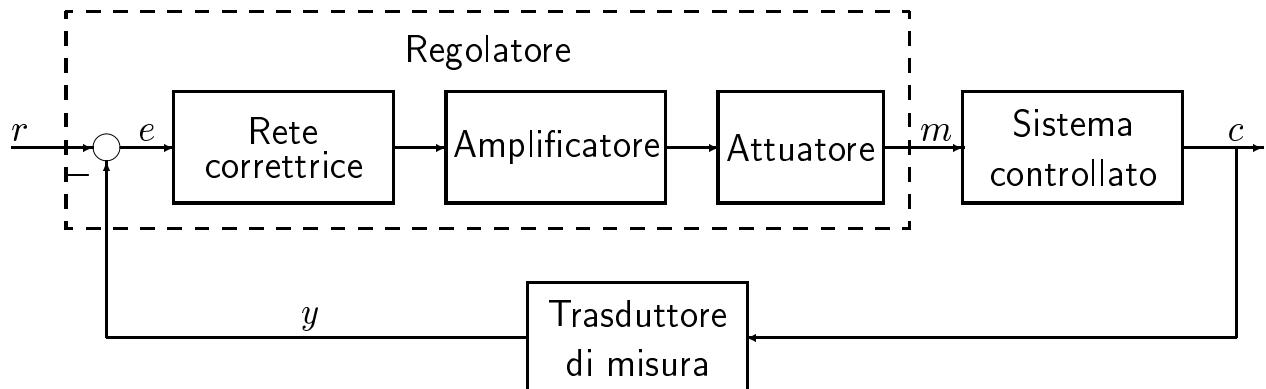


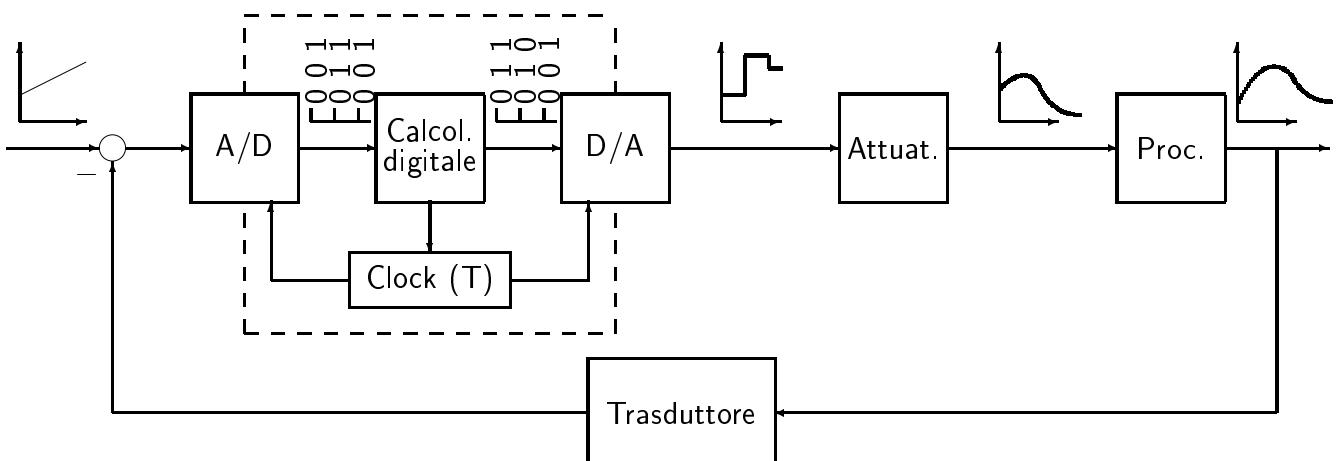
# CONTROLLO DIGITALE

- **PROCESSO:** un insieme di operazioni o di trasformazioni che devono avvenire in sequenza opportuna in un impianto o in un sistema fisico
- **CONTROLLO DEI PROCESSI:** insieme di metodologie, tecniche e tecnologie orientate alla conduzione automatizzata di impianti industriali
- **SISTEMI DI CONTROLLO DIGITALE:** sistemi di controllo in retroazione in cui è presente un calcolatore digitale e quindi una elaborazione a tempo discreto della legge di controllo
- **SISTEMA DI CONTROLLO ANALOGICO:**

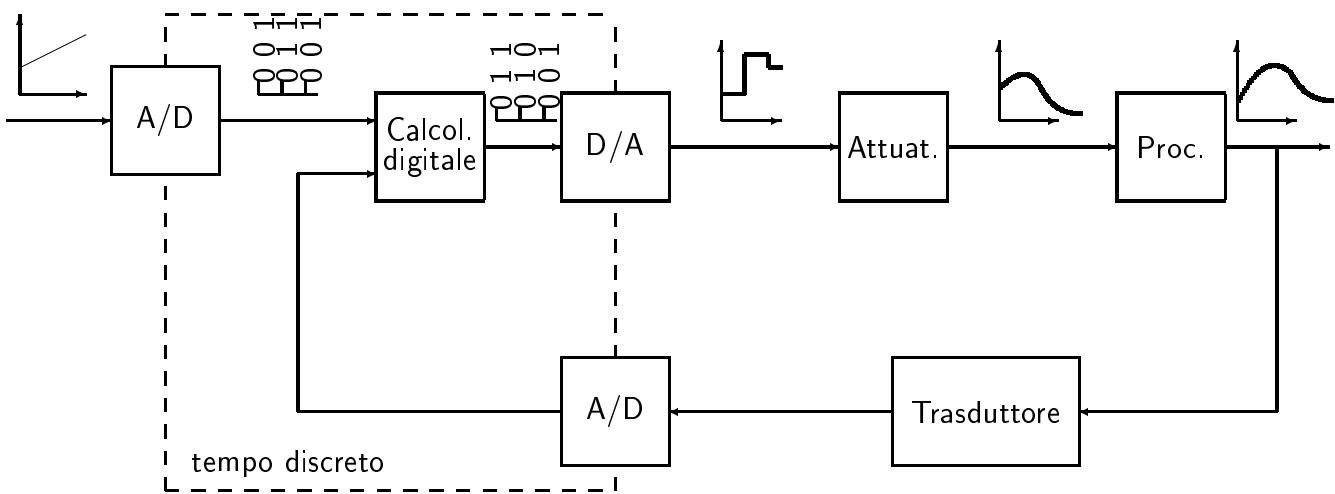


## SCHEMI TIPICI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE

- Campionamento del segnale errore:



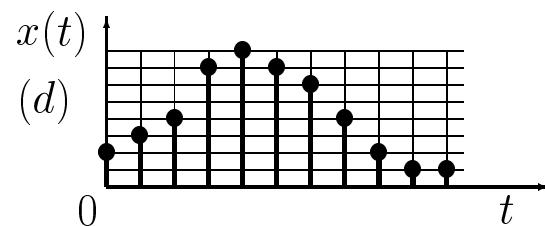
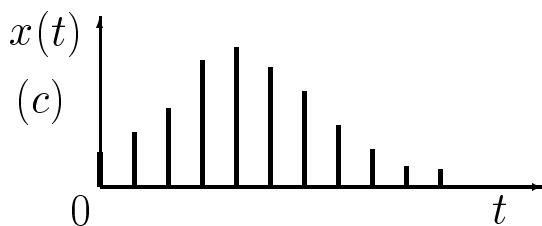
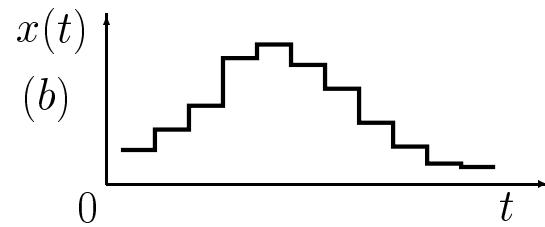
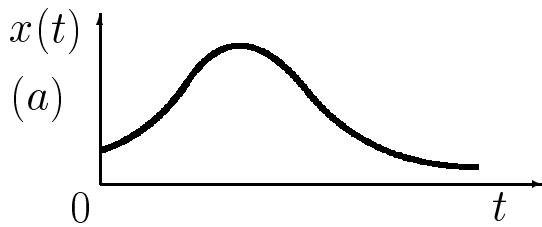
- Campionamento del segnale retroazionato:



