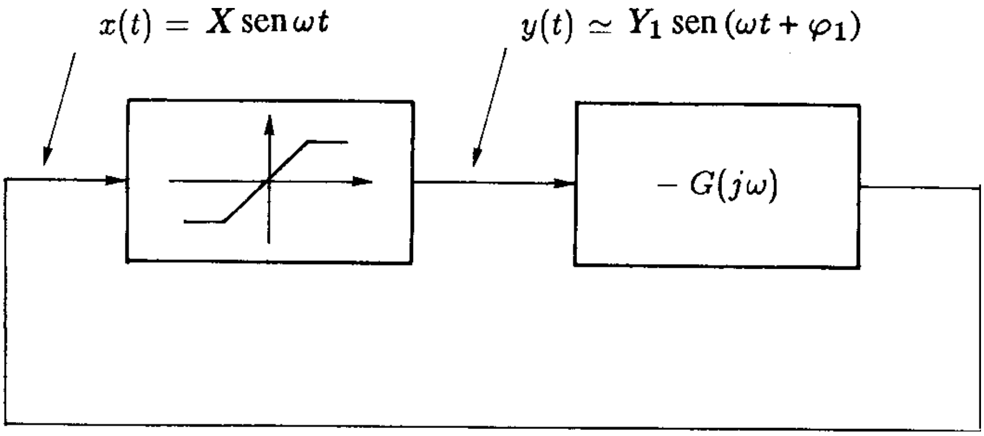
Il metodo della funzione descrittiva

• Tutti i sistemi fisici sono in realtà non lineari e si comportano approssimativamente come sistemi lineari solo per piccoli segnali.

• Il metodo della funzione descrittiva costituisce un utile strumento per verificare se l'innesco di oscillazioni autosostenute in un sistema di controllo progettato sotto l'ipotesi di linearità è possibile o meno

• È un metodo non rigoroso, ma semplice, intuitivo e soddisfacente nella maggior parte dei casi di interesse pratico.

• Il metodo si applica a sistemi che possano essere descritti dal seguente schema:



• Sul sistema si fanno le seguenti ipotesi:

i) l'ingresso r è identicamente nullo;

ii) l'elemento non lineare è puramente algebrico ed è descritto da una caratteristica statica indipendente dalla frequenza del segnale di ingresso;

iii) la caratteristica dell'elemento non lineare è simmetrica rispetto all'origine.

• Si suppone che il sistema sia sede di un'oscillazione persistente e che all'ingresso del blocco non lineare tale oscillazione sia sinusoidale:

$$x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$$

• All'uscita del blocco non lineare si ha un segnale periodico avente la stessa pulsazione ω della sinusoide in ingresso, sviluppabile in serie di Fourier:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t)$$

dove

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos n\omega t \, d\omega t \qquad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \operatorname{sen} n\omega t \, d\omega t$$

• Manca il termine costante per l'ipotesi di simmetria della caratteristica.

• Lo stesso sviluppo in serie può anche essere scritto come

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \operatorname{sen}(n\omega t + \varphi_n)$$

dove $Y_n := \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e $\varphi_n := \arctan \frac{a_n}{b_n}$.

• I valori di a_n, b_n e quindi quelli di Y_n, φ_n sono in genere funzioni dell'ampiezza X del segnale di ingresso.

• Trascurando le armoniche di ordine superiore al primo, il segnale periodico di uscita $y(t)$ può essere approssimato con la sola componente fondamentale:

$$y(t) \simeq Y_1(X) \operatorname{sen}\big(\omega t + \varphi_1(X)\big)$$

• Si definisce *funzione descrittiva* $F(X)$ dell'elemento non lineare il numero complesso, funzione dell'ampiezza X del segnale sinusoidale d'ingresso, il cui modulo è uguale al rapporto fra l'ampiezza della fondamentale del segnale d'uscita e l'ampiezza X del segnale d'ingresso, e il cui argomento è uguale allo sfasamento della fondamentale del segnale d'uscita rispetto al segnale d'ingresso:

$$\boxed{F(X) := \frac{1}{X}\Big(b_1(X) + j\, a_1(X)\Big) = \frac{1}{X} Y_1(X)\, e^{j\varphi_1(X)}}$$

• Entro i limiti corrispondenti a tale approssimazione, la funzione descrittiva è analoga alla funzione di risposta armonica, salvo che essa dipende dall'ampiezza anziché dalla pulsazione del segnale di ingresso.

• Una giustificazione dell'ipotesi di poter trascurare le armoniche di ordine superiore al primo è data dalle seguenti considerazioni:

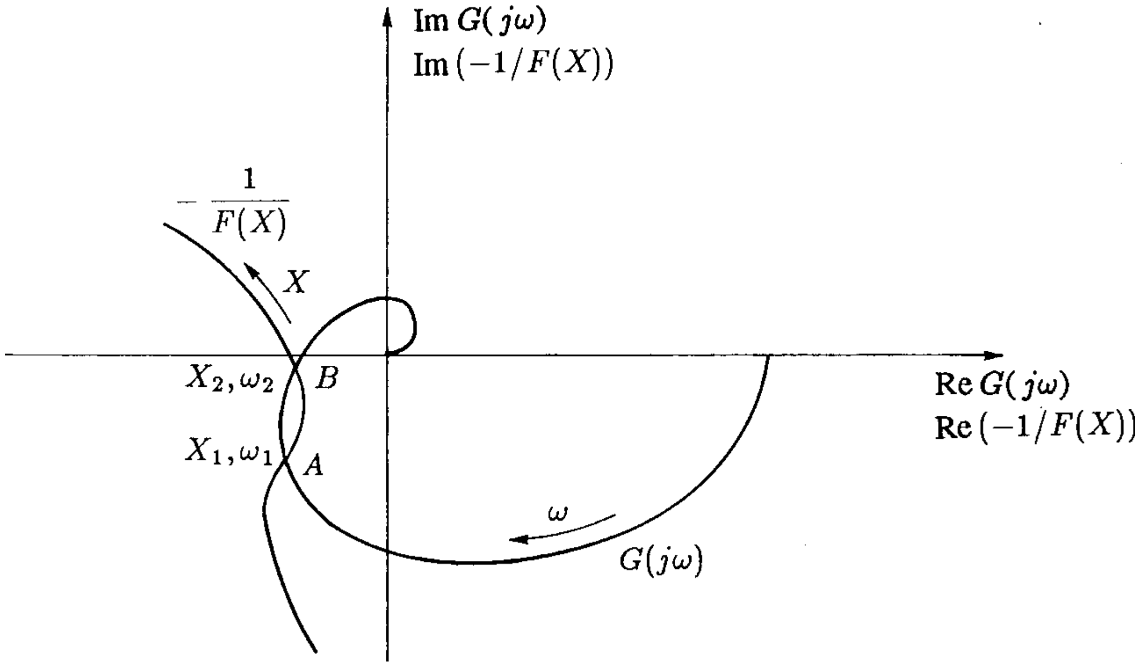
- *i)* la loro ampiezza di solito è minore di quella della fondamentale;
- *ii)* la parte lineare del sistema, comportandosi in genere come un filtro passa basso, tende a ridurne l'ampiezza rispetto alla fondamentale.

