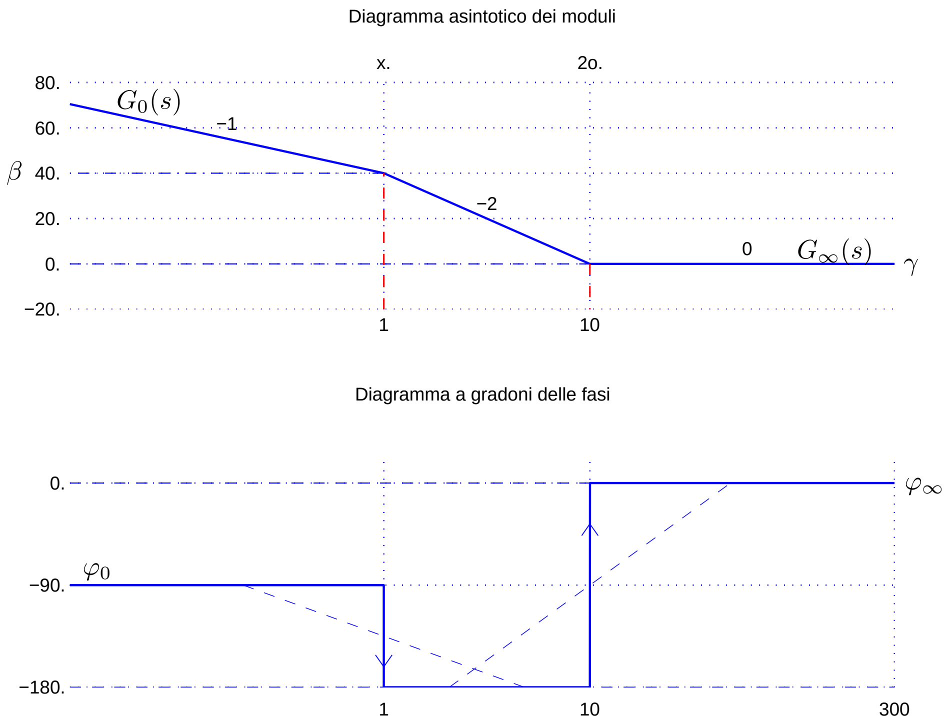


Figura 4: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

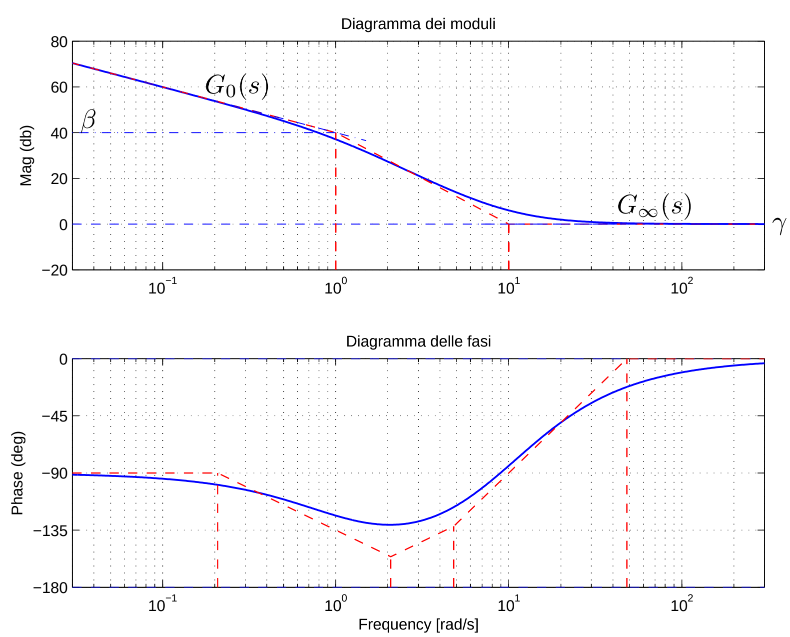


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

Soluzione.

