Controlli Automatici - Prima parte
9 Novembre 2023 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 3\,t^3\,e^{-2t} + 6\sin(4t), \qquad\qquad x_2(t) = 4\,\delta(t) + 2\,e^{-3\,t}\cos(5t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{18}{(s+2)^4} + \frac{24}{s^2+4^2}, \qquad\qquad X_2(s) = 4 + \frac{2(s+3)}{(s+3)^2+5^2}.$$

a.2) Calcolare la trasformata di Laplace Inversa $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{5}{s} + \frac{12}{s(s+1)(s+4)}, \qquad\qquad G_2(s) = 3 + \frac{2\,e^{-3s}}{s^3}$$

Soluzione:

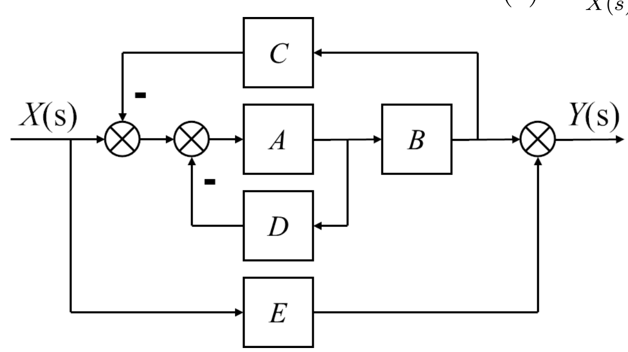
$$g_1(t) = 8 - 4\,e^{-t} + e^{-4\,t}, \qquad\qquad g_2(t) = 3\,\delta(t) + \begin{cases} 0 & t < 3 \\ (t-3)^2 & t \geq 3 \end{cases}$$

Infatti, per la seconda parte $\bar{G}_1(s)$ della funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\bar{G}_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12}{s(s+1)(s+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s} - \frac{4}{(s+1)} + \frac{1}{(s+4)}\right] = 3 - 4\,e^{-t} + e^{-4\,t}.$$

b) Dato lo schema a blocchi riportato in figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G(s) = \frac{A\,B + E(1 + A\,D + A\,B\,C)}{1 + A\,D + A\,B\,C}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

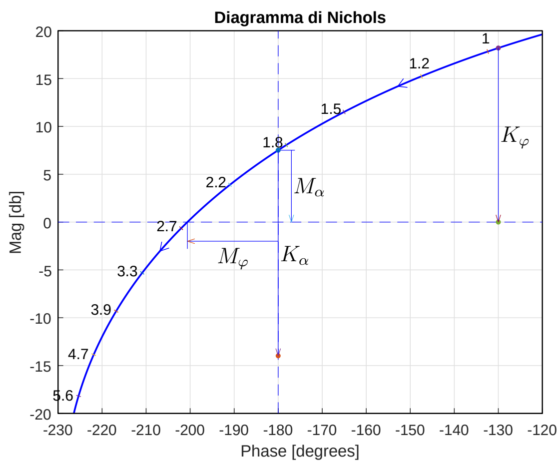
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

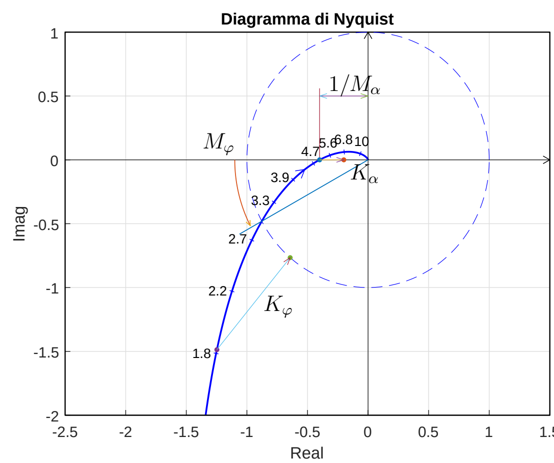
c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50$;

c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

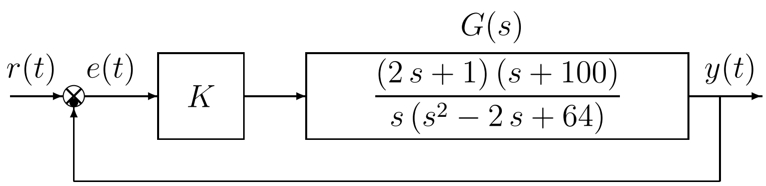
$G_1(j\omega)$ $\qquad\qquad$ $G_2(j\omega)$