• Affinché il sistema sia sede di un'oscillazione persistente deve essere soddisfatta la condizione:

$$\boxed{F(X)\,G(j\omega) = -1} \qquad \rightarrow \qquad G(j\omega) = -\frac{1}{F(X)}$$

• Questa equazione (nelle incognite X e ω) coinvolge funzioni a valori complessi (la funzione descrittiva $F(X)$ e la funzione di risposta armonica $G(j\omega)$): le sue soluzioni corrispondono alle ampiezze e alle pulsazioni di possibili oscillazioni autosostenute presenti nel sistema.

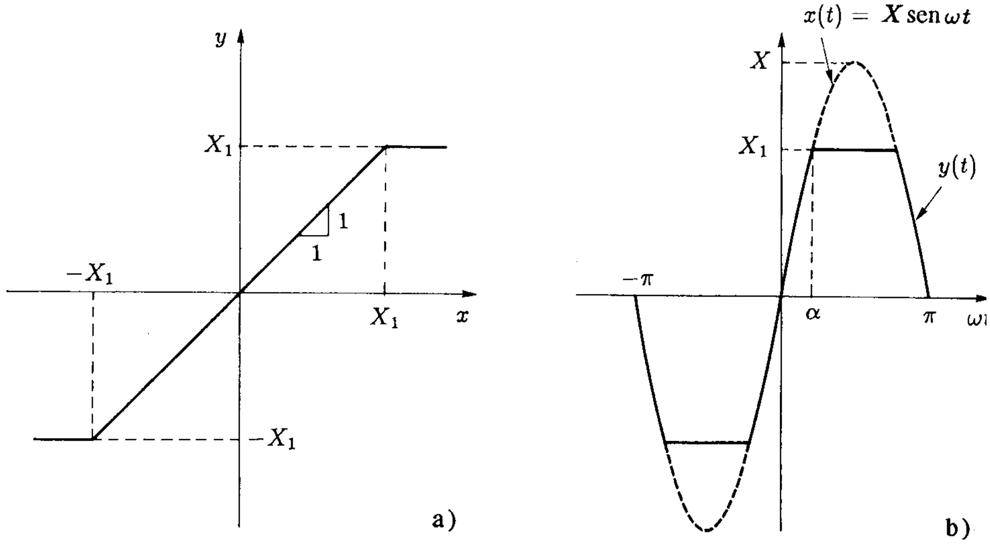
• Questa equazione può essere risolta graficamente tracciando (sul piano complesso) i diagrammi polari delle funzioni $G(j\omega)$ e $-1/F(X)$, il primo graduato in valori di ω e il secondo in valori di X:



• Gli eventuali punti di intersezione (A e B) corrispondono a valori (ω_1 e ω_2, X_1 e X_2) corrispondenti a possibili oscillazioni autosostenute.

Funzioni descrittive delle principali non linearità

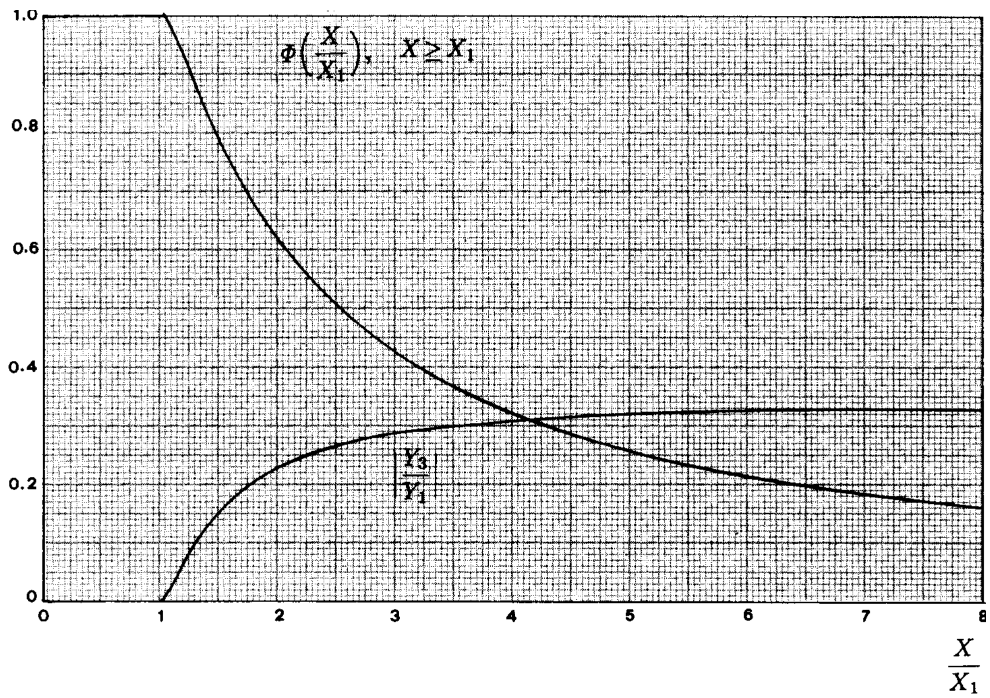
• **Saturazione**. La *saturazione* è una nonlinearità che è tipicamente presente in tutti i sistemi fisici. La caratteristica ingresso-uscita della saturazione con il tratto inclinato a pendenza unitaria è la seguente:



• Posto $\Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) := \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arcsen}\frac{X_1}{X} + \frac{X_1}{X}\sqrt{1-\left(\frac{X_1}{X}\right)^2}\right)$, la funzione descrittiva della saturazione a guadagno unitario è:

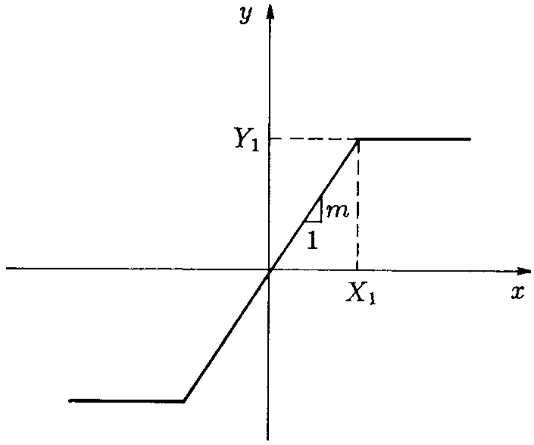
$$F(X) = \frac{1}{X}(b_1 + j\,a_1) = \begin{cases} 1 & per X \leq X_1 \,, \\ \Phi\left(\dfrac{X}{X_1}\right) & per X \geq X_1 \,. \end{cases}$$