I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 5. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{K}{s} = \frac{100}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = 1$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = 0.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 100 = 40 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 1 = 0 \text{ db}.$$

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale e le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale

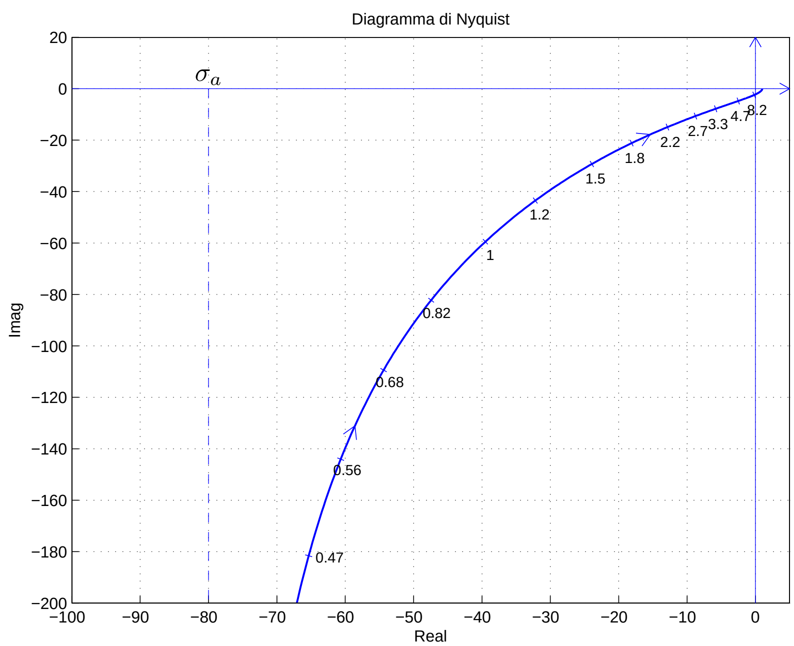


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta\tau = \frac{2}{10} - 1 = -0.8 < 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto:

$$\sigma_a = \Delta_\tau K = -80$$

La variazione di fase

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = 0$.

Esistono una sola intersezione σ^* con l'asse reale:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = 1$$

e.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $|e_v| = 0.01$ per ingresso a rampa $x(t) = 4\,t$.

Soluzione. In questo caso l'errore a regime per ingresso a rampa $x(t) = 4\,t$ è:

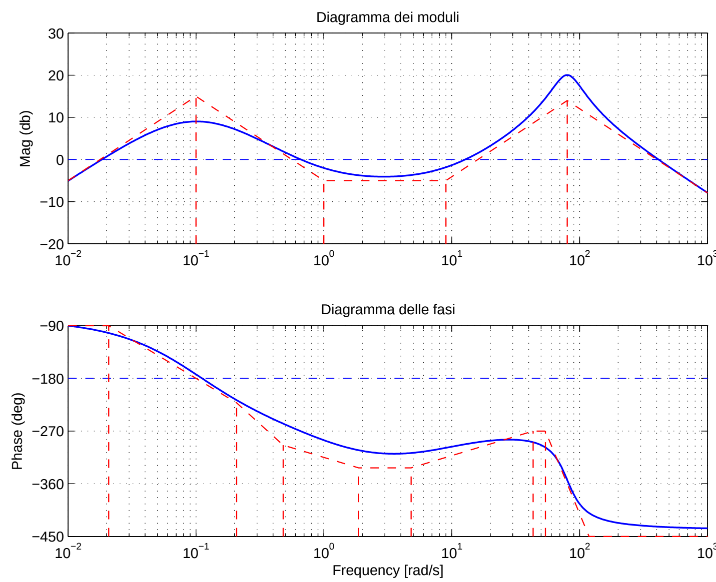
$$|e_v| = \frac{R_0}{|K_v|} = \frac{4}{100K} = 0.01 \qquad \rightarrow \qquad K = 4.$$

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

f.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{400s(s-1)(s+9)}{(s+0.1)^2(s^2+40s+6400)}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



f.2) Calcolare la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 5\,\cos(80\,t + \tfrac{\pi}{3}).$$

f.2) La risposta a regime del sistema $G(s)$ al segnale dato è la seguente:

$$y_\infty(t) = 5\,|G(80\,j)|\,\cos(80\,t + \tfrac{\pi}{3} + \arg G(80\,j)). \simeq 50\,\cos(80\,t + \tfrac{\pi}{3} - 360°).$$

Infatti si ha che $G(80j) \simeq 10\,e^{-360°j}$.