c.1) $M_a = -7.51$ db $= 0.421$	c.1) $M_a = 2.5$
c.2) $M_\varphi = -20.6$	c.2) $M_\varphi = 28.7$
c.3) $K_\varphi = -18.2$ db $= 0.123$	c.3) $K_\varphi = 0.515$
c.4) $K_\alpha = -21.5$ db $= 0.0842$	c.4) $K_\alpha = 0.5$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{(2\,s+1)\,(s+100)}{s\,(s^2-2\,s+64)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + (2K-2)s^2 + (201K+64)s + 100K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 201K+64 \\ 2 & 2K-2 & 100K \\ 1 & 402K^2-374K-128 & \\ 0 & 100K & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$2K-2>0, \qquad 402K^2-374K-128>0, \qquad 100K>0,$$

dai quali si ricava:

$$K>1, \qquad (K<-0.26612)\cup(K>1.1965), \qquad K>0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 1.1965 = K_1.$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{100K_1}{2K_1-2}} = 17.4497.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

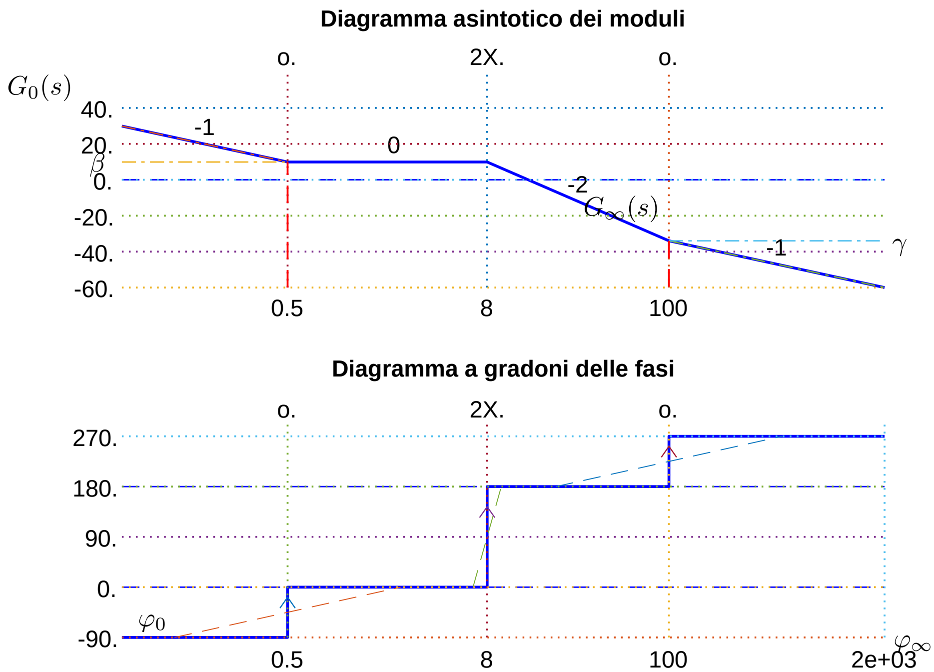


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1.5625}{s}, \qquad G_\infty(s) = \frac{2}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.5$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 100$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.5} = 3.125 = 9.897 \text{ db}, \qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=100} = 0.02 = -33.98 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati: $\delta_1 = 0.125$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con il semiasse reale negativo e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 2 + \frac{1}{100} - \frac{-2}{64} = 2.041 > 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto. La posizione dell'asintoto è la seguente:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = 1.5625 \cdot (2.0412) = 3.1895.$$