- CONTROLLO DIGITALE / CONTROLLO ANALOGICO:

- + Maggiore capacità e precisione di elaborazione
  - + Maggiore flessibilità
  - + Maggiore affidabilità e ripetibilità
  - + Maggiore trasmissibilità dei segnali
  - Progettazione più difficile e articolata
  - Stabilizzabilità più precaria
  - Possibilità di arresti non previsti
  - Necessità di utilizzare energia elettrica

SEGNALI DI INTERESSE: a) Analogico di tipo continuo; b) Tempo-continuo quantizzato; c) A dati campionati; d) Digitale;



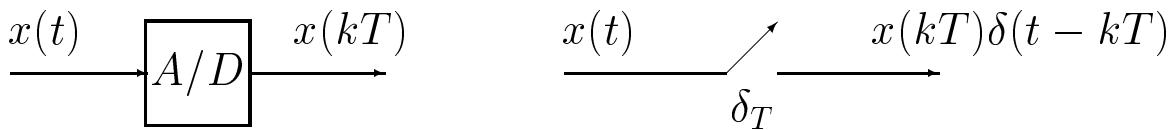
## DISPOSITIVI DI INTERFACCIA

- A/D: convertitore Analogico/Digitale. Due possibili descrizioni:

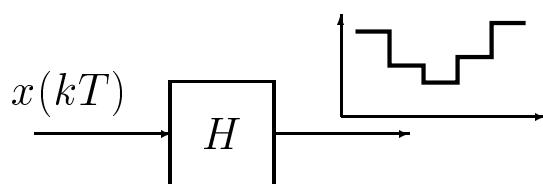
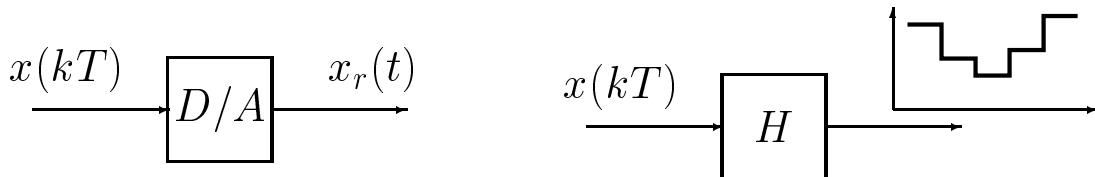
- 1) Generazione di una sequenza di valori numerici:



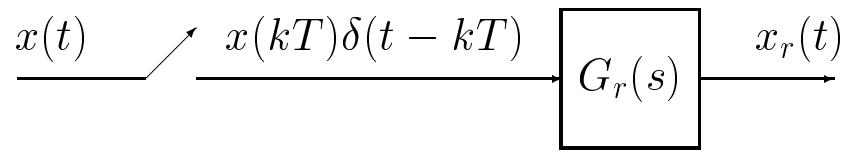
- 2) Campionamento ad impulsi di Dirac:



- D/A, convertitore Digitale/Analogico



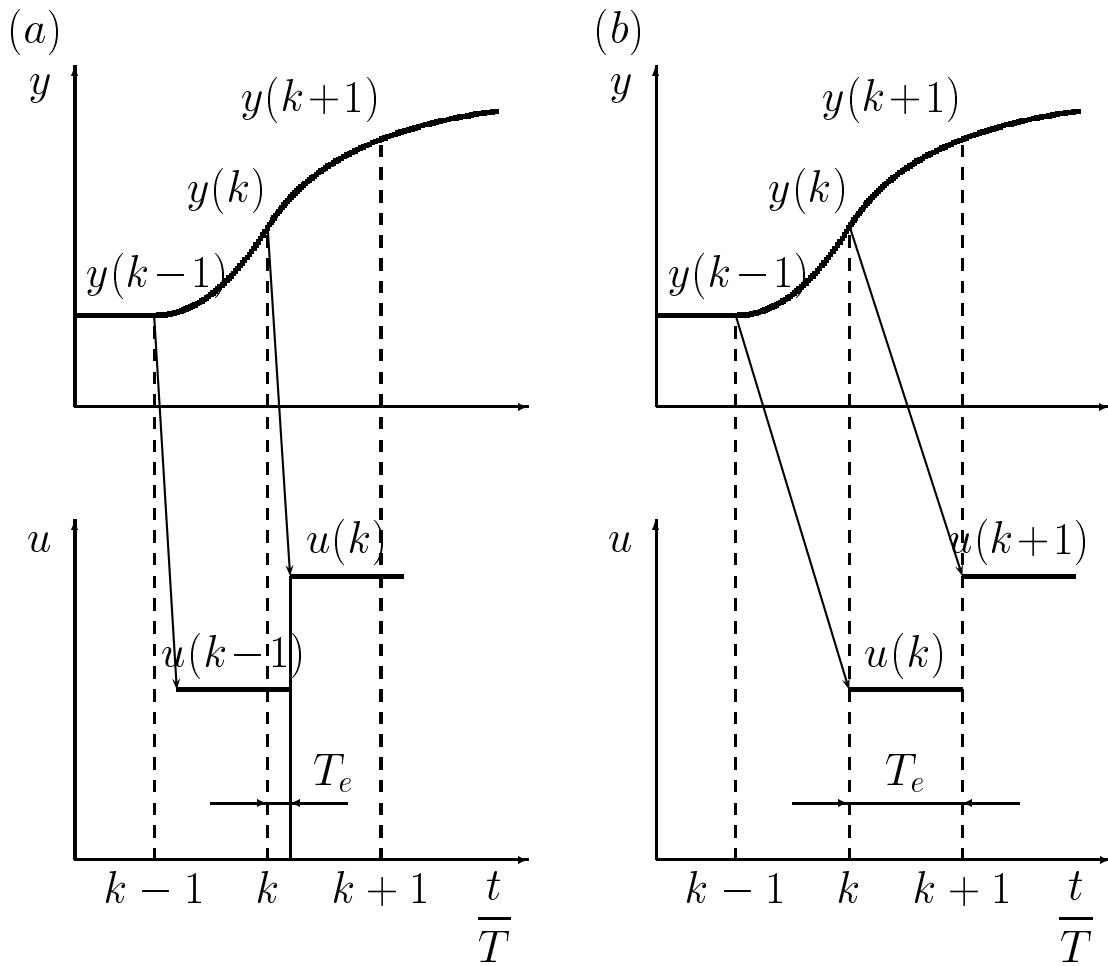
Se si usa il campionatore ad impulsi di Dirac, il ricostruttore (cioè il convertitore D/A) può essere rappresentato da una semplice funzione di trasferimento  $G_r(s)$ :



Ricostruttore di ordine zero:

$$G_r(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

## TEMPO DI ELABORAZIONE E SINCRONIZZAZIONE



- Equazioni alle differenze. Sono legami statici che legano i valori attuali (all'istante  $k$ ) e passati (negli istanti  $k - 1, k - 2, \dots$ , ecc.) dell'ingresso  $e_k$  e dell'uscita  $u_k$ :

$$u_k = f(e_0, e_1, \dots, e_k; u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$$

