Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Controlli Automatici - Prima parte
7 Settembre 2023 - Esercizi

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [4 - 3\cos(5\,t)]\, e^{-2\,t}, \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 5 \\ (t-5)^2\, e^{-3\,(t-5)} & t \geq 5 \end{cases}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{4}{s+2} - \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+25}, \qquad X_2(s) = \frac{2\,e^{-5\,s}}{(s+3)^3}.$$

Infatti, per il primo segnale $x_1(t)$ si ha che:

$$\mathcal{L}\left[x_1(t)\right] = \mathcal{L}\left[4\,e^{-2\,t} - 3\cos(5\,t)\,e^{-2\,t}\right] = \frac{4}{s+2} - \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+25}$$

Il secondo segnale $x_2(t)$, invece, coincide con il segnale $x(t) = t^2\,e^{-3\,t}$ ritardato nel tempo di 5 secondi: $x_2(t) = x(t-5)$. Si ha quindi che:

$$\mathcal{L}\left[x_2(t)\right] = \mathcal{L}\left[x(t-5)\right] = \mathcal{L}\left[x(t)\right]\, e^{-5\,s} = \mathcal{L}\left[t^2\,e^{-3\,t}\right]\, e^{-5\,s} = \left[\frac{2}{(s+3)^3}\right] e^{-5\,s} = \frac{2\,e^{-5\,s}}{(s+3)^3}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2}{s(s+1)(1+2\,s)}, \qquad G_2(s) = 2 + \frac{5}{(s+3)^2+25}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = 2 + 2\,e^{-t} - 4\,e^{-0.5\,t}, \qquad g_2(t) = 2\,\delta(t) + e^{-3\,t}\,\sin(5\,t)$$

Per la funzione $G_1(s)$ si ha:

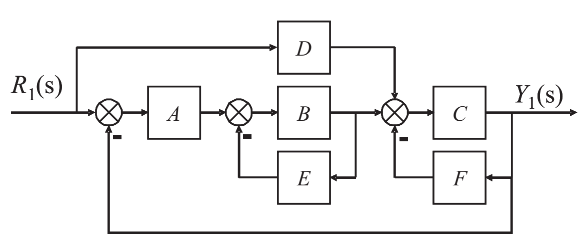
$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)(s+0.5)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} + \frac{2}{(s+1)} - \frac{4}{(s+0.5)}\right] = 2+2\,e^{-t}-4\,e^{-0.5\,t}$$

Per la funzione $G_2(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_2(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[2 + \frac{5}{(s+3)^2+25}\right] = 2\,\delta(t) + e^{-3\,t}\,\sin(5\,t)$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$:

$$G(s) = \frac{A\,B\,C + D\,C\,(1+B\,E)}{1 + B\,E + C\,F + A\,B\,C + B\,E\,C\,F}$$



c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;

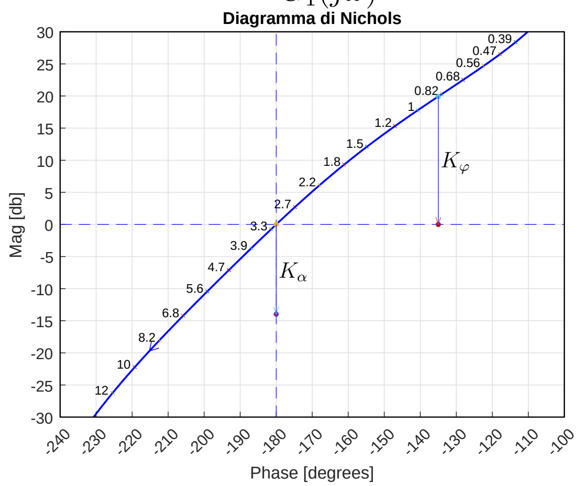
c.2) il margine di fase M_φ del sistema;

c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\, G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 45$;