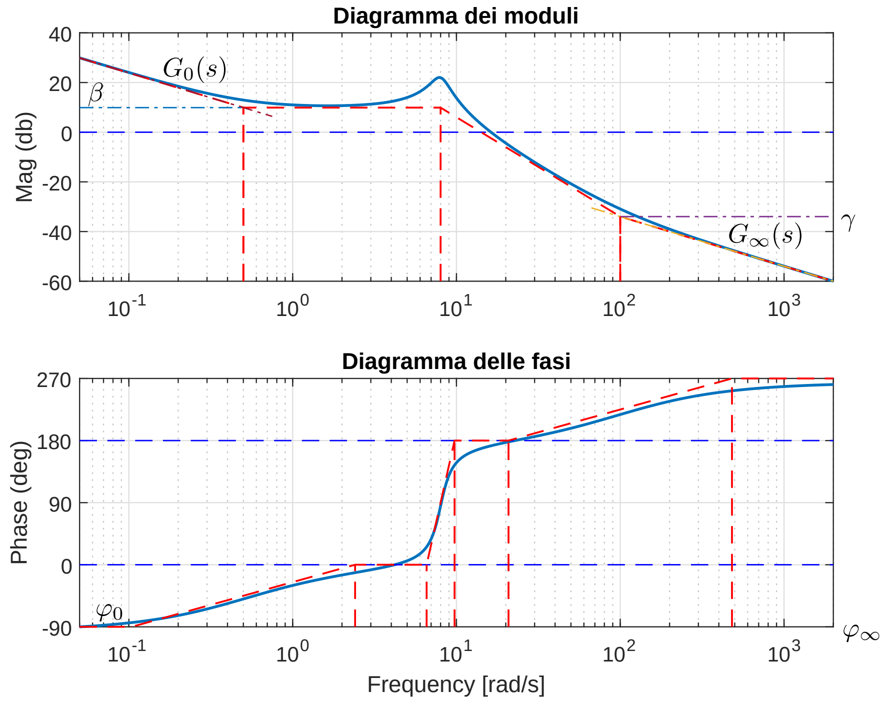


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

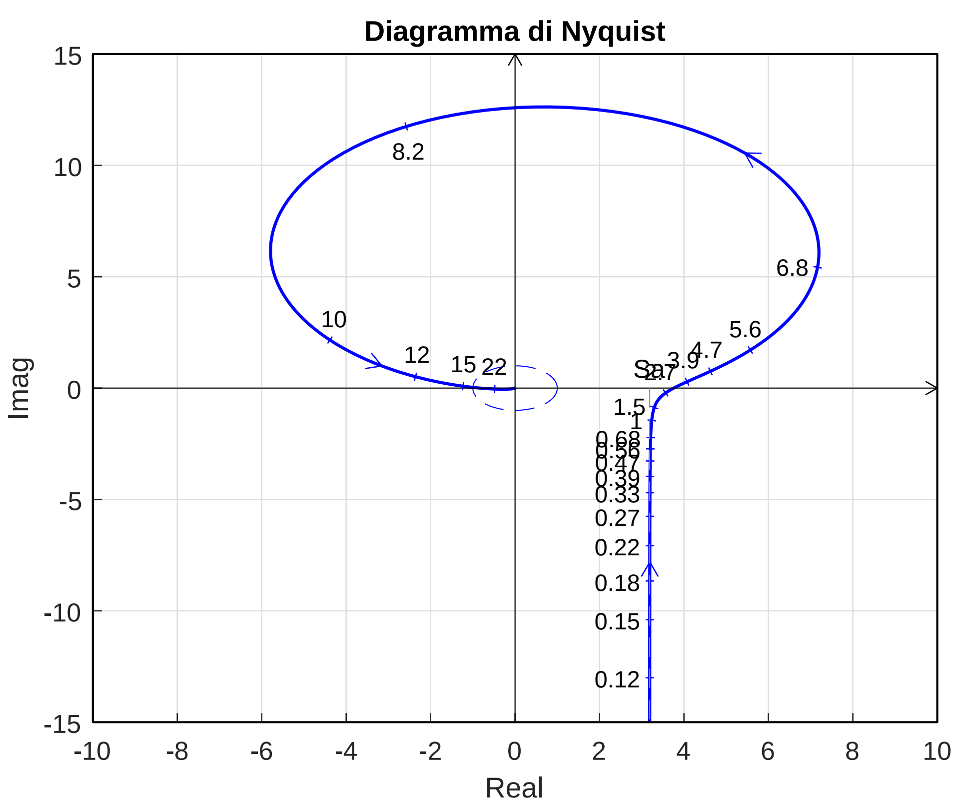


Figura 3: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in\ ]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi = +2\,\pi.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $+2\,\pi$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -0.5 - 100 - 2 = -102.5 < 0.$$

L'andamento del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ nell'intorno dell'origine è mostrato in Fig. 4.