• La funzione descrittiva è reale. Il suo andamento è il seguente:

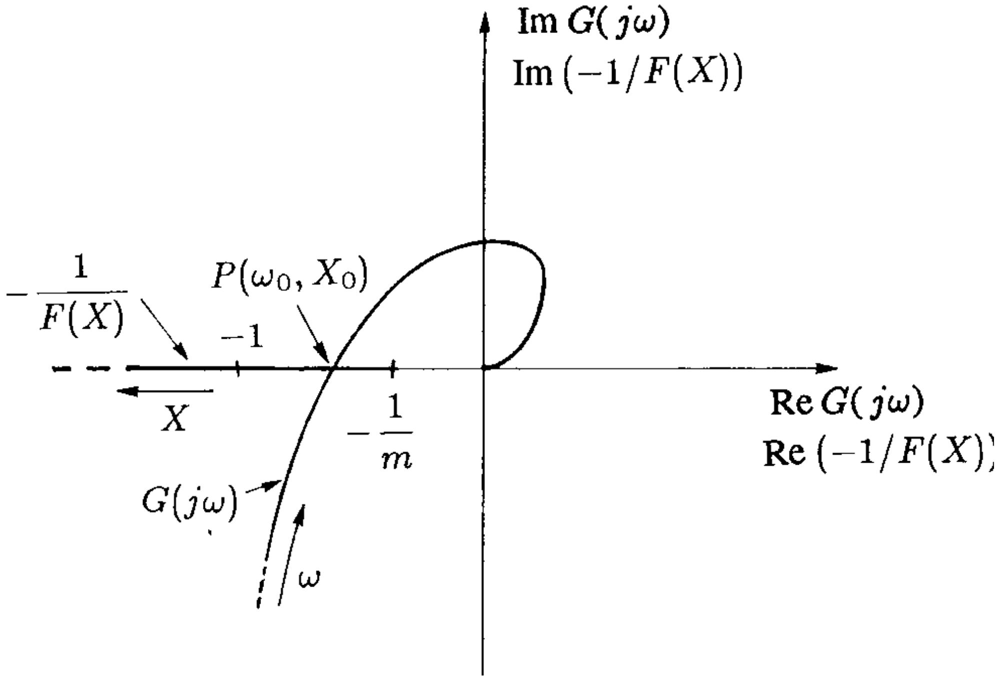


• La funzione descrittiva di una saturazione con il tratto centrale avente pendenza $m = Y_1/X_1$ è:

$$F(X) = \begin{cases} m & per X \leq X_1 \ , \\ m\,\Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) & per X \geq X_1 \ , \end{cases}$$



• Esempio di applicazione della funzione descrittiva della saturazione (si suppone che il sistema $G(s)$ sia stabile ad anello aperto):



• Se si varia la costante di guadagno nel rapporto di 1 ad m ($m > 1$), per m sufficientemente grande il sistema diventa instabile.

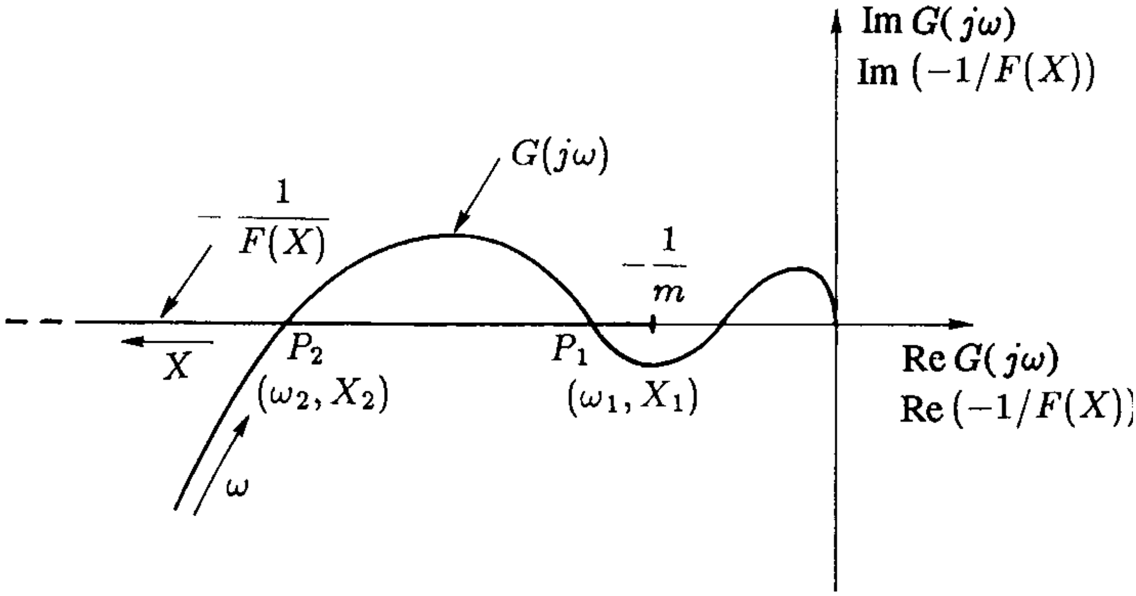
• Poiché la funzione descrittiva della saturazione è reale, il diagramma della funzione $-1/F(X)$ si svolge su una porzione dell'asse reale negativo.

• Nel caso in esame l'intersezione è unica (punto P) e denuncia la presenza di un *ciclo limite stabile*.

• Il ciclo limite è stabile in quanto un aumento dell'ampiezza delle oscillazioni rispetto al valore X_0 tende a spostare il "punto critico" $-1/F(X)$ all'esterno del dominio circondato dal diagramma di Nyquist e produce pertanto un effetto stabilizzante, che fa diminuire l'ampiezza delle oscillazioni e la riporta al valore X_0; analogamente, una diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni rispetto al valore X_0, producendo uno spostamento del punto $-1/F(X)$ verso l'interno del dominio circondato dal diagramma di Nyquist, provoca una reazione tendente a ripristinare per l'ampiezza il valore X_0.