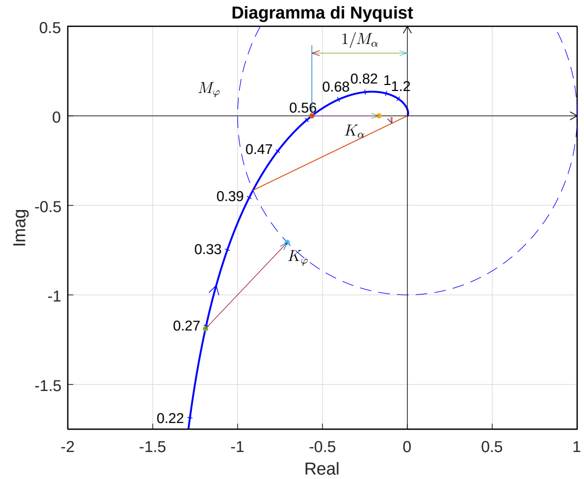
c.4) il guadagno K_α per cui il sistema $K_\alpha\, G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



$G_1(j\omega)$:

c.1) $M_a = 0$ db $= 1$

c.2) $M_\varphi = 0°$

c.3) $K_\varphi = -19.92$ db $= 0.1008$

c.4) $K_\alpha = -13.97$ db $= 0.20002$

$G_2(j\omega)$:

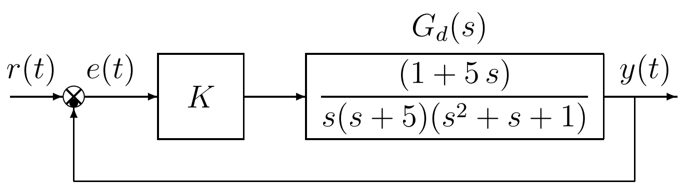
c.1) $M_a = 1.77$

c.2) $M_\varphi = 24.57°$

c.3) $K_\varphi = 0.595$

c.4) $K_\alpha = 0.296$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

<u>Soluzione</u>. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(1+5\,s)}{s(s+5)(s^2+s+1)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 6\,s^3 + 6\,s^2 + 5(K+1)s + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 6 & K \\
3 & 6 & 5(K+1) & \\
2 & 31 - 5\,K & 6\,K & \\
1 & 155 + 94\,K - 25\,K^2 & & \\
0 & 6\,K & &
\end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < \frac{31}{5}, \qquad\qquad K > 0$$

Dalla riga 1 si ottiene la disequazione seguente:

$$155 + 94\,K - 25\,K^2 > 0 \qquad \leftrightarrow \qquad -\frac{31}{25} < K < 5$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < 5 = K^*$$

La pulsazione ω^* corrispondente alvalore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{5(K^*+1)}{6}} = \sqrt{5} = 2.236$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_d(s)$.
Soluzione.
I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1. I diagrammi di