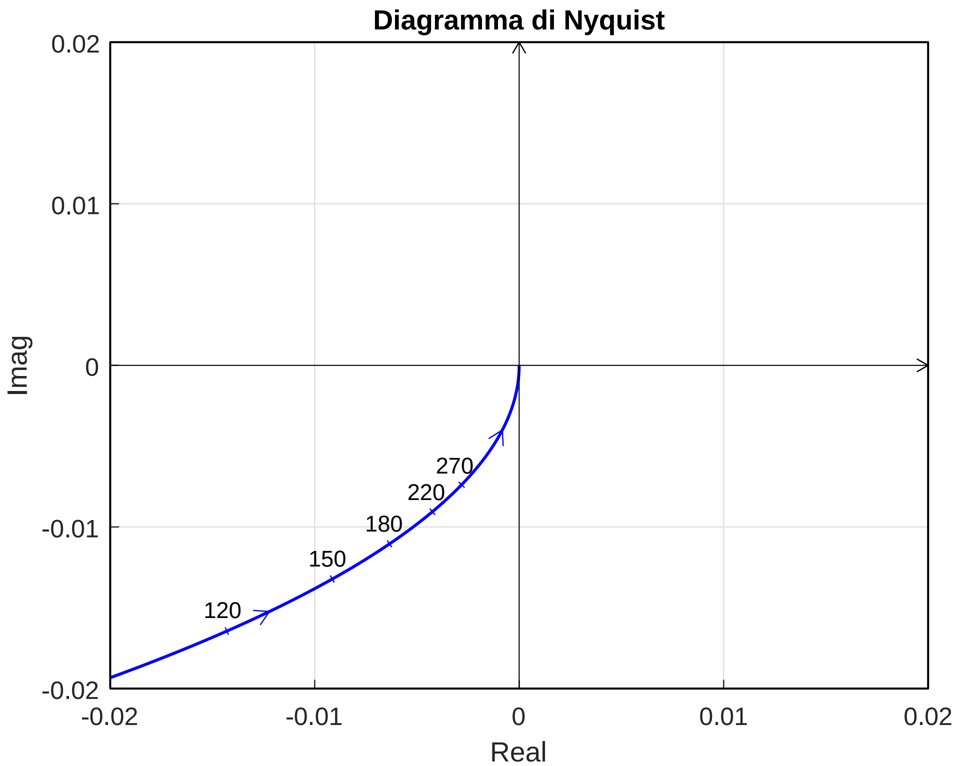


Figura 4: L'andamento del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ nell'intorno dell'origine.

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K_1} = -\frac{1}{1.1965} = 0.8358.$$

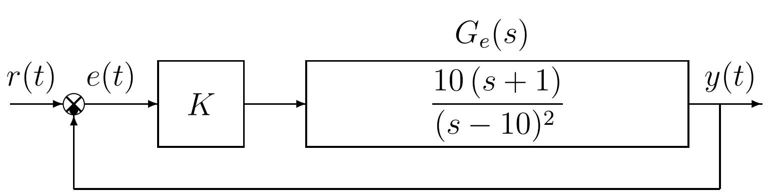
in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 17.4497$.

d.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $|e_v| = 0.01$ per ingresso a rampa $x(t) = 3\,t$.

<u>Soluzione</u>. L'errore a regime e_p del sistema retroazionato per ingresso a rampa $x(t) = 3t$ è:

$$e_v = \frac{R_0}{K_v} = \frac{3}{1.5625\,K} = 0.01 \qquad \to \qquad K = \frac{3}{1.5625 \cdot 0.01} \simeq 192.$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{10\,(s+1)}{(s-10)^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^2 + (10K-20)s + (10K+100) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 10K+100 \\ 1 & 10K-20 & \\ 0 & 10K+100 & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$10K - 20 > 0, \qquad\qquad 10K + 100 > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > 2, \qquad\qquad K > -10.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 2 = K_1.$$

La pulsazione ω_1 corrispondente al valore limite K_1 è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{10K_1 + 100}{1}} = 10.95.$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