L'equazione alle differenze è lineare se  $f(\cdot)$  è lineare:

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - \dots - a_n u_{k-n} + b_0 e_k + \dots + b_m e_{k-m}$$

La soluzione di un'equazione alle differenze è data dalla somma della "risposta libera" (ingresso nullo e condizioni iniziali nulle) e della "risposta forzata" (condizioni iniziali nulle ed ingresso diverso da zero) del sistema:

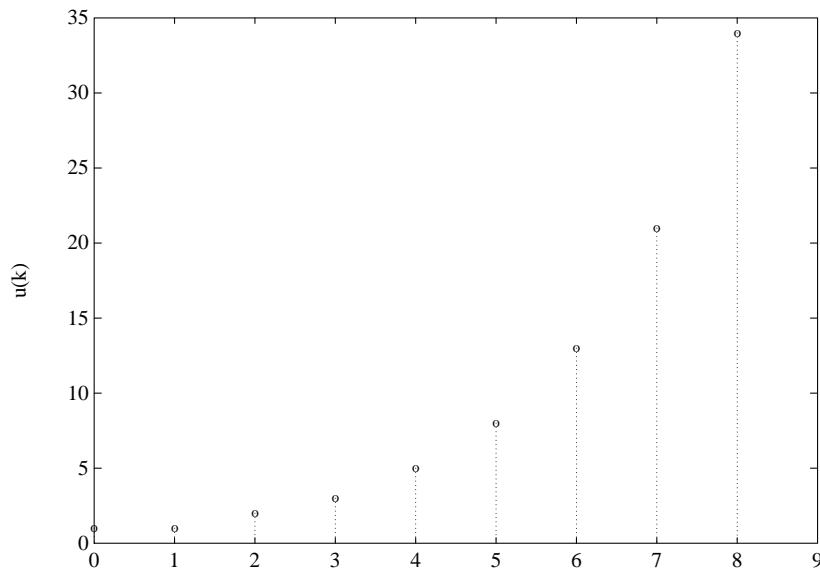
$$u_k = u_k^l + u_k^f$$

Per determinare la risposta libera occorrono tante condizioni iniziali quant'è l'ordine dell'equazione alle differenze.

- Soluzione di equazioni alle differenze a coefficienti costanti

$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2} \quad k \geq 2$$

$$u_0 = u_1 = 1.$$



Per risolvere le equazioni alle differenze si può utilizzare il metodo della  $\mathcal{Z}$ -trasformata.

## Z-trasformata

- Sia data una sequenza di valori  $x_k \in \mathbb{R}$ , definita per  $k = 0, 1, 2, \dots$  e nulla per  $k < 0$ . La Z-trasformata (unilatera) della sequenza  $x_k$  è la funzione di variabile complessa  $z$  definita come

$$X(z) = \mathcal{Z}[x_k] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = x_0 + x_1 z^{-1} + \dots + x_k z^{-k} + \dots$$

- Nel caso in cui la sequenza di valori  $x_k$  sia ottenuta campionando uniformemente con periodo  $T$  un segnale continuo descritto dalla funzione  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , si avrà che  $x_k = x(kT)$ :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

- Per indicare che una sequenza è stata ottenuta per campionamento di un segnale tempo continuo, spesso si usa la seguente notazione:

$$X(z) = \mathcal{Z}[X(s)]$$

intendendo:

$$X(z) = \mathcal{Z}\left[\left\{\mathcal{L}^{-1}[X(s)]\right|_{t=kT}\right]$$

- Nelle applicazioni ingegneristiche la funzione  $X(z)$  assume in generale una espressione razionale fratta del tipo

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

che si può esprimere anche in potenze di  $z^{-1}$ :

$$X(z) = \frac{b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \dots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

- Esempio:

$$X(z) = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)(z + 2)} = \frac{1 + 0.5 z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2 z^{-1})}$$

- Impulso discreto unitario, detta anche funzione di Kronecker  $\delta_0(t)$ :

$$x(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad X(z) = 1$$

Infatti:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = 1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + \dots = 1$$

- Gradino unitario. Sia data la funzione gradino unitario

$$x(k) = h(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

La funzione  $h(k)$ , detta sequenza unitaria, è la seguente:

$$h(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z-1}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}[h(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

La serie è convergente per  $|z| > 1$ .

- Rampa unitaria. Si consideri la funzione rampa unitaria:

$$x(t) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Infatti, la  $\mathcal{Z}$ -trasformata di  $x(k) = k$  è

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[k] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = (z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots) \\ &= z^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

convergente per  $|z| > 1$ .

- Funzione potenza  $a^k$ . Sia data la funzione

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z - a}$$

con  $a$  costante reale o complessa. Dalla definizione di  $\mathcal{Z}$ -trasformata si ha che

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[a^k] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\ &= 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

Questa serie geometrica converge per  $|z| > |a|$ .

## Discretizzazione di segnali tempo continui

- Gradino unitario:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s}\right] = \mathcal{Z}[h(t)|_{t=kT}] = \frac{z}{z - 1}$$

- Rampa unitaria:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \mathcal{Z}[t|_{t=kT}] = \mathcal{Z}[kT] = T \frac{z}{(z - 1)^2}$$

- Funzione esponenziale:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s + b}\right] = \mathcal{Z}[e^{-bt}|_{t=kT}] = \mathcal{Z}[e^{-b k T}] = \mathcal{Z}[(e^{-b T})^k] = \frac{z}{z - e^{-b T}}$$

- Funzione sinusoidale. Sia data la sinusoide

$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad X(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

Dalle formule di Eulero è noto che

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}) z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \end{aligned}$$

convergente per  $|z| > 1$ .

- Funzione cosinusoidale. Sia data la funzione

$$x(t) = \begin{cases} \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad X(z) = \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T}) z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) z^{-1} + z^{-2}} \\ &= \frac{1 - z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \\ &= \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

- Esempio:  $X(s) = \frac{1}{s(s+1)}$
- Prima tecnica:  $x(t) = 1 - e^{-t}$

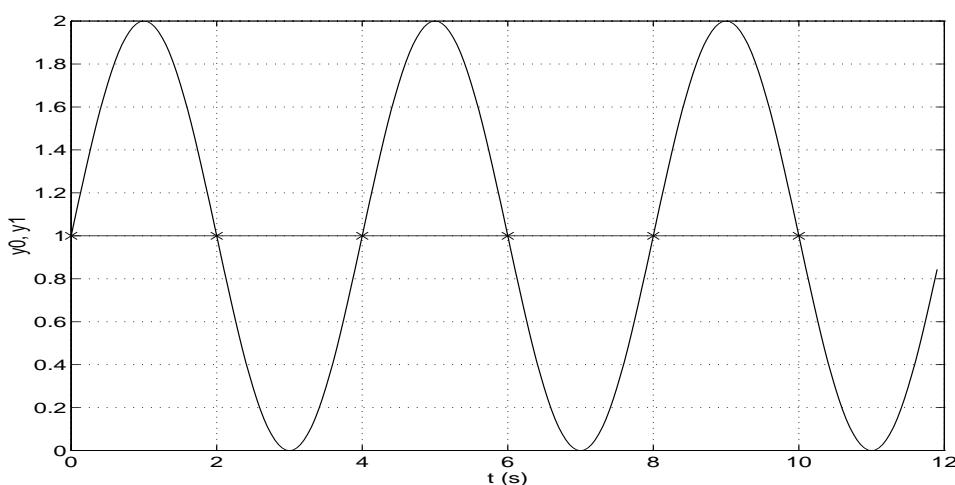
$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[1 - e^{-t}] = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})} = \frac{(1 - e^{-T})z}{(z - 1)(z - e^{-T})} \end{aligned}$$