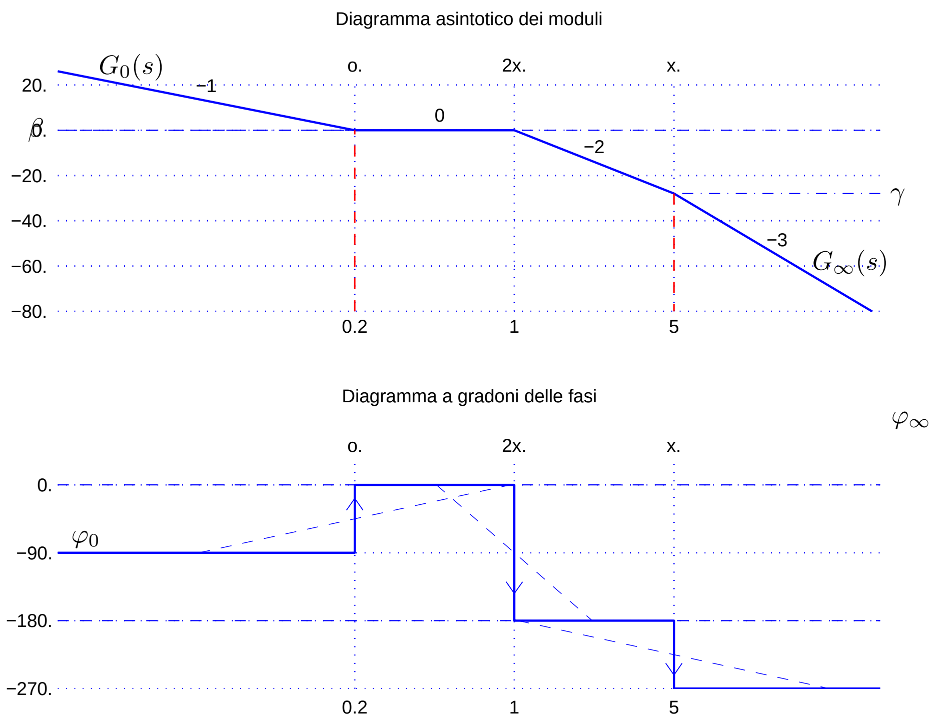


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 2.
Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{5\,s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{5}{s^3}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.2$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 5$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.2} = 1 = 0 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=5} = \frac{5}{125} = 0.04 = -27.96 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri stabili è $\delta = 1/(2\omega_n) = 0.5$.

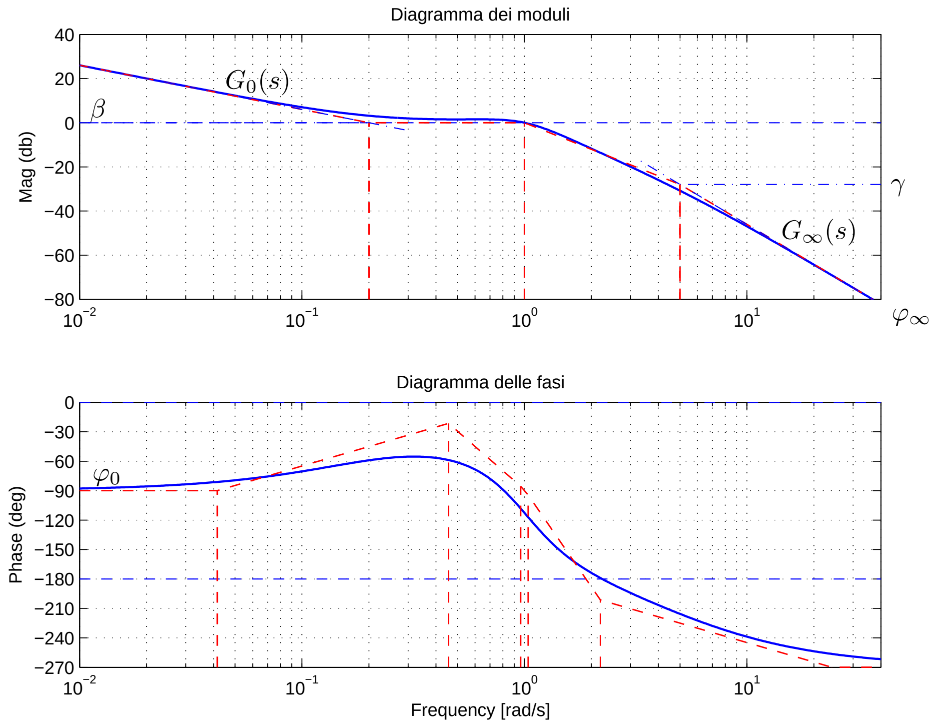


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G_d(s)$.