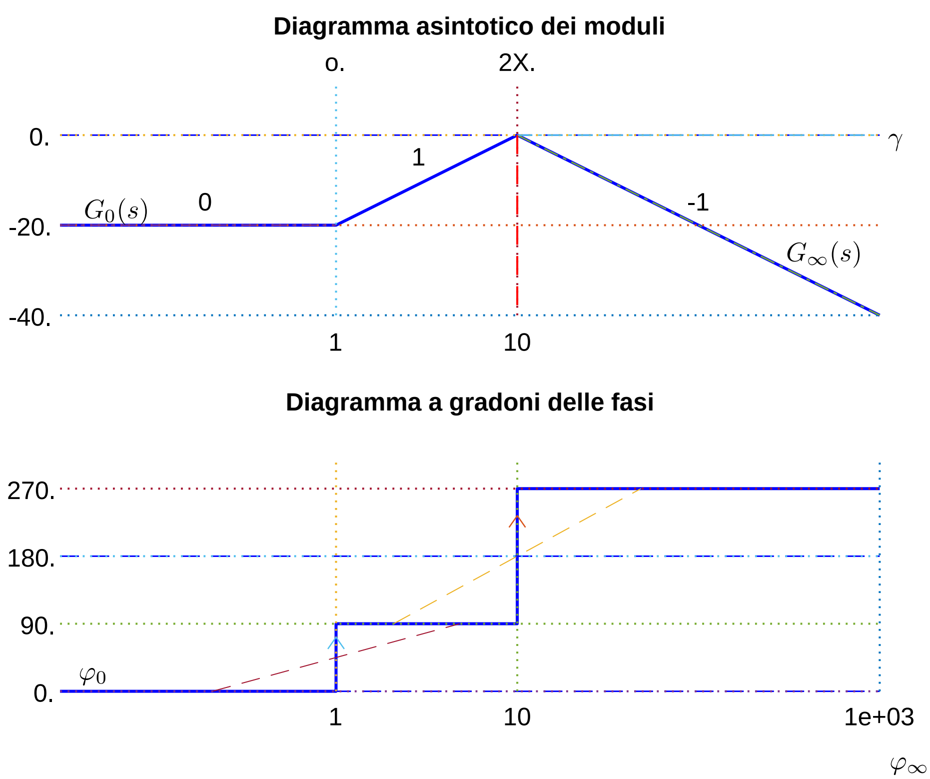


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = 0.1, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{10}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 0.1 = -20 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 1 = 0 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 6.

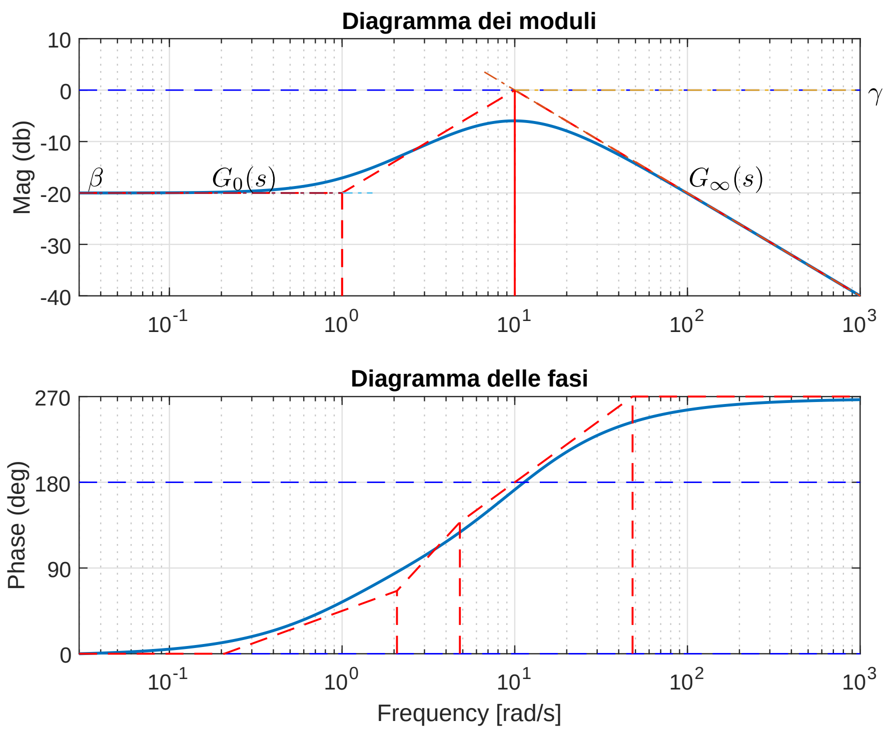


Figura 6: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 7. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = 0$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 1 - \frac{1}{-10} - \frac{1}{-10} = 1.2 > 0.$$