- Seconda tecnica:

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{1+s}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}}$$

- La  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $X(z)$  e la sua sequenza corrispondente  $x(k)$  sono legate da una corrispondenza biunivoca
- Questo non avviene in genere tra la  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $X(z)$  e la sua “inversa”  $x(t)$
- Data una  $X(z)$  si possono in genere avere molte  $x(t)$
- Questa ambiguità non sussiste se sono verificate le condizioni restrittive su  $T$  dettate dal Teorema di Shannon
- Diverse funzioni tempo continuo possono avere gli stessi valori  $x(k)$



- PROPRIETÀ E TEOREMI DELLA  $\mathcal{Z}$ -TRASFORMATA

- Linearità:

$$x(k) = af(k) + bg(k)$$

$$X(z) = aF(z) + bG(z)$$

- Moltiplicazione per  $a^k$ . Sia  $X(z)$  la  $\mathcal{Z}$ -trasformata di  $x(t)$ ,  $a$  una costante.

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X(a^{-1}z)$$

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) (a^{-1}z)^{-k} = X(a^{-1}z)$$

- Teorema della traslazione nel tempo. Se  $x(t) = 0, t < 0$ ,  $X(z) = \mathcal{Z}[x(t)]$ , e  $n = 1, 2, \dots$ , allora

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n} X(z) \quad (\text{ritardo})$$

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] = z^n \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right] \quad (\text{anticipo})$$

- Teorema del valore iniziale.

Se  $X(z)$  è la  $\mathcal{Z}$ -trasformata di  $x(t)$  e se esiste il  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ , allora il valore iniziale  $x(0)$  di  $x(t)$  è dato da:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

- Teorema del valore finale. Siano tutti i poli di  $X(z)$  all'interno del cerchio unitario, con al più un polo semplice per  $z = 1$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1}) X(z)]$$

- Esempio: Si consideri il segnale descritto da

$$X(z) = \frac{Tz(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)}$$

Il valore finale della sequenza  $x(kT)$  è quindi dato da

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{Tz(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T(z+1)}{2(z-0.5)} \\ &= 2T \end{aligned}$$

- Trasformazione di funzioni periodiche.

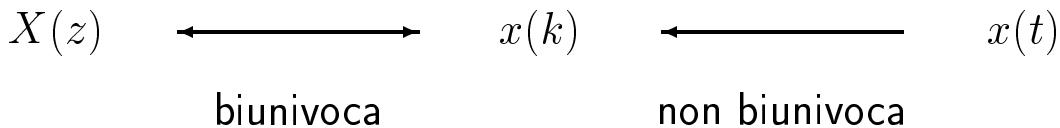
Sia data una successione  $x_p(k)$  periodica di periodo  $pT$  e  $x(k)$  la successione dei campioni del primo periodo e nulla per  $k > p$

$$x(k) = \begin{cases} x_p(k) & k = 0, \dots, p \\ 0 & k > p \end{cases}$$

Se  $X(z)$  è la  $\mathcal{Z}$ -trasformata di  $x(k)$  allora vale

$$\mathcal{Z}[x_p(k)] = \frac{z^p}{z^p - 1} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-p}} X(z)$$

- LA ANTITRASFORMATURA  $\mathcal{Z}$
- Permette di passare da una  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $X(z)$  alla corrispondente sequenza  $x_k$  e possibilmente alla funzione continua  $x(t)$  cui corrisponde per campionamento la sequenza  $x_k$ .



- Se è soddisfatto il Teorema di Shannon sul campionamento, la funzione continua  $x(t)$  può essere univocamente determinata a partire dalla sequenza  $x_k$ .
- Esistono diversi metodi per antitrasformare una funzione  $X(z)$ . Noi prenderemo in considerazione solo il Metodo della scomposizione in fratti semplici.
- Metodo della scomposizione in fratti semplici

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}$$

- Caso 1. Se tutti i poli sono semplici, si pone

$$X(z) = \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - p_i}$$

dove i coefficienti  $c_i$ , detti “residui”, sono parametri che vengono calcolati come:

$$c_i = [(z - p_i)X(z)]_{z=p_i}$$

- Se nella espressione di  $X(z)$  compare almeno uno zero nell'origine, si utilizza la funzione  $X(z)/z$  e quindi

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z - p_1} + \cdots + \frac{c_n}{z - p_n} \quad c_i = \left[ (z - p_i) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_i}$$

Quando sono presenti poli complessi coniugati, i coefficienti  $c_i$  sono anch'essi complessi. In questo caso si ricorre alle formule di Eulero per ottenere funzioni trigonometriche. L'espressione finale cercata è quindi

$$x(k) = \sum_{i=1}^n c_i p_i^k$$

- Caso 2. Se  $X(z)$ , o  $X(z)/z$ , ha poli multipli

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)^{r_1} (z - p_2)^{r_2} \cdots (z - p_h)^{r_h}}$$

allora si può porre

$$X(z) = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(z - p_i)^{r_i - k + 1}}$$

dove i residui si calcolano come

$$c_{ik} = \left[ \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - p_i)^{r_i} X(z) \right]_{z=p_i}$$

$$i = 1, \dots, h; \quad k = 1, \dots, r_i$$

- Esempio. Antitrasformare la funzione

$$X(z) = \frac{1}{z^4 + 6z^3 + 13z^2 + 12z + 4} = \frac{1}{(z+2)^2(z+1)^2}$$

Si ha che

$$X(z) = \frac{c_{11}}{(z+2)^2} + \frac{c_{12}}{(z+2)} + \frac{c_{21}}{(z+1)^2} + \frac{c_{22}}{(z+1)}$$

$$c_{11} = [(z+2)^2 X(z)]|_{z=-2} = 1$$

$$c_{12} = \left[ \frac{d}{dz} (z+2)^2 X(z) \right]_{z=-2} = 2$$

$$c_{21} = [(z+1)^2 X(z)]|_{z=-1} = 1$$

$$c_{22} = \left[ \frac{d}{dz} (z+1)^2 X(z) \right]_{z=-1} = -2$$

Esempio. Si calcoli la soluzione  $c(n)$  della seguente equazione alle differenze:

$$c(n+1) = c(n) + i c(n)$$

partendo dalla condizione iniziale  $c(0) = c_0$ . Tale equazione può essere interpretata come legge di capitalizzazione di un capitale iniziale  $c_0$  al tasso di interesse  $i$ .

[Soluzione.] Applicando la Z-trasformata all'equazione precedente si ottiene

$$z C(z) - z c_0 = (i + 1)C(z) \quad \rightarrow \quad [z - (1 + i)]C(z) = z c_0$$

da cui

$$C(z) = \frac{z c_0}{z - (1 + i)} = \frac{c_0}{1 - (1 + i)z^{-1}} \quad \rightarrow \quad c(n) = c_0(1 + i)^n$$

Esempio. Determinare l'espressione analitica della sequenza di Fibonacci descritta dalla seguente equazione alle differenze

$$y(n+2) = y(n+1) + y(n)$$

a partire dalle condizioni iniziali  $y(0) = y(1) = 1$ .