Soluzione:

f.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{400s(s-1)(s+9)}{(s+0.1)^2(s^2+40s+6400)}.$$

Il valore $K = 100$ si determina, per esempio, calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.1$:

$$|G_0(s)|_{s=0.1\,j} = \left|\frac{-9Ks}{64}\right|_{s=0.1\,j} = \frac{0.9K}{64} = \beta \simeq 15 \text{ db} \simeq 5.62 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 400.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{4} = 0.25.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 6$ db $\simeq 2$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

Controlli Automatici - Prima parte

10 Aprile 2017 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. L'equazione differenziale $\ddot{y} + 2\,t\,y^2 = 2\,x$, dove x è l'ingresso e y è l'uscita, è:

   ◯ stazionaria ◯ lineare

   ⊗ non stazionaria ⊗ non lineare

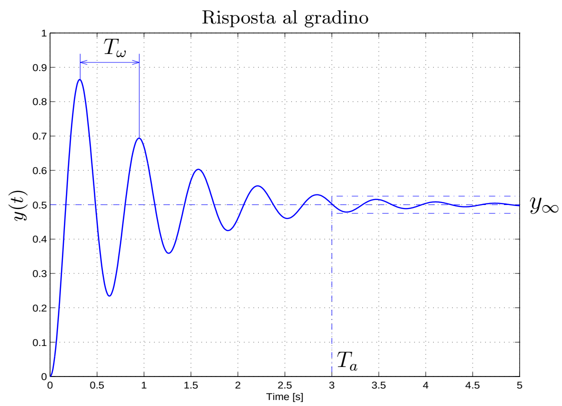
2. a) Scrivere, in funzione dei segnali $F(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{100}{M\,s^2 + B\,s + K} \qquad \rightarrow \qquad M\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + K\,y(t) = 100F(t)$$

   b) Nel riquadro a fianco disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario supponendo che i poli del sistema $G(s)$ siano complessi coniugati.

   c) Posto $M = 2$, $B = 4$ e $K = 200$ del sistema, calcolare il valore a regime y_∞, il tempo di assestamento T_a e il periodo di oscillazione T_ω della risposta al gradino $y(t)$:

$$y_\infty = 0.5, \qquad T_a \simeq 3 \text{ s}, \qquad T_\omega \simeq \frac{\pi}{5} = 0.63.$$

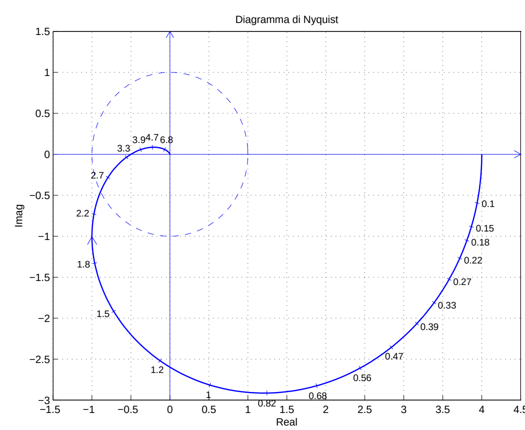


3. Sia dato il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \dfrac{18}{(s+2)^3}$.

   In base al criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

$$-0.25 = -\frac{1}{4} < K < 2$$

   Calcolare dal grafico, in modo approssimato, i valori limite dell'intervallo di ammissibilità del parametro K.