Il sistema è di tipo 0 per cui nel diagramma di Nyquist non è presente nessun asintoto. Partendo dalla fase iniziale $\varphi_0 = 0$, la variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\,\pi}{2}.$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -1 - 10 - 10 = -21 < 0.$$

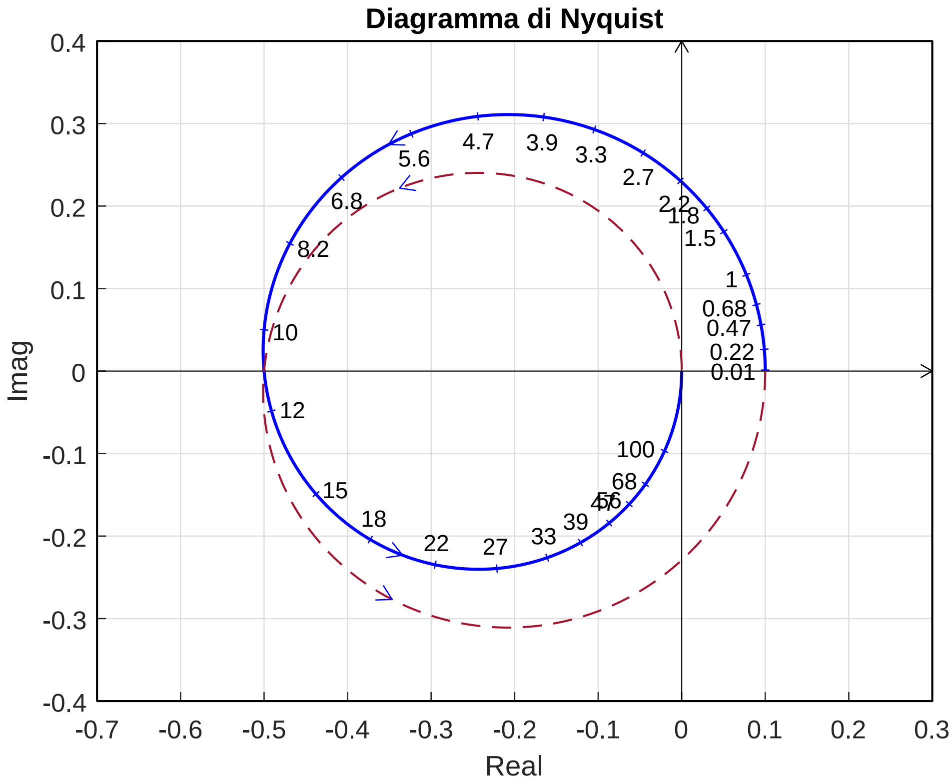


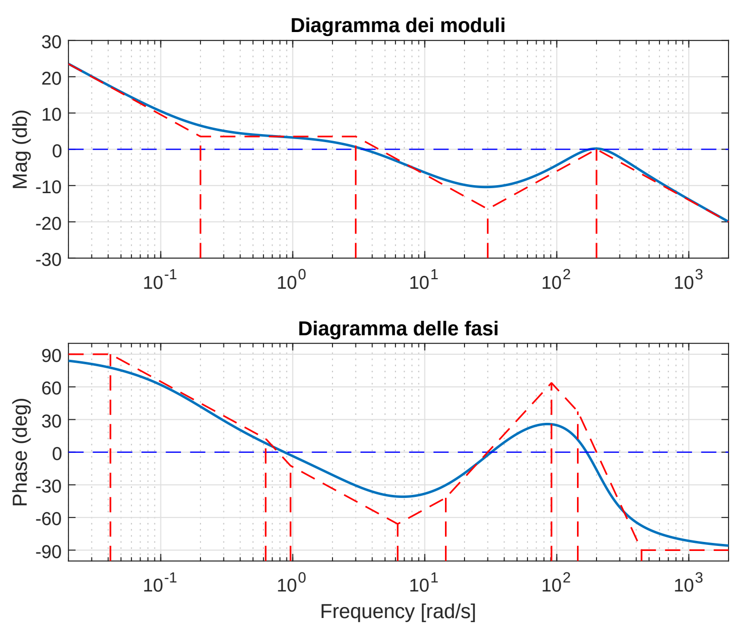
Figura 7: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

Per $K = K^*$, l'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo si ha nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{2} = -0.5.$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 10.95$.