[Soluzione.] Applicando il metodo della Z-trasformata

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - z y(1) = z Y(z) - z y(0) + Y(z)$$

si ottiene

$$Y(z) = \frac{z[z y(0) + y(1) - y(0)]}{z^2 - z - 1}$$

Imponendo le condizioni iniziali  $y(0) = y(1) = 1$  si ottiene

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{z^2}{(z - a)(z - b)} = \frac{1}{a - b} \left[ \frac{a z}{(z - a)} - \frac{b z}{(z - b)} \right]$$

dove  $a$  e  $b$  sono le radici della funzione  $Y(z)$

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Antitrasformando si ottiene

$$y(n) = \frac{1}{a - b} [a a^n - b b^n] = \frac{1}{a - b} [a^{n+1} - b^{n+1}] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

Esempio. Calcolare la risposta all'impulso  $g(n)$  del seguente sistema dinamico discreto

$$G(z) = \frac{z(z + 1)}{(z - 0.8)(z + 0.5)}$$

[Soluzione.] Per calcolare la risposta all'impulso  $g(n)$  del sistema  $G(z)$  si procede utilizzando il metodo della scomposizione in fratti semplici

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{(z+1)}{(z-0.8)(z+0.5)} = \frac{1.8}{1.3} \frac{1}{(z-0.8)} - \frac{0.5}{1.3} \frac{1}{(z+0.5)}$$

da cui

$$G(z) = 1.3846 \frac{z}{(z-0.8)} - 0.3846 \frac{z}{(z+0.5)}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$g(n) = 1.3846(0.8)^n - 0.3846(-0.5)^n$$

Il sistema discreto  $G(z)$  è stabile.

Esempio. Determinare la risposta  $y(n)$  al gradino unitario  $u(n) = 1$  del seguente sistema dinamico discreto

$$y(n) = 0.5 y(n-1) + u(n)$$

partendo da condizione iniziale nulla  $y(0) = 0$ .

[Soluzione.] La funzione di trasferimento discreta  $G(z)$  associata all'equazione alle differenze assegnata è la seguente:

$$G(z) = \frac{1}{1 - 0.5 z^{-1}}$$

La Z-trasformata del segnale di ingresso  $u(n) = 1$  è:

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Quindi, la Z-trasformata del segnale di uscita  $y(n)$  è

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{1}{(1 - 0.5 z^{-1})} \frac{1}{(1 - z^{-1})} = \frac{z^2}{(z - 0.5)(z - 1)}$$

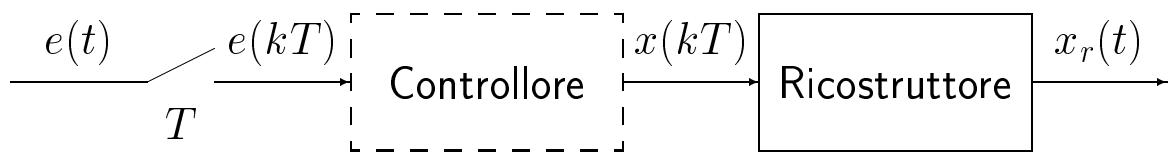
Operando la scomposizione in fratti semplici della funzione  $Y(z)/z$  si ottiene

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-0.5}$$

da cui si ricava  $y(n)$

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5} \quad \rightarrow \quad y(n) = 2 - 0.5^n$$

- CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE
- I sistemi in retroazione con controllo digitale sono caratterizzati da una parte continua (il processo da controllare) e una parte discreta (il controllore digitale)
- Sono quindi presenti sia variabili a tempo discreto sia variabili a tempo continuo
- I dispositivi di interfaccia sono il campionatore e il ricostruttore



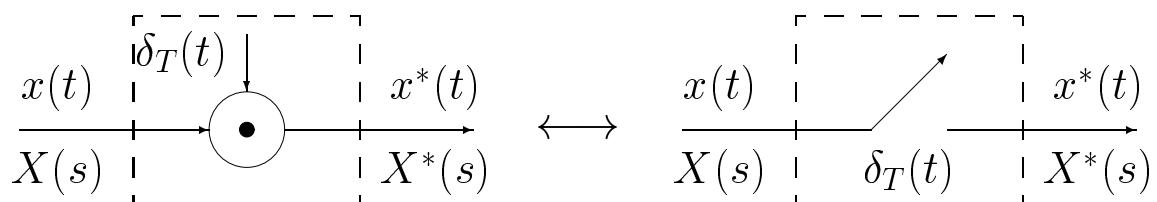
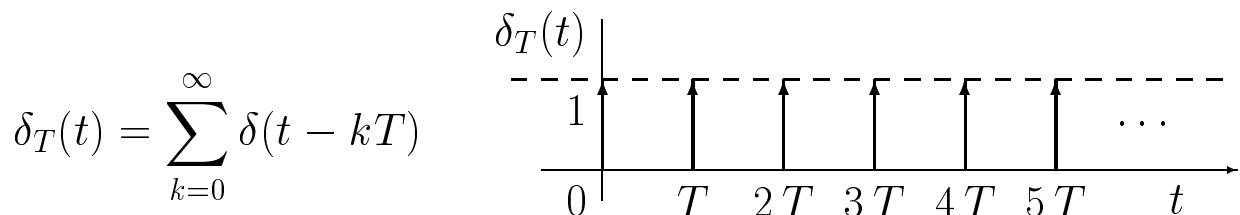
- Ricostruttore di ordine zero:

$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [h(t - kT) - h(t - (k + 1)T)]$$

$$X_r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[ \frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} \right] = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

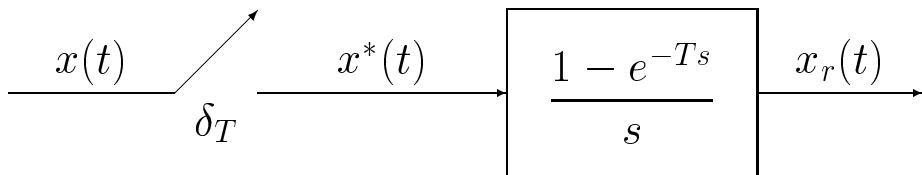
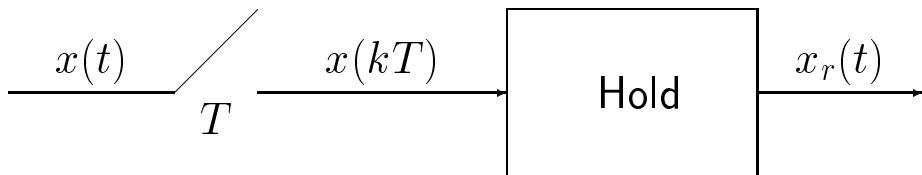
$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$x^*(t) = \mathcal{L}^{-1}[X^*(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$



- Il campionatore impulsivo è un modello ideale del campionatore reale (convertitore A/D) considerato adeguato alle esigenze di analisi e progetto dei controlli digitali
- L'uscita del ricostruttore di ordine zero vale:

$$X_r(s) = H_0(s) X^*(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} X^*(s)$$



$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$z = e^{sT} \quad \longleftrightarrow \quad s = \frac{1}{T} \ln z$$

$$X^*(s) \Big|_{s = \frac{1}{T} \ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = X(z)$$

- La trasformata zeta della sequenza  $x(kT)$  anzichè la trasformata di Laplace del segnale  $x^*(t)$  permette di operare con funzioni razionali fratte.

$$x^*(t) = x(t) \delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j n \omega_s t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T \delta_T(t) e^{-j n \omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

ne segue

$$x^*(t) = x(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j n \omega_s t}$$