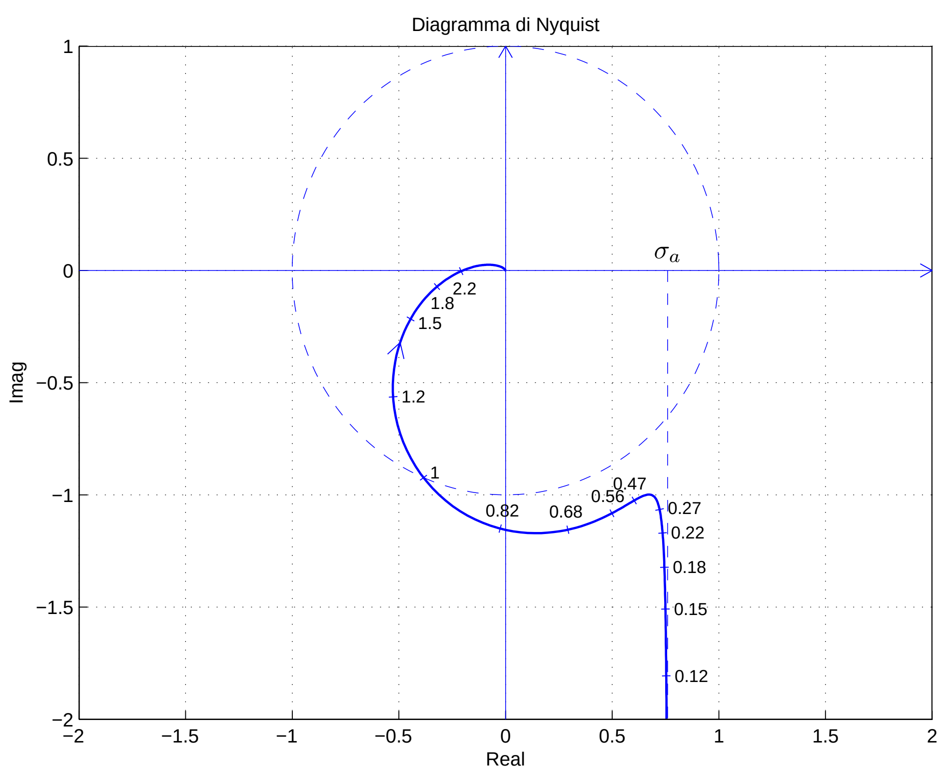


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_d(s)$. Calcolare esattamente le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a φ_0 in quanto Δ_τ è positiva:

$$\Delta\tau = 5 - \frac{1}{5} - 1 = 3.8 > 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale:

$$\sigma_a = \frac{1}{5}\left(5 - \frac{1}{5} - 1\right) = 0.76$$

La variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\pi$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di π in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto a φ_∞ in quanto Δ_p è positiva:

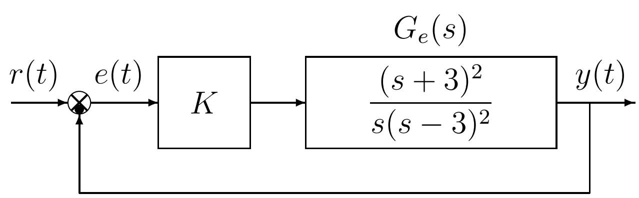
$$\Delta_p = -\frac{1}{5} + 5 + 1 = 5.8 > 0.$$

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{5} = -0.2$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* \simeq 2.234$.

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{K(s+3)^2}{s(s-3)^2} = 0 \qquad \to \qquad s^3 + (K-6)s^2 + (9+6K)s + 9K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (9+6K) \\ 2 & (K-6) & 9K \\ 1 & (K-6)(9+6K) - 9K & \\ 0 & 9K & \end{array}$$

Dalla riga 1 si ricava la seguente equazione del secondo ordine:

$$K^2 - 6K - 9 > 0 \qquad \to \qquad \left(K < 3 - \sqrt{18}\right) \cup \left((K > 3 + \sqrt{18}\right)$$