• In generale si può affermare che: *A un punto di intersezione dei diagrammi polari delle funzioni $G(j\omega)$ e $-1/F(X)$ corrisponde un ciclo limite stabile quando, all'aumentare di X, il punto $-1/F(X)$ tende a uscire dal dominio la cui frontiera è costituita dal diagramma polare completo di $G(j\omega)$. Si ha un ciclo limite instabile nel caso opposto.*

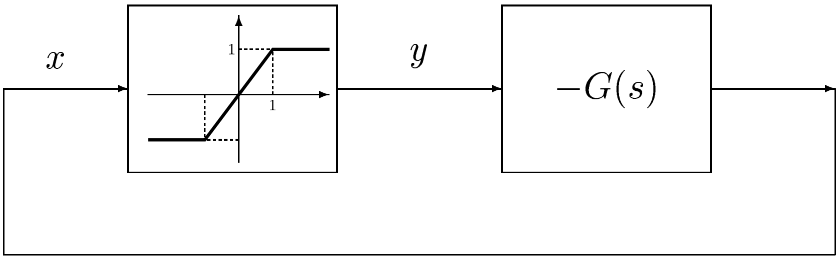
• Esempio di sistema a stabilità condizionata che per effetto della saturazione presenta un ciclo limite instabile (corrispondente al punto P_1) e un ciclo limite stabile (corrispondente al punto P_2):



• Il sistema per piccoli segnali è stabile, ma, qualora esso venga portato in saturazione, vi si possono innescare oscillazioni di pulsazione ω_2 e di ampiezza X_2.

• Le pulsazioni ω_1 e ω_2 delle due oscillazioni autosostenute si determinano facilmente calcolando le intersezioni della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ con il semiasse reale negativo.

Esempio. Si consideri il seguente sistema retroazionato:



dove

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+3)}$$

- Equazione caratteristica: $1 + K\,G(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad s^3 + 4\,s^2 + 3\,s + 20\,K = 0$
- Tabella di Routh:

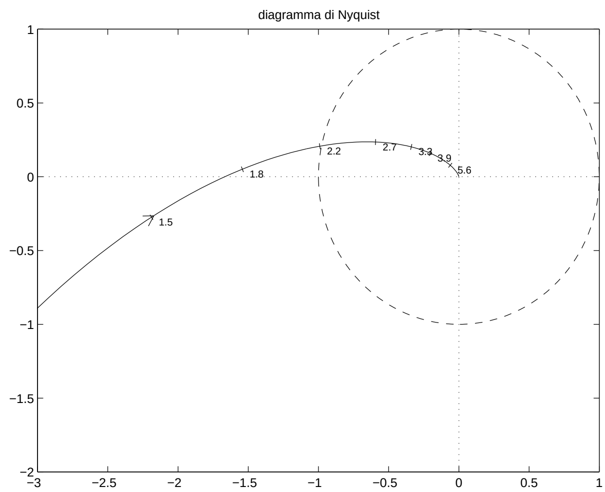
$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 20K \\ 1 & 12-20K & \\ 0 & 20K & \end{array}$$

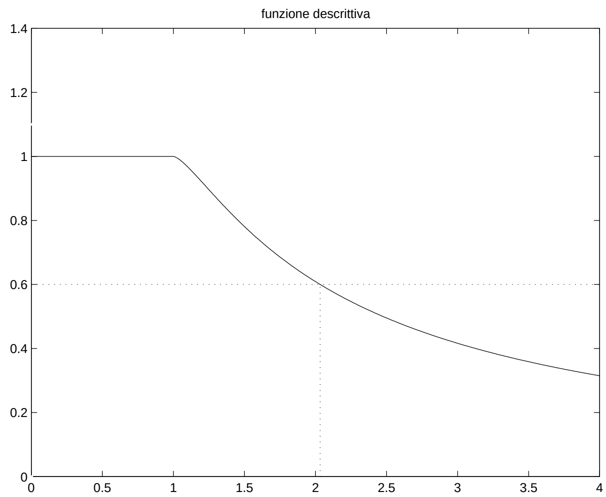
Margine di ampiezza:

$$K^* = \frac{12}{20} = 0.6$$

Intersezione σ^* con il semiasse reale negativo e pulsazione ω_0 del ciclo limite::

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{20}{12}, \qquad \omega_0 = \sqrt{3} = 1.7321$$





L'ampiezza X_0 si trova utilizzando il grafico della funzione descrittiva.

$$F(X_0)\,G(j\omega_0) = -1 \qquad \rightarrow \qquad F(X_0) = -\frac{1}{G(j\omega_0)} = K^*$$

Dal grafico si trova $X_0 = 2.06$.

Tracciamento qualitativo della funzione descrittiva

Nel caso in cui la caratteristica non lineare $y = f(x)$ sia a forma di spezzata, l'andamento "qualitativo" della corrispondente funzione descrittiva $F(X)$ può essere facilmente determinato ricordando che:

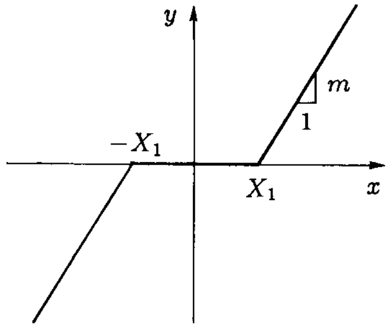
1) La funzione descrittiva $F(X)$ è sempre continua al variare del parametro X. Nel caso in cui la $y = f(x)$ sia lineare, la $F(X)$ è costante, e il suo valore coincide con la pendenza K dell'elemento lineare: se $y = K\,x$ allora $F(X) = K$.

2) Per $X \to 0^+$, il valore della funzione descrittiva $F(X)$ coincide con la "pendenza del primo tratto lineare" della funzione $y = f(x)$. Nel caso in cui la $y = f(x)$ sia discontinua per $x = 0$, il valore della $F(X)$ per $X \to 0^+$ è infinito.

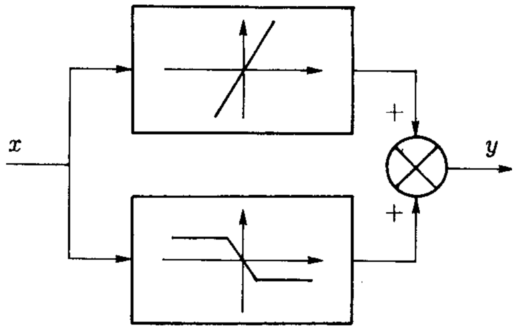
3) In corrispondenza di un cambiamento di pendenza o di una discontinuità della $y = f(x)$, la $F(X)$ cambia pendenza in modo concorde alla variazione di pendenza subita dalla $y = f(x)$.

4) Per $X \to \infty$ il valore della funzione descrittiva $F(X)$ coincide con la "pendenza dell'ultimo tratto lineare" della funzione $y = f(x)$.