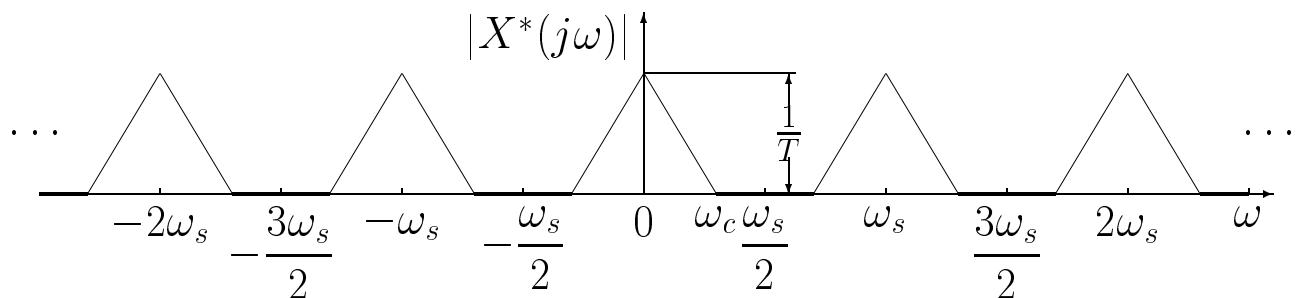
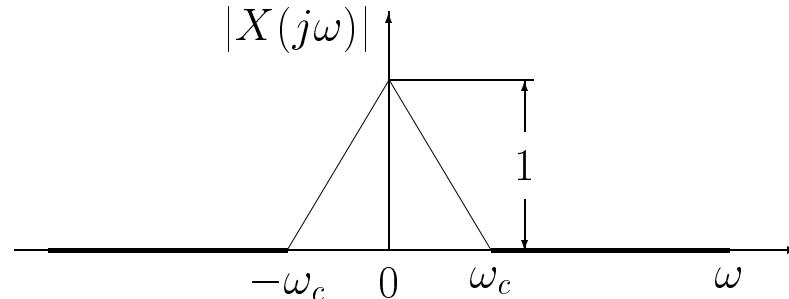
$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{j n \omega_s t}$$

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[x(t) e^{j n \omega_s t}] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s - j n \omega_s)$$

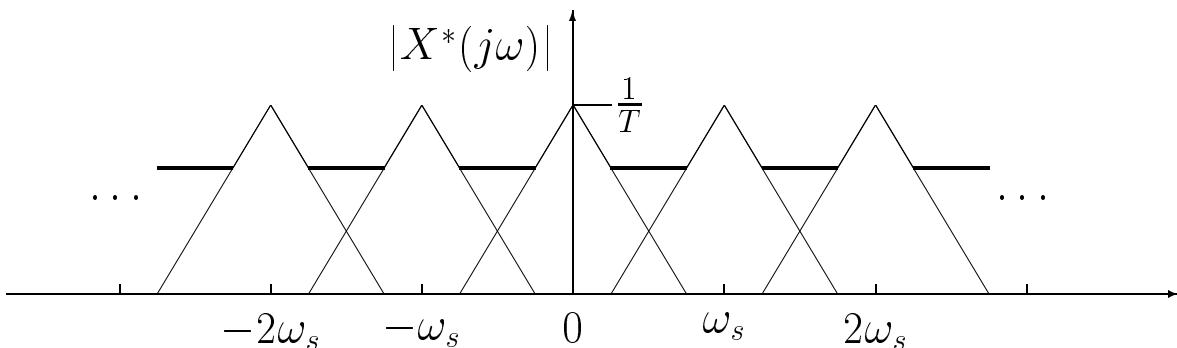
- A meno della costante moltiplicativa  $1/T$ , la trasformata di Laplace  $X^*(s)$  del segnale campionato si ottiene dalla somma degli infiniti termini,  $X(s - j n \omega_s)$ , ciascuno dei quali si ottiene dalla  $X(s)$  mediante traslazione di  $j n \omega_s$  nel campo complesso.

- L'andamento spettrale del segnale campionato vale:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - j n\omega_s)$$



- La condizione  $\omega_s > 2\omega_c$  mantiene distinto lo spettro originario dalle componenti complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire completamente il segnale  $x(t)$
- Nel caso in cui la condizione  $\omega_s > 2\omega_c$  non sia rispettata:



- Lo spettro originario è parzialmente sovrapposto alle componenti complementari contigue per cui mediante filtraggio non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato

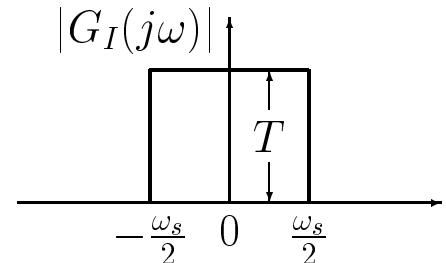
- TEOREMA DI SHANNON

- Sia  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  la pulsazione di campionamento ( $T$  è il periodo di campionamento), e sia  $\omega_c$  la più alta componente spettrale del segnale tempo-continuo  $x(t)$ . Il segnale  $x(t)$  è completamente ricostruibile a partire dal segnale campionato  $x^*(t)$  se e solo se la pulsazione  $\omega_s$  è maggiore del doppio della pulsazione  $\omega_c$ :

$$\omega_s > 2\omega_c$$

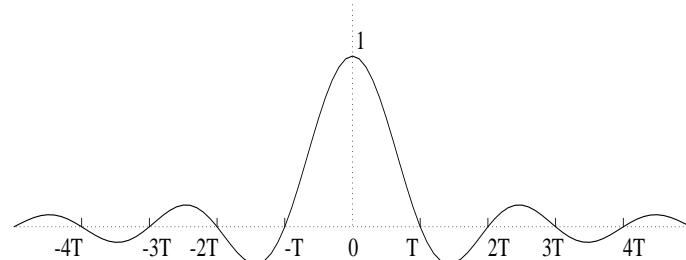
- Ricostruzione mediante filtro ideale

$$G_I(j\omega) = \begin{cases} T & -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



- Il filtro ideale  $G_I(j\omega)$  non è fisicamente realizzabile. La sua risposta all'impulso è:

$$g_I(t) = \frac{\sin(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2}$$



- Formula di ricostruzione di Shannon:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) g_I(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT) \frac{\sin(\omega_s(t - \tau)/2)}{\omega_s(t - \tau)/2} d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin(\omega_s(t - kT)/2)}{\omega_s(t - kT)/2} \end{aligned}$$

- Per ricostruire  $x(t)$  occorrono tutti i campioni  $x(kT)$  passati e futuri.
- Nei controlli si usano ricostruttori causali e facilmente realizzabili.