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.



Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{200\,(s-0.2)\,(s+30)^2}{s\,(s+3)\,(s^2+200\,s+40000)}$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

Soluzione. La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{200\,(s-0.2)\,(s+30)^2}{s\,(s+3)\,(s^2+200\,s+40000)}$$

Il valore $K = 200$ puó essere calcolato in due modi diversi:

1) calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.2$:

$$|G_0(s)|_{s=0.2\,j} = \left|\frac{-0.0015\,K}{s}\right|_{s=0.2\,j} = \frac{0.0015\,K}{0.2} = \beta \simeq 3.52 \text{ db} \simeq 1.5 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 200.$$

2) calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 200$:

$$|G_\infty(s)|_{s=200\,j} = \left|\frac{K}{s}\right|_{s=200\,j} = \frac{K}{200} = \gamma \simeq 0 \text{ db} \simeq 1 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 200.$$

I coefficienti di smorzamento δ delle coppie di poli o zeri complessi coniugati presenti all'interno della funzione G(s) sono i seguenti:

$$\begin{array}{lcll} (s^2 + 200\,s + 200^2) & \rightarrow & M_{\omega_n} \simeq 0 \text{ db} = 1 & \rightarrow \quad \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 0.5 \\ (s^2 + 60\,s + 30^2) & \rightarrow & M_{\omega_n} \simeq -6.02 \text{ db} = 0.5 & \rightarrow \quad \delta = \frac{1}{2\,M_{\omega_n}} \simeq 1 \end{array}$$

I valori M_{ω_n} si leggono sul diagramma di Bode dei moduli come distanza tra il diagramma asintotico e il diagramma reale alla pulsazione ω_n.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Controlli Automatici - Prima parte

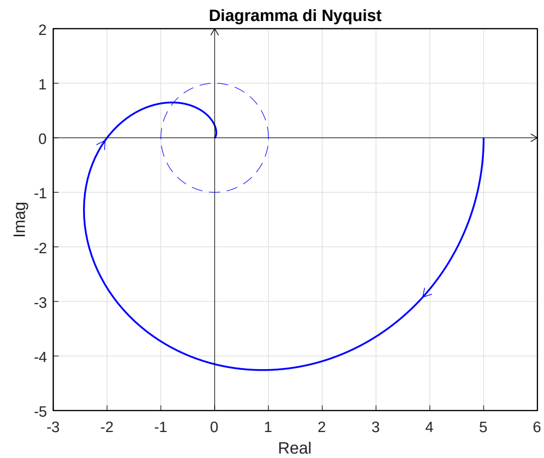
9 Novembre 2023 - Domande

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$4\,\dddot{y}(t)+2\,\ddot{y}(t)+5\,\dot{y}(t)+3\,y(t)=2\,\ddot{x}(t)+3\,\dot{x}(t)+x(t) \quad\rightarrow\quad G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2\,s^2+3\,s+1}{4\,s^3+2\,s^2+5\,s+3}$$

2. Sul piano di Nyquist riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ di un sistema $G(s)$ a fase minima caratterizzato dai seguenti parametri:
   a) Guadagno statico $G(0)=5$;
   b) Margine di ampiezza $M_\alpha \simeq 0.5$;
   c) Margine di fase $M_\varphi \simeq -45°$;
   d) Fase finale $\varphi_\infty = -360°$;



3. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del seguente sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale $x(t)$:

$$x(t)=6+5\sin(4\,t+30°) \longrightarrow \boxed{G(s)=\frac{10}{(s+3)^2}} \longrightarrow y(t)\simeq \tfrac{20}{3}+2\,\sin\left(4\,t+30°-2\,\arctan\left(\tfrac{4}{3}\right)\right)$$

Infatti si ha che:

$$G(j4)=\frac{10}{(j4+3)^2} \quad\rightarrow\quad |G(j4)|=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}, \qquad \arg G(j4)=-2\,\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