• **Soglia**. La caratteristica dell'elemento non lineare cui si dà il nome di *soglia* o *zona morta* è:



a)



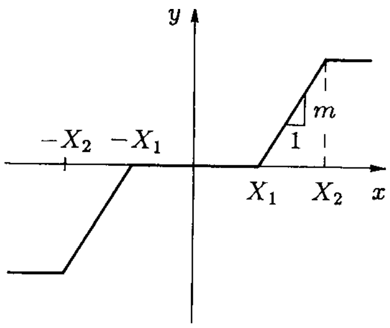
b)

• La soglia si ottiene come somma delle caratteristiche di un blocco lineare e di un elemento tipo saturazione.

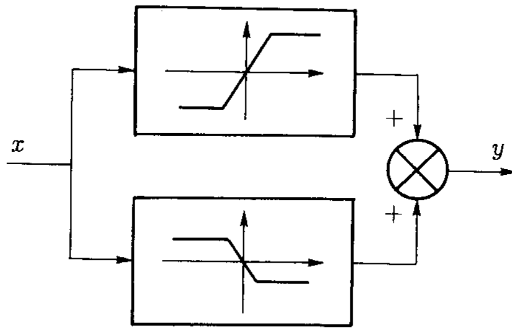
• La funzione descrittiva della soglia risulta uguale alla somma delle funzioni descrittive dei due blocchi:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & per X \leq X_1 \ , \\ m\left(1 - \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right)\right) & per X \geq X_1 \ . \end{cases}$$

• **Soglia con saturazione**. La caratteristica ingresso-uscita di una soglia con saturazione è:



a)



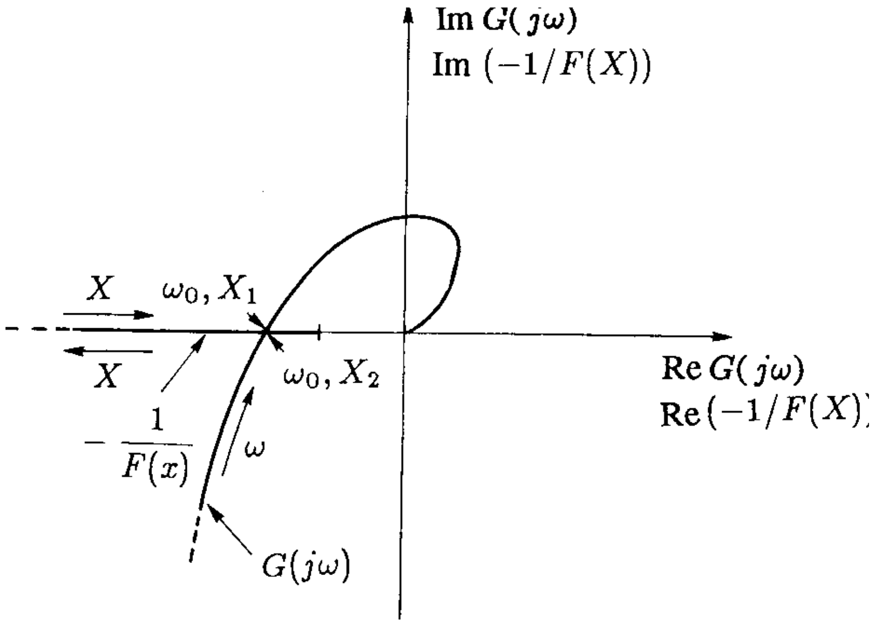
b)

• La caratteristica di questo elemento si ottiene come somma delle caratteristiche di due saturazioni.

• La funzione descrittiva della soglia con saturazione è:

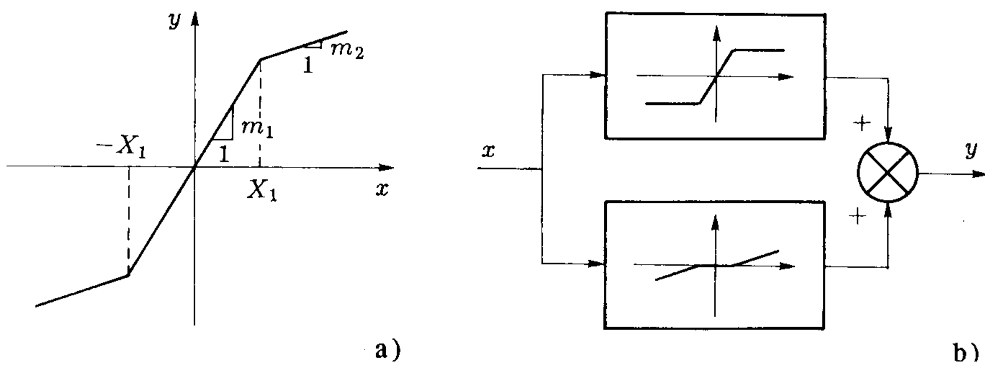
$$F(X) = \begin{cases} 0 & per X \leq X_1 \ , \\ m\left(1 - \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right)\right) & per X_1 \leq X \leq X_2 \ , \\ m\left(\Phi\left(\frac{X}{X_2}\right) - \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right)\right) & per X \geq X_2 \ . \end{cases}$$

• Si noti che la funzione descrittiva, che anche in questo caso è reale, è nulla per piccoli segnali, quindi aumenta, raggiunge un massimo e, per X tendente all'infinito, tende nuovamente a zero. Il diagramma di $-1/F(X)$ corrisponde a una semiretta sull'asse reale negativo: a ciascun punto del diagramma corrispondono due valori di X.



• Il punto di intersezione dei diagrammi di $G(j\omega)$ e di $-1/F(X)$ è unico, ma corrisponde a due cicli limite caratterizzati dalla medesima pulsazione e da due diverse ampiezze X_1 e X_2; il primo di essi è instabile, l'altro è stabile.

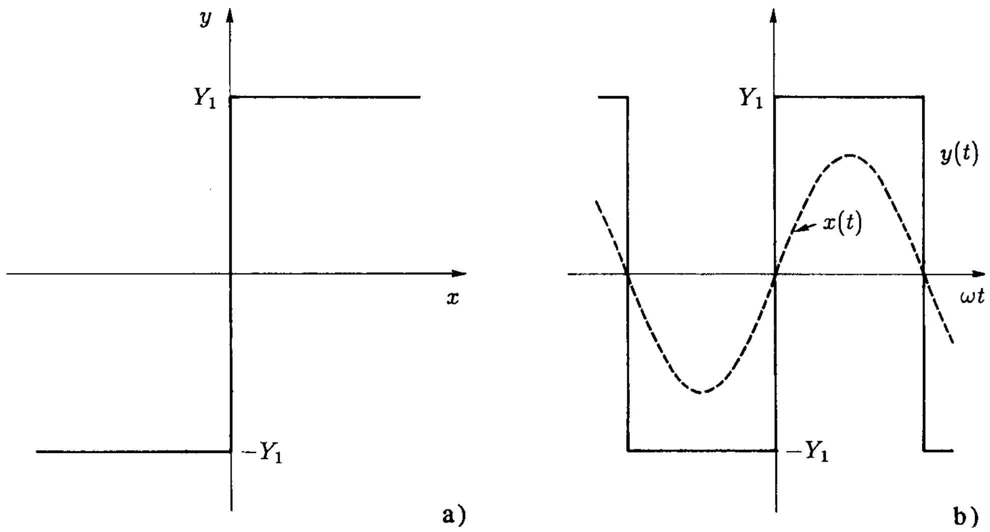
• **Saturazione non netta**. La caratteristica ingresso-uscita di una saturazione non netta è:



• La caratteristica di questo elemento si ottiene come somma delle caratteristiche di una saturazione e di una soglia per cui la sua funzione descrittiva è:

$$F(X) = \begin{cases} m_1 & per X \leq X_1 \, , \\ (m_1 - m_2)\, \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) + m_2 & per X \geq X_1 \, . \end{cases}$$

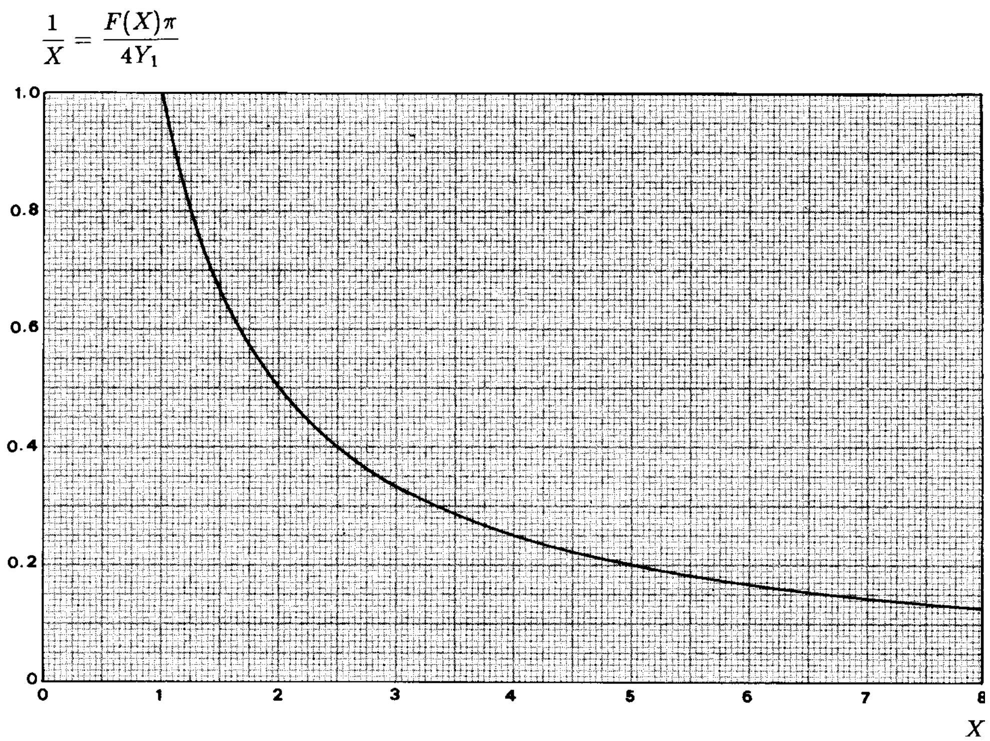
• **Relè ideale**. La caratteristica ingresso-uscita di un relè ideale è:



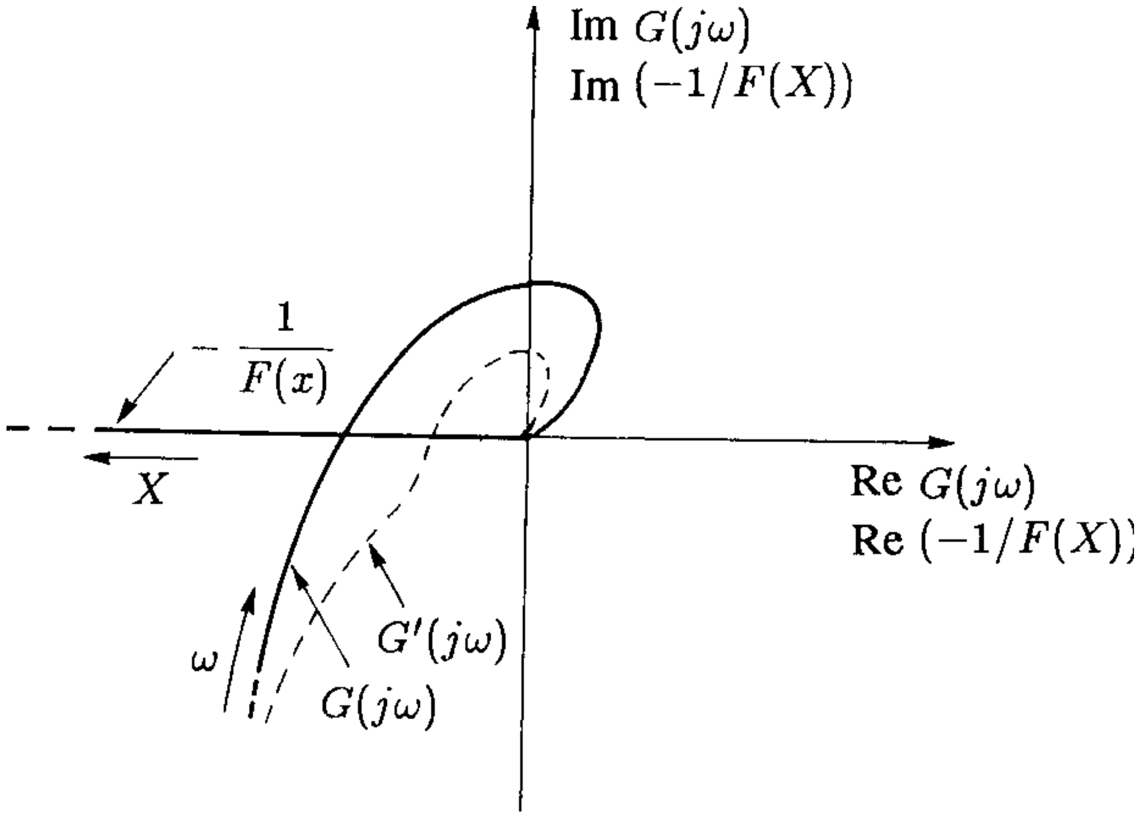
• Essa rappresenta il tipico legame ingresso-uscita degli amplificatori a relè, largamente impiegati nei sistemi di controllo più semplici e diffusi. La sua funzione descrittiva è:

$$\boxed{F(X) = \frac{4\,Y_1}{\pi\,X}}$$

• La funzione descrittiva è a valori reali. Il suo grafico è una iperbole



• Il diagramma polare di $-1/F(X)$ è l'intero semiasse reale negativo, a dimostrazione del fatto che i sistemi in retroazione a due posizioni sono intrinsecamente autooscillanti:

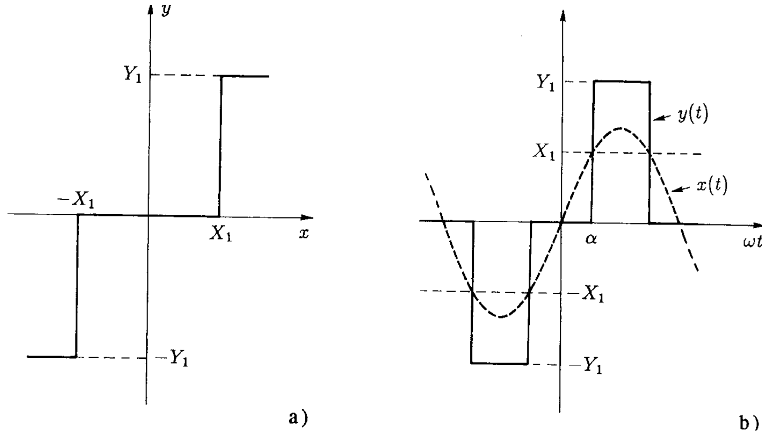


• Infatti, a seconda del segno dell'errore, la variabile manipolabile viene portata all'uno o all'altro degli estremi del suo campo di variazione, senza la possibilità di raggiungere una condizione di equilibrio.

• Perché il comportamento del sistema sia accettabile, occorre che l' ampiezza delle oscillazioni all'uscita del sistema controllato sia contenuta entro limiti relativamente modesti; ciò normalmente avviene, date le caratteristiche filtranti di tipo "passa basso" del sistema controllato stesso.

• Per aumentare la frequenza delle oscillazioni autosostenute e, di conseguenza, diminuirne l'ampiezza all'uscita del sistema controllato, si possono impiegare reti correttrici: una modifica del diagramma polare di risposta armonica del tipo indicato in figura (curva a tratto) porta evidentemente ad una diminuzione dell'ampiezza X dell'oscillazione.

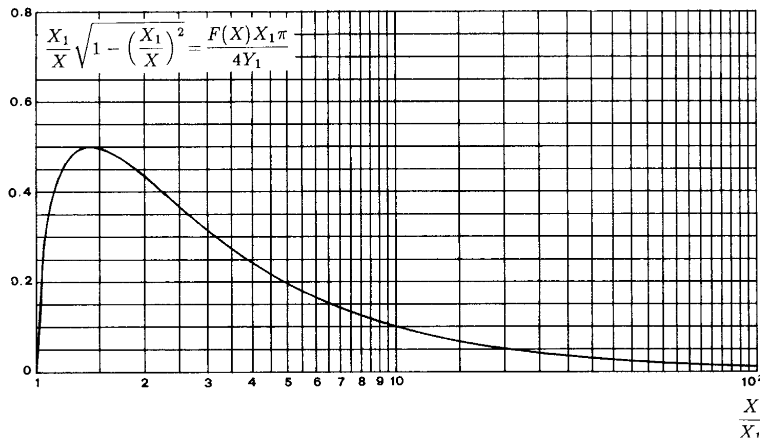
- **Relè con soglia**. La sua caratteristica ingresso-uscita è:



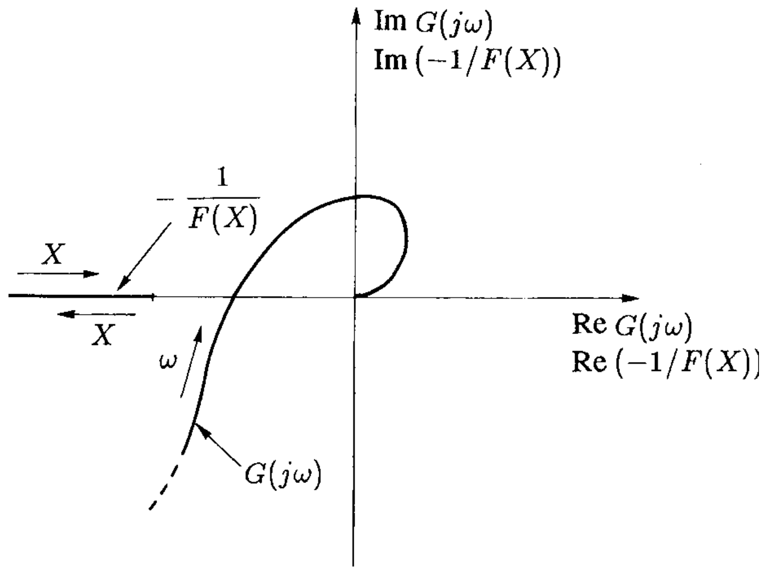
- La sua funzione descrittiva (a valori complessi) è:

$$F(X) = \frac{1}{X}(b_1 + j\,a_1) = \begin{cases} 0 & per X \leq X_1 \ , \\ \frac{4\,Y_1}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{X_1}{X}\right)^2} & per X \geq X_1 \ . \end{cases}$$