4. Enunciare il criterio di Nyquist nella formulazione valida anche per sistemi instabili ad anello aperto. Fornire sia l'ipotesi che la tesi del criterio.

   Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che il sistema ad anello aperto non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1{+}j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.

5. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s) = \frac{6}{s+2}$ quando in ingresso è presente il seguente segnale $x(t) = 4 + 5\cos(3t)$:

$$G(j3) = \frac{6}{j3+2} = \frac{6}{\sqrt{13}} e^{-j\arctan\frac{3}{2}}, \qquad \rightarrow \qquad y(t) \simeq 12 + \frac{30}{\sqrt{13}} \cos\left(3t - \arctan\frac{3}{2}\right)$$

6. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2\,(5-3\,s)(s+3)}{s(4\,s+1)(5\,s+10)} \qquad \to \qquad y_0 = -\frac{3}{10} \qquad y_\infty = 3$$

7. In figura sono mostrati i diagrammi di Bode di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione del grafico, calcolare:

a) la posizione della coppia di poli dominanti $p_{1,2}$ del sistema $G(s)$:

$$p_{1,2} \simeq -0.4 \pm j0.693.$$

b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino del sistema $G(s)$:

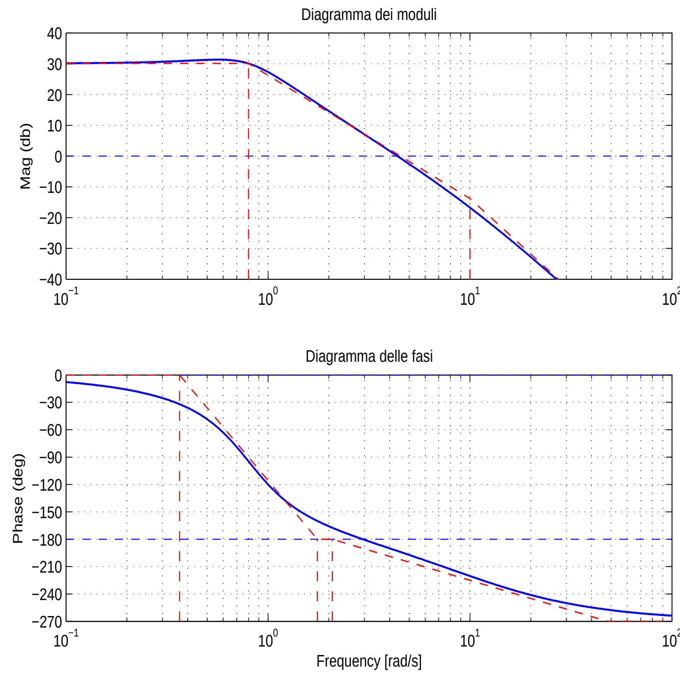
$$T_a \simeq \frac{3}{0.4}\ \text{s} = 7.5\ \text{s}.$$

c) i margini di stabilità del sistema $G(s)$:

$$M_\varphi \simeq -10^\circ, \qquad M_a \simeq 0.5,$$

d) l'errore a regime del sistema retroazionato per ingresso a gradino unitario:

$$e_p \simeq \frac{R_0}{1+32} = \frac{1}{33} \simeq 0.03$$

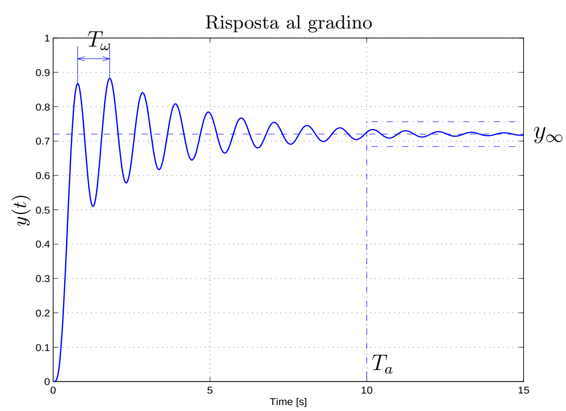


8. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{500(2+0.3s)(s^2+25s+70^2)}{(5s+21)(3s+10)(s^2+10s+900)(s^2+0.6s+36)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t\to\infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 0.72, \qquad T_a \simeq 10\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{6} = 1.05\,\text{s}.$$



9. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(2s+3)^2}{s(5\,s-2)}\,e^{-3\,t_0 s} \qquad \to \qquad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{4\omega^2+9}{\omega\sqrt{4+25\omega^2}} \\[2ex] \varphi(\omega) = 2\arctan\dfrac{2\omega}{3} - 3\,t_0\,\omega - \dfrac{\pi}{2} - \pi + \arctan\dfrac{5\omega}{2} \end{cases}$$

Diagramma dei moduli: $G_d(s)$

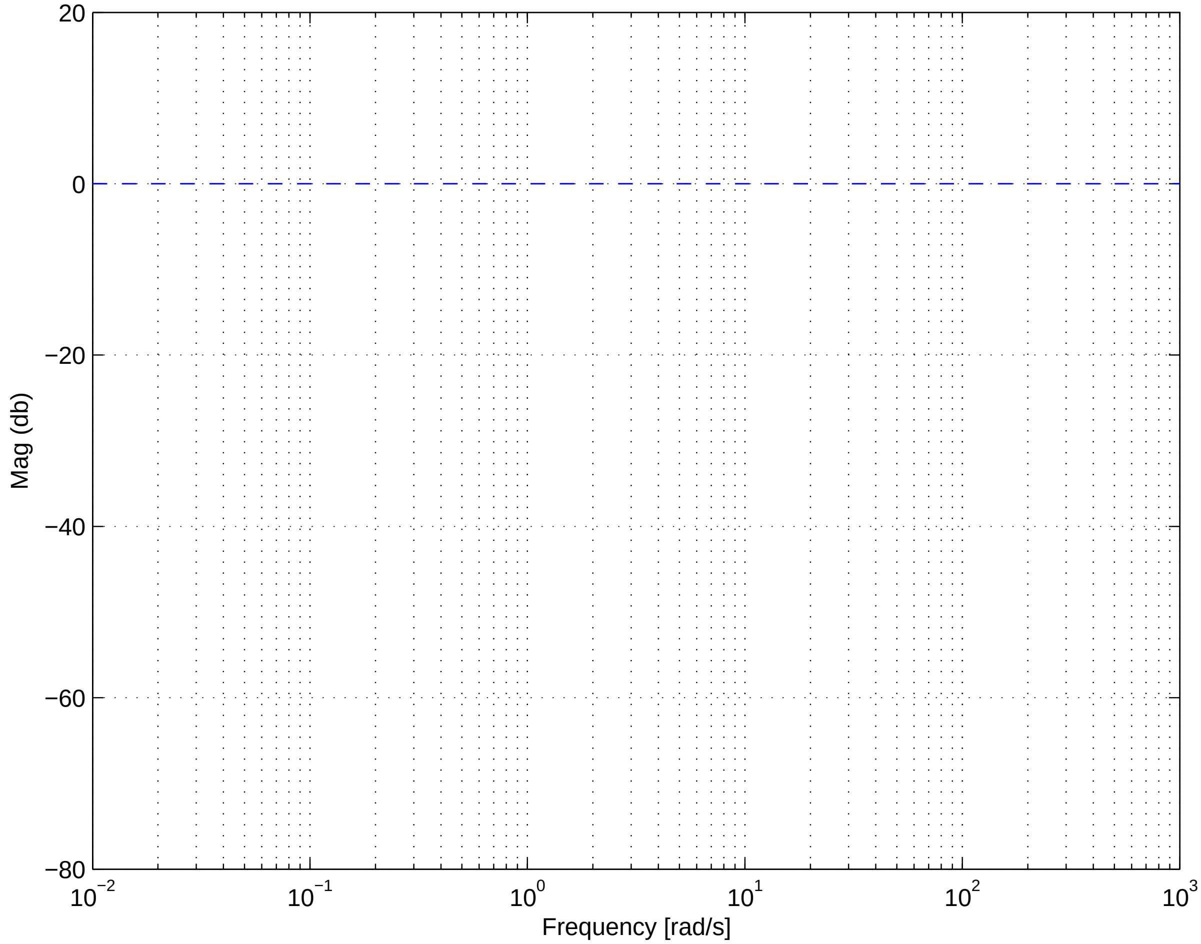