Il sistema retroazionato è stabile per

$$K > 3 + \sqrt{18} = 7.2426 = K^*$$

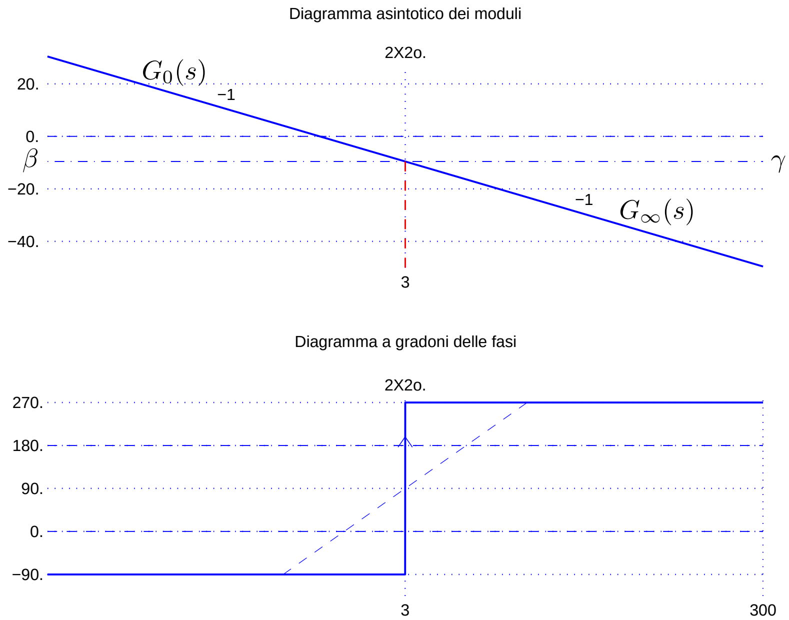


Figura 4: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_e(s)$.

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è :

$$\omega_1^* = \sqrt{9 + 6K^*} \simeq 7.2426$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.
<u>Soluzione</u>. I diagrammi asintotici di Bode sono mostrati in Fig. 4. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

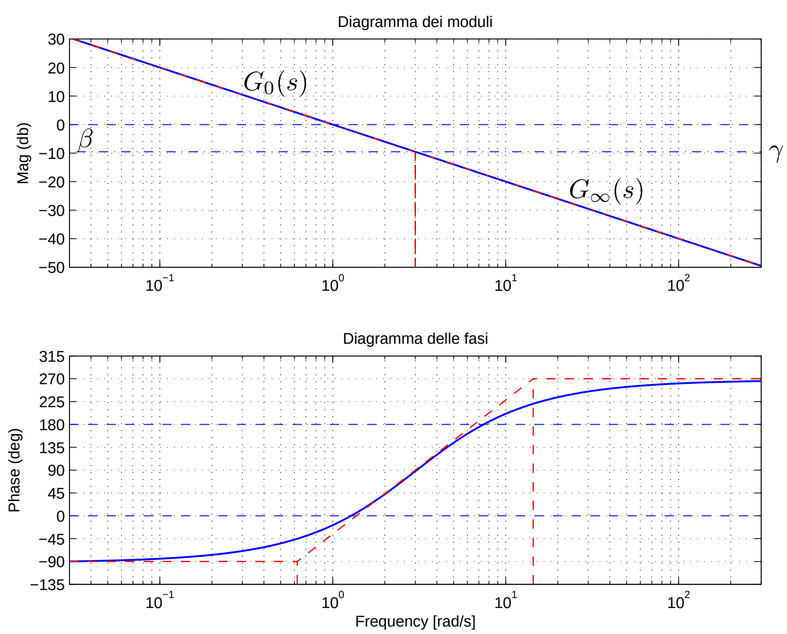


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{1}{s}$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze i guadagno β e γ alla pulsazione $\omega = 3$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=3} = \gamma = |G_\infty(s)|_{s=3} = \frac{1}{3} = -9.54 \text{ db}.$$

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale e le eventuali intersezioni σ_i^* con il semiasse reale negativo.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale

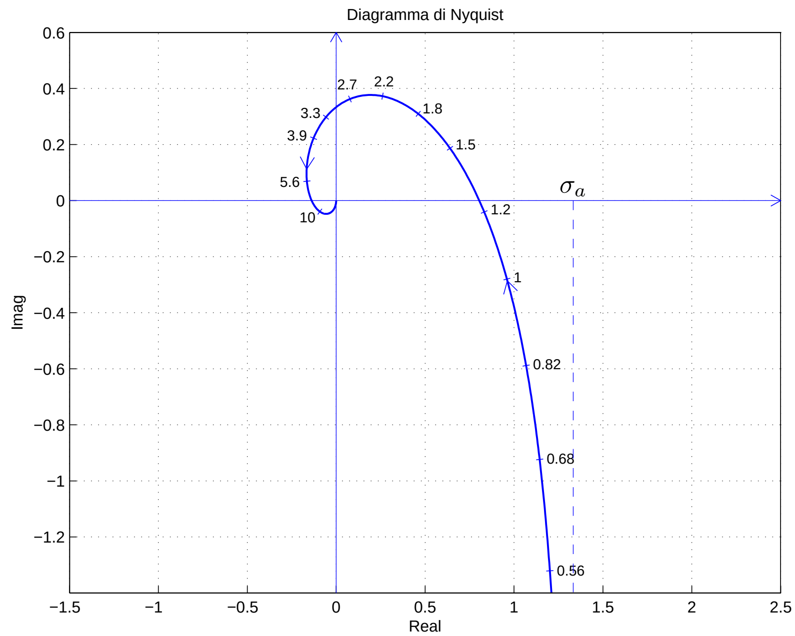


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta\tau = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} > 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto:

$$\sigma_a = \Delta_\tau K = \frac{4}{3} = 1.333$$

La variazione di fase

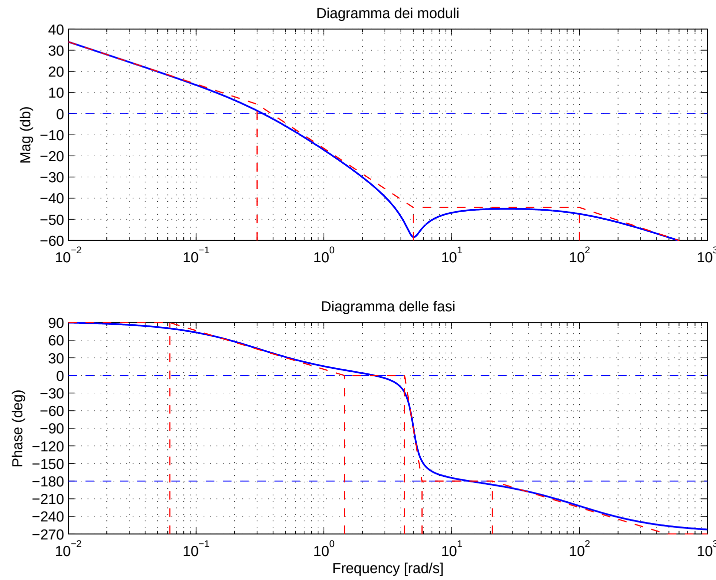
$$\Delta\varphi = \pi + \pi = 2\pi$$

indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di 2π in senso antiorario per raggiungere la fase finale φ_∞. Esiste una intersezione σ^* con il semiasse reale negativo:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K_1^*} = -0.1381$$

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.



$$G(s) = \frac{-0.6(s^2 - s + 25)}{s(s+100)(s+0.3)}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

Soluzione:

f.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{-0.6(s^2 - s + 25)}{s(s+100)(s+0.3)}.$$

Il valore $K = -0.6$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s) = \frac{K}{s}$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100\,j} = \left|\frac{K}{s}\right|_{s=100\,j} = \frac{|K|}{100} = \gamma \simeq -44.437 \text{ db} \simeq 0.006 \qquad \rightarrow \qquad |K| \simeq 0.6.$$

Il segno meno della costante K è dovuta al fatto che la fase iniziale della $G(j\omega)$ letta sul diagramma di Bode é $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, mentre la fase iniziale dell'approssimante $G_\infty(s) = \frac{K}{s}$ é $\varphi_0 = \arg K - \frac{\pi}{2}$. Quindi la costante K é negativa: $\arg K = \pi$. Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{10} = 0.1.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 14$ db $\simeq 5$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli.