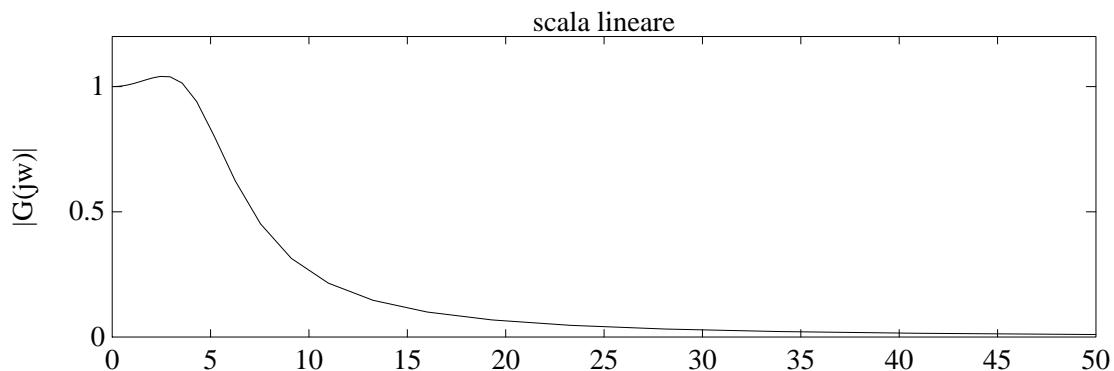
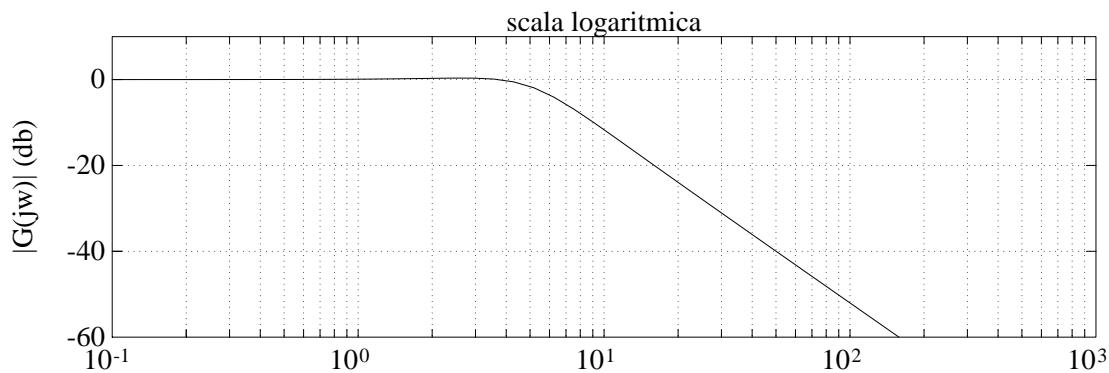
- Campionamento della risposta all'impulso di un sistema del secondo ordine:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

- Il sistema  $G(s)$  ha un guadagno statico unitario, ha due poli complessi coniugati  $p_{1,2} = -3 \pm j4$ , pulsazione naturale  $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$  e coefficiente di smorzamento  $\delta = 3/5$ :

$$G(s) = \frac{25}{(s + 3)^2 + 4^2}$$

- Diagramma delle ampiezze di  $G(j\omega)$ :



- Per  $\omega > 10\omega_n = 50 \text{ rad/s} = \bar{\omega}$ , l'ampiezza di  $G(j\omega)$  è inferiore ad un centesimo (-40 db) del guadagno statico.
- Lo spettro, pur essendo a banda teoricamente illimitata, risulta essere praticamente trascurabile per pulsazioni maggiori di  $\bar{\omega} = 50 \text{ rad/s}$ .

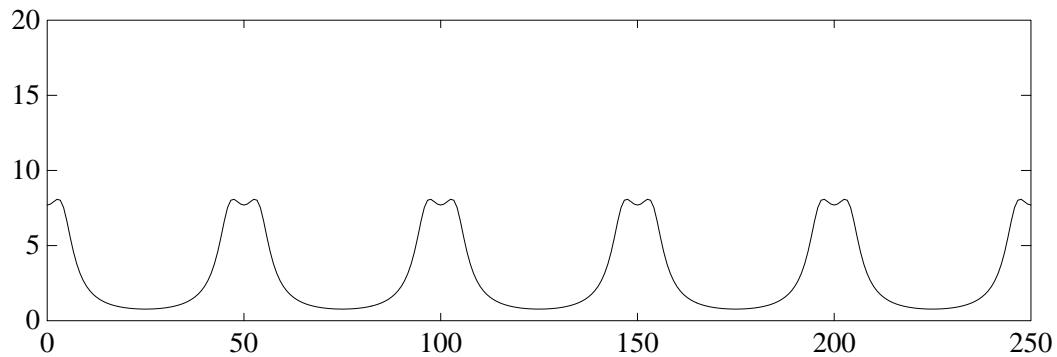
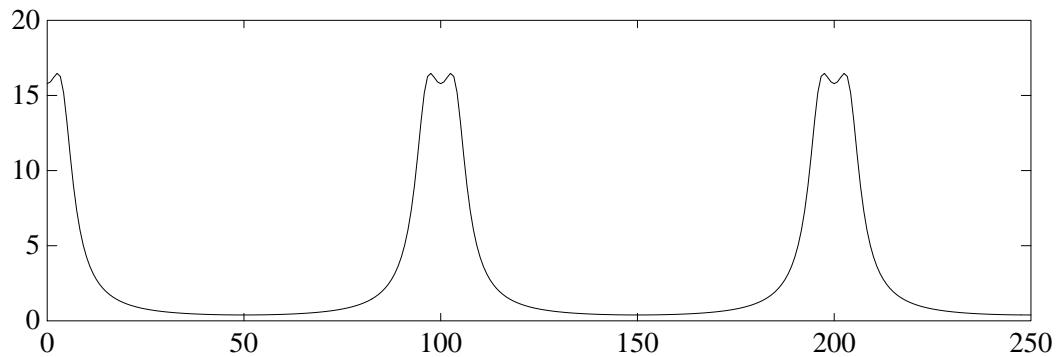
- Applicando la  $\mathcal{Z}$ -trasformata si ha:

$$G(z) = \frac{25}{4} \frac{e^{-3T} \sin(4T) z}{z^2 - 2e^{-3T} \cos(4T) z + e^{-6T}}$$

- La risposta spettrale è data da:

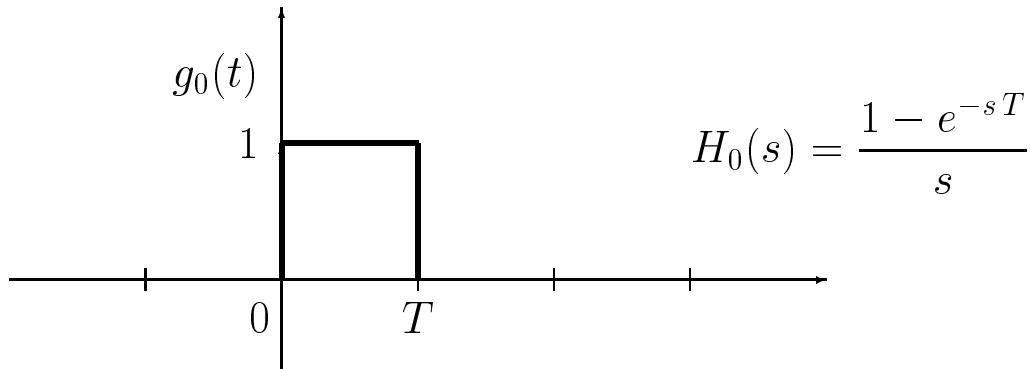
$$G^*(j\omega) = G(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

- Andamento spettrale di  $G^*(j\omega)$  quando  $T = \frac{\pi}{50}$  e  $T = \frac{\pi}{25}$