Diagramma delle fasi: $G_d(s)$

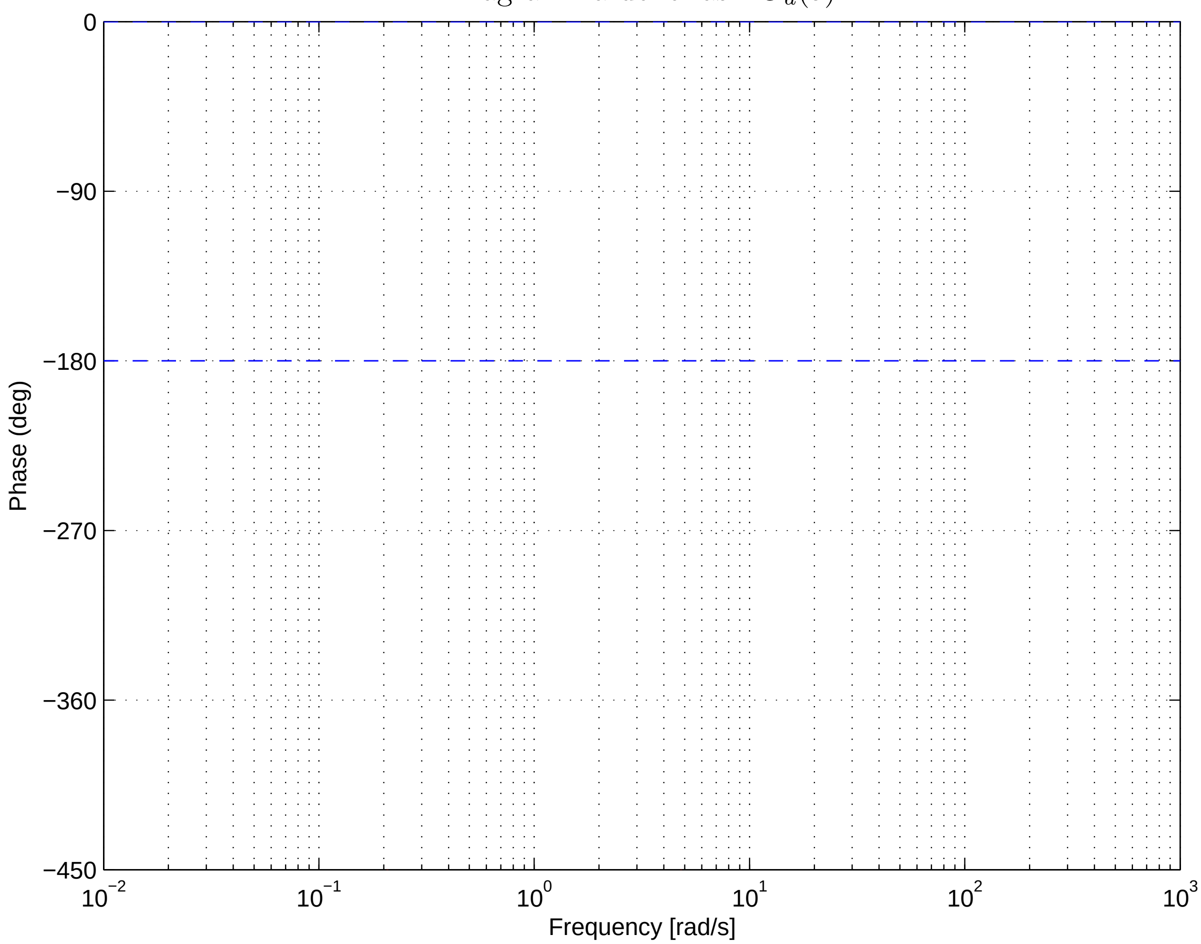


Diagramma dei moduli: $G_e(s)$

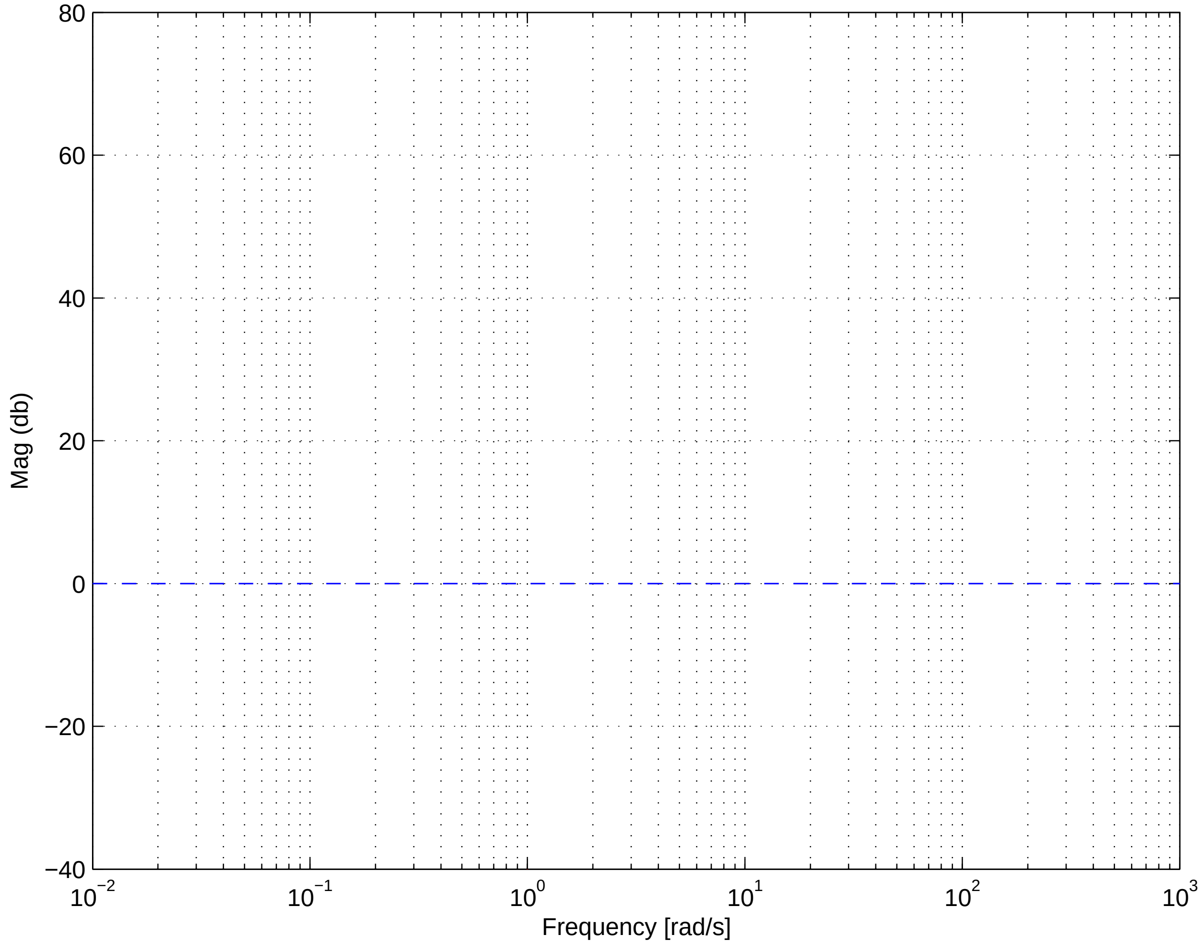


Diagramma delle fasi: $G_e(s)$