Controlli Automatici - Prima parte

7 Settembre 2023 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente l'equazione differenziale:

$$\dddot{y} + 2\ddot{y} + \alpha\,\dot{y} + 4\,y = \ddot{x} + 5\,\dot{x} + 3\,x \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 5\,s + 3}{s^3 + 2s^2 + \alpha\,s + 4}\,X_1(s)$$

Applicando il criterio di Routh, dire per quali valori del parametro α il sistema $G(s)$ è stabile:

$$\alpha > 2$$

Infatti, applicando il criterio di Routh al denominatore della funzione $G(s)$

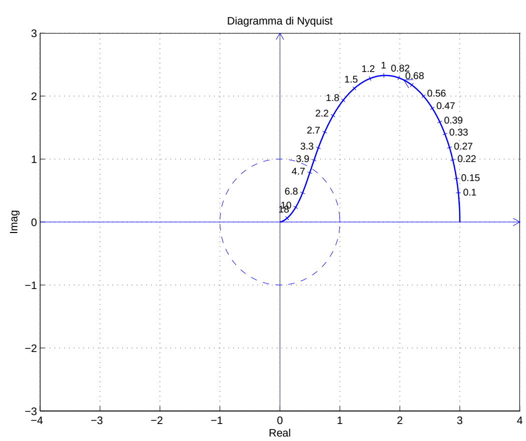
$$s^3 + 2s^2 + \alpha\,s + 4 = 0$$

si ottiene la seguente tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & \alpha \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2\alpha - 4 & \\ 0 & 4 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \quad 3 > 0 \\ \rightarrow \quad 2 > 0 \\ \rightarrow \quad \alpha > 2 \\ \rightarrow \quad 4 > 0 \end{array}$$

Il sistema $G(s)$ risulta quindi stabile per $\alpha > 2$.

2. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{50(s+0.6)}{(1-s)(s+1)(s+10)}$. Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

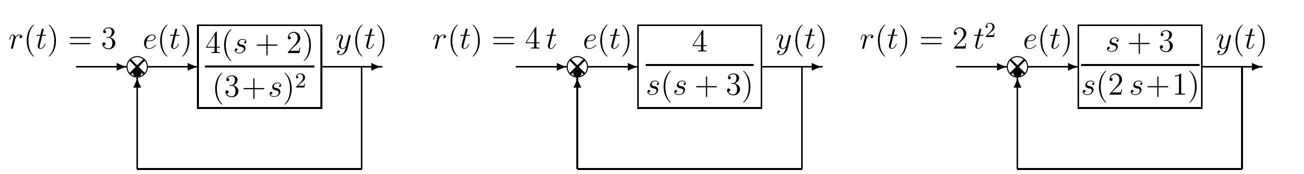


- ○ $(K^* < K < 0)$;
- ○ $(0 < K < K^*)$;
- ⊗ $(K < K^*,\ K^* < 0)$;
- ○ $(K > K^*,\ K^* > 0)$;

Calcolare il valore limite K^*:

$$K < K^* = -\frac{1}{3} = -0.333$$

3. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{3}{1 + \frac{8}{9}} = \frac{27}{17} = 1.58 \qquad e(\infty) = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3 \qquad e(\infty) = \frac{4}{K_a} = \frac{4}{0} = \infty$$

4. Calcolare il segnale sinusoidale in ingresso $x(t)$ del seguente sistema quando in uscita, a regime, è presente il segnale sinusoidale $y(t)$:

$$x(t) = 16\sin(2t) \longrightarrow \boxed{\dfrac{3}{(s+2)^2}} \longrightarrow y(t) \simeq 6\,\sin(2t - 90^\circ)$$

Infatti:

$$G(j2) = \frac{3}{(j2+2)^2} \qquad \to \qquad |G(j2)| = \frac{3}{4+4} = \frac{3}{8}, \qquad \arg(G(j2)) = -2\arctan(\frac{2}{2}) = -\pi$$

5. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{5\,(s-3)(2s+1)}{s(s^2+4s+6)} \qquad \to \qquad y_0 = 10, \qquad y_\infty = -\frac{5}{2} = -2.5$$