4. Completare la seguente formulazione del criterio di Nyquist (quella valida anche per sistemi instabili ad anello aperto).
   Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che la funzione $F(s)$ *non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio*"

   condizione ◯ *solo necessaria* ◯ *solo sufficiente* ⊗ *necessaria e sufficiente*

   affinché "*il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile*"
   è che "*il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.*

5. In un sistema del 2° ordine la distanza del poli dall'origine (a parità di direzione) influisce sui seguenti parametri della risposta al gradino

   ◯ massima sovraelongazione $S\%$ ⊗ tempo di salita T_s
   ◯ coefficiente di smorzamento δ ⊗ tempo di assestamento T_a

6. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{(4\,s+1)(s+2)}{s(s+3)(5\,s+1)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = \frac{4}{5}, \qquad y_\infty = \frac{2}{3}$$

7. Un ritardo puro $G(s) = e^{-t_0 s}$:

⊗ è un sistema lineare   ⊗ è un sistema dinamico   ○ è un sistema a fase minima

8. Sia $X(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $x(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della derivata":

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s\,X(s) - x(0)$$

9. La formula di Bode per il calcolo della fase di un sistema a partire dal diagramma delle ampiezze

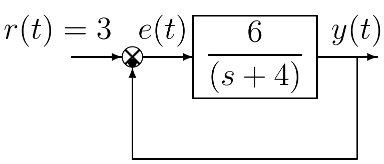
⊗ è una formula esatta   ○ è valida per i sistemi lineari stabili

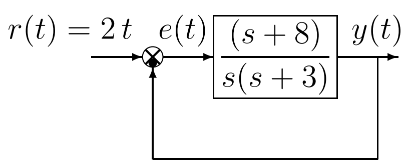
○ è una formula approssimata   ⊗ è valida per i sistemi a fase minima

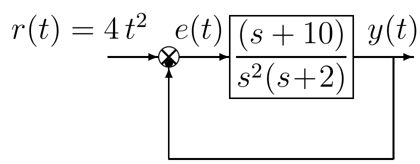
10. Calcolare il valore dei parametri a, b e c della seguente funzione di trasferimento $G(s)$ in modo che la risposta $y(t)$ al gradino unitario della funzione $G(s)$ sia caratterizzato da: un valore iniziale $y(0^+) = 2$, un valore finale $y(\infty) = 4$ e un tempo di assestamento $T_a = 3$ s:

$$G(s) = \frac{a\,s+b}{s+c} \qquad \rightarrow \qquad a = 2, \qquad b = 4, \qquad c = 1.$$

11. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:







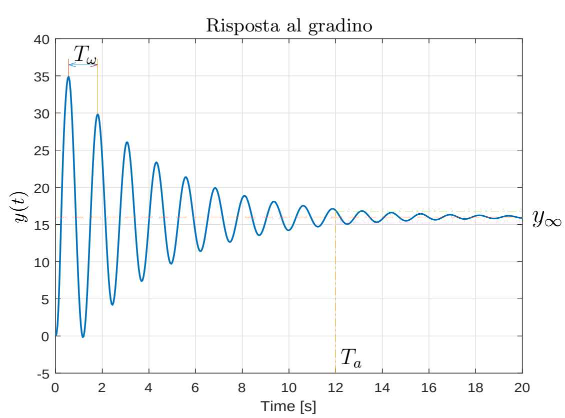
$$e(\infty) = \frac{3}{1+\frac{3}{2}} = \frac{6}{5} = 1.2 \qquad e(\infty) = \frac{2}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{4} = 0.75 \qquad e(\infty) = \frac{8}{5} = 1.6$$

12. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{20(8+0.8s)(5s+25)(s^2+12s+40^2)}{(s+8)(0.2s+5)(s^2+10s+400)(\mathbf{s^2+0.5s+25})}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 16, \qquad T_a \simeq 12\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq \tfrac{2\pi}{5} = 1.256\,\text{s}.$$



13. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s-4)}{s(5\,s+3)}\,e^{-2\,s} \qquad \to \qquad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2+16}}{\omega\sqrt{9+25\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan\frac{\omega}{4} - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{5\omega}{3} - 2\,\omega \end{cases}$$