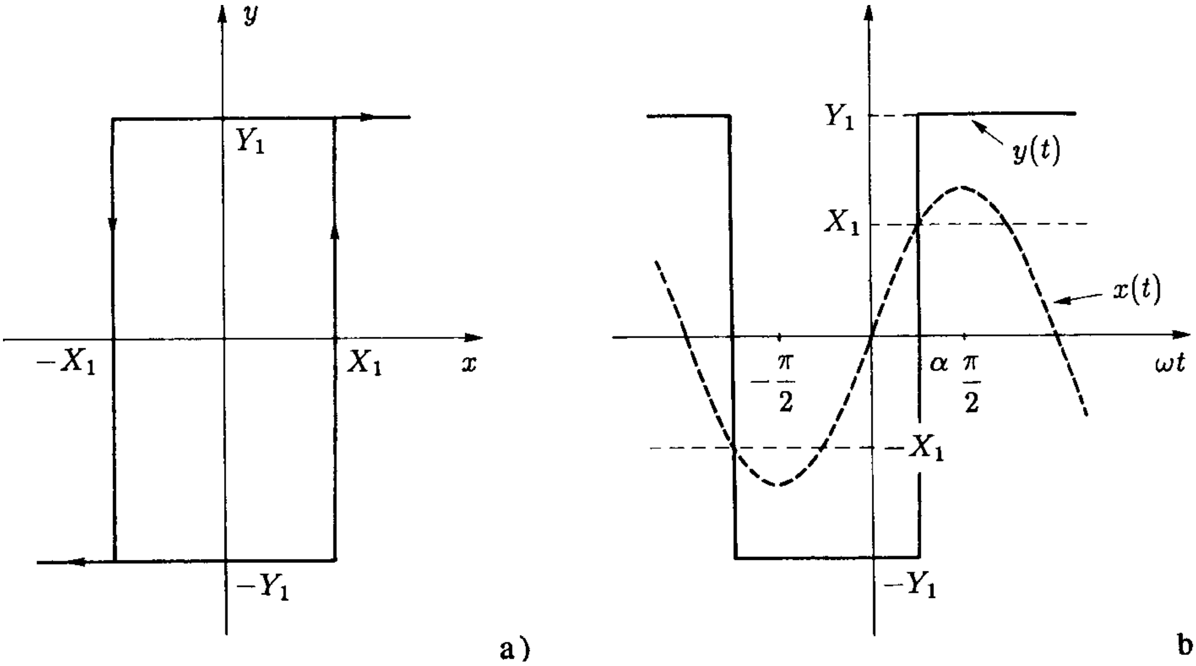
- Il suo grafico è:



- Caso di un sistema a relè con soglia senza oscillazioni autosostenute:



• **Relè con isteresi**. La sua caratteristica ingresso-uscita le forme d'onda dei segnali di ingresso e di uscita sono le seguenti:

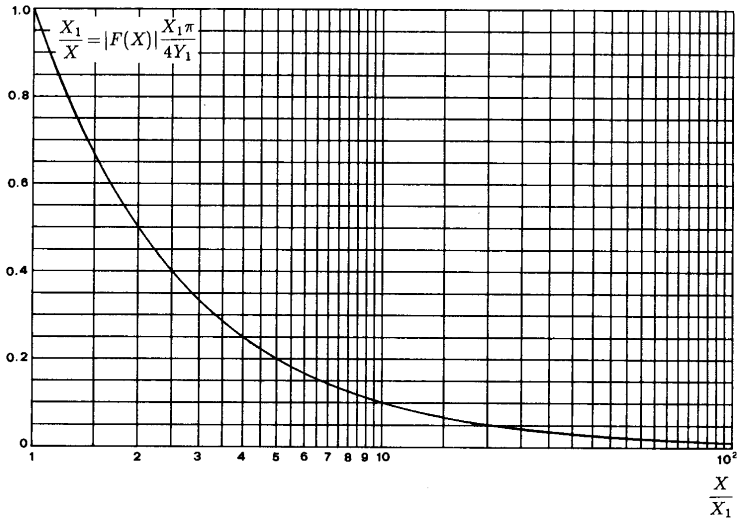


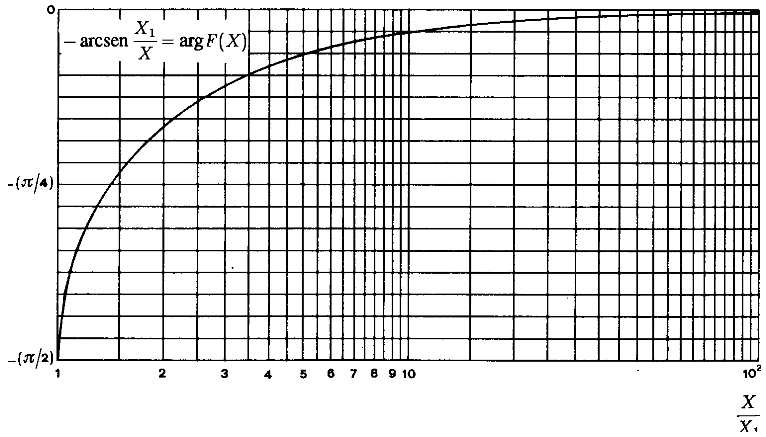
• Si noti che la caratteristica non è espressa da una funzione ad un sol valore. Il relè con isteresi è un tipico elemento non lineare la cui funzione descrittiva è complessa in quanto la fondamentale del segnale di uscita è sfasata in ritardo rispetto al segnale di ingresso.

• Per $X < X_1$ la funzione descrittiva *non è definita*, mentre per $X \geq X_1$ la funzione descrittiva vale:

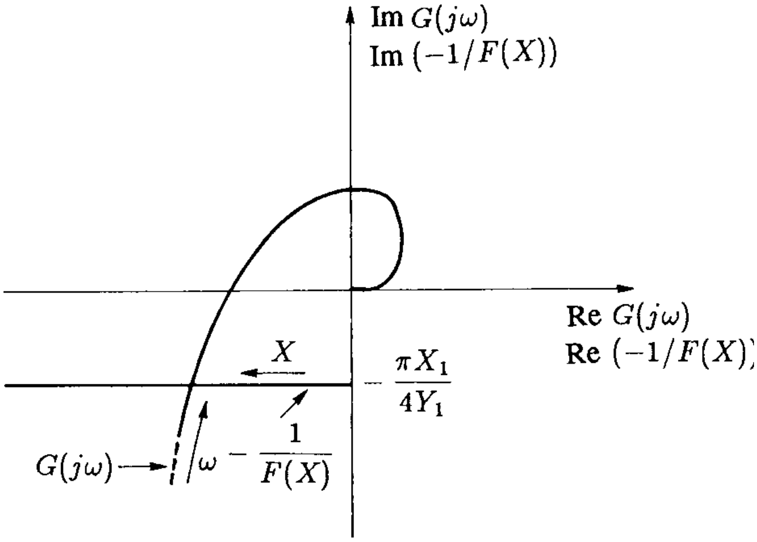
$$F(X) = \frac{4\,Y_1}{\pi\,X}\left(\sqrt{1-\left(\frac{X_1}{X}\right)^2} - j\,\frac{X_1}{X}\right) = \frac{4\,Y_1}{\pi\,X}\,e^{-j\,\mathrm{arcsen}\frac{X_1}{X}}$$

• I grafici, in forma normalizzata, relativi al modulo e all'argomento della funzione descrittiva sono i seguenti:





• Il diagramma polare di $-1/F(X)$ consiste in una semiretta parallela all'asse reale:



• Infatti, essendo

$$-\frac{1}{F(X)} = -\frac{\pi X}{4 Y_1} e^{j \,\mathrm{arcsen} \frac{X_1}{X}} = \frac{\pi X}{4 Y_1} \left(-\sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2} - j \frac{X_1}{X} \right)$$

la parte immaginaria di $-1/F(X)$ è costante.