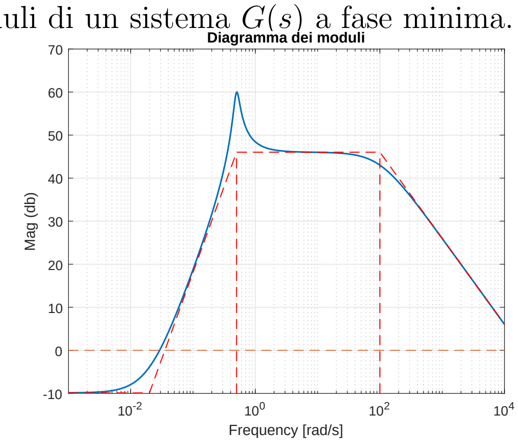
6. Calcolare i parametri a, b e c della funzione di trasferimento $G(s)$ caratterizzata da un guadagno statico $G(0) = 2$, da una pulsazione naturale $\omega_n = 5$ e da un tempo di assestamento $T_a = 2$ s alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{a}{s^2 + b\,s + c} \qquad \to \qquad a = 50, \qquad b = 3 \qquad c = 25.$$

I tre valori sopra indicati si ottengono utilizzando le seguenti tre relazioni:

$$G(0) = 2 = \frac{a}{c}, \qquad \omega_n = 5 = \sqrt{c}, \qquad T_a = 2 = \frac{3}{|\sigma|} = \frac{3}{\frac{b}{2}}.$$

7. Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli di un sistema $G(s)$ a fase minima.



Utilizzando la formula di Bode, calcolare in modo approssimato la fase φ del sistema $G(s)$ in corrispondenza delle seguenti pulsazioni ω:

$$\omega_1 = 0.02 \quad \to \quad \varphi_1 \simeq \tfrac{\pi}{2}$$
$$\omega_2 = 0.5 \quad \to \quad \varphi_2 \simeq \tfrac{\pi}{2}$$
$$\omega_3 = 100 \quad \to \quad \varphi_3 \simeq -\tfrac{\pi}{4}$$
$$\omega_4 = 2000 \quad \to \quad \varphi_4 \simeq -\tfrac{\pi}{2}$$

8. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $f(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della traslazione in s":

$$\mathcal{L}[e^{-a\,t} f(t)] = F(s+a)$$

9. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $5\dot{y}(t) + 2\,y(t) = 0$ con condizione iniziale $y(0) = 3$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$5\,(s\,Y(s) - 3) + 2\,Y(s) = 0 \quad \to \quad Y(s) = \frac{3}{s+0.4} \qquad \to \qquad y(t) = 3\,e^{-0.4\,t}.$$

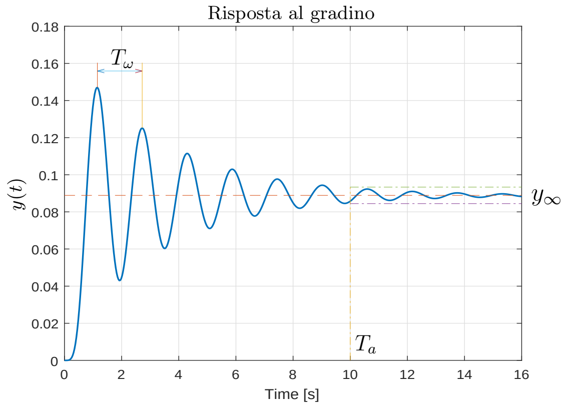
10. L'equazione differenziale $\ddot{y} + 3\,t\,y = 5\,x$, dove x è l'ingresso e y è l'uscita, è:

○ stazionaria ⊗ lineare
⊗ non stazionaria ○ non lineare

11. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{160(2+0.3s)(s^2+10s+40^2)}{(2s+16)(2s+15)^2(s^2+12s+100)(\mathbf{s^2+0.6s+16})}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:



$y_\infty = 0.0888, \quad T_a \simeq \frac{3}{0.3} = 10\,\text{s}, \quad T_\omega \simeq \frac{\pi}{2} = 1.57.$

12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s-3)(2\,s+5)}{s(s+4)}\,e^{-3\,s} \quad \to \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2+9}\sqrt{4\omega^2+25}}{\omega\sqrt{\omega^2+16}} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan\frac{\omega}{3} + \arctan\frac{2\omega}{5} - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{4} - 3\,\omega \end{cases}$$