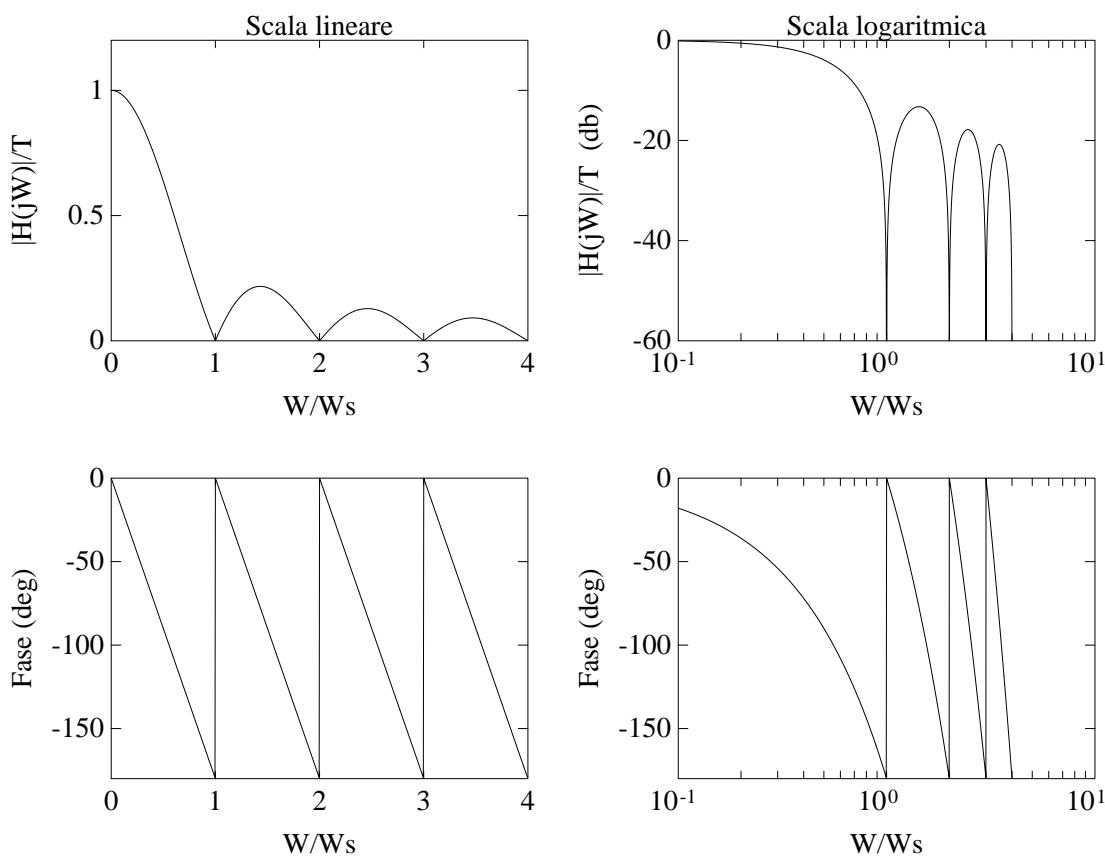
- Ricostruttore di ordine zero

$$x_0(t) = x(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$



- La risposta frequenziale del ricostruttore di ordine zero:

$$H_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2} \simeq T e^{-j\omega T/2}$$



- Corrispondenza tra piano  $s$  e piano  $z$ :

$$X^*(s) = X(z)|_{z=e^{sT}}$$

- Le variabili complesse  $s$  e  $z$  sono legate dalla relazione:

$$z = e^{sT}$$

- Posto  $s = \sigma + j\omega$  si ha:

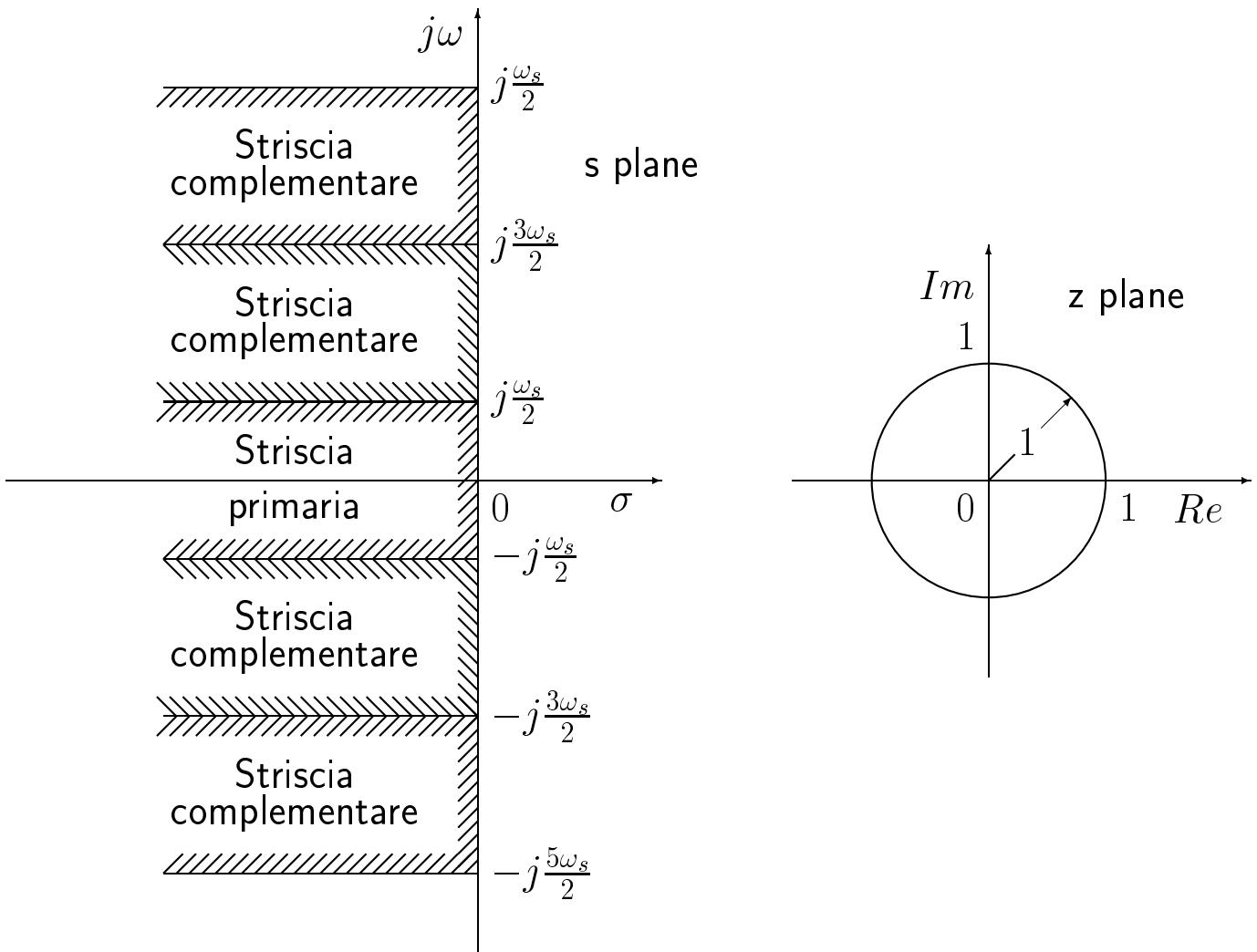
$$z = e^{T(\sigma+j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{jT(\omega + \frac{2k\pi}{T})}$$

- Ogni punto del piano  $z$  è in corrispondenza con infiniti punti del piano  $s$ .
- I punti del piano  $s$  a parte reale negativa ( $\sigma < 0$ ) sono in corrispondenza con i punti del piano  $z$  all'interno del cerchio unitario:

$$|z| = e^{T\sigma} < 1$$

- I punti sull'asse immaginario ( $\sigma = 0$ ) vengono mappati sul cerchio unitario ( $|z| = 1$ ), mentre quelli a parte reale positiva ( $\sigma > 0$ ) vengono mappati all'esterno del cerchio unitario ( $|z| > 1$ ).
- La striscia di piano  $s$  delimitata dalle rette orizzontali  $s = j\omega_s/2$  e  $s = -j\omega_s/2$  prende il nome di **striscia primaria**.

- Striscia primaria e strisce complementari:



- Le variabili complesse  $s$  e  $z$  sono legate dalla relazione:

$$z = e^{sT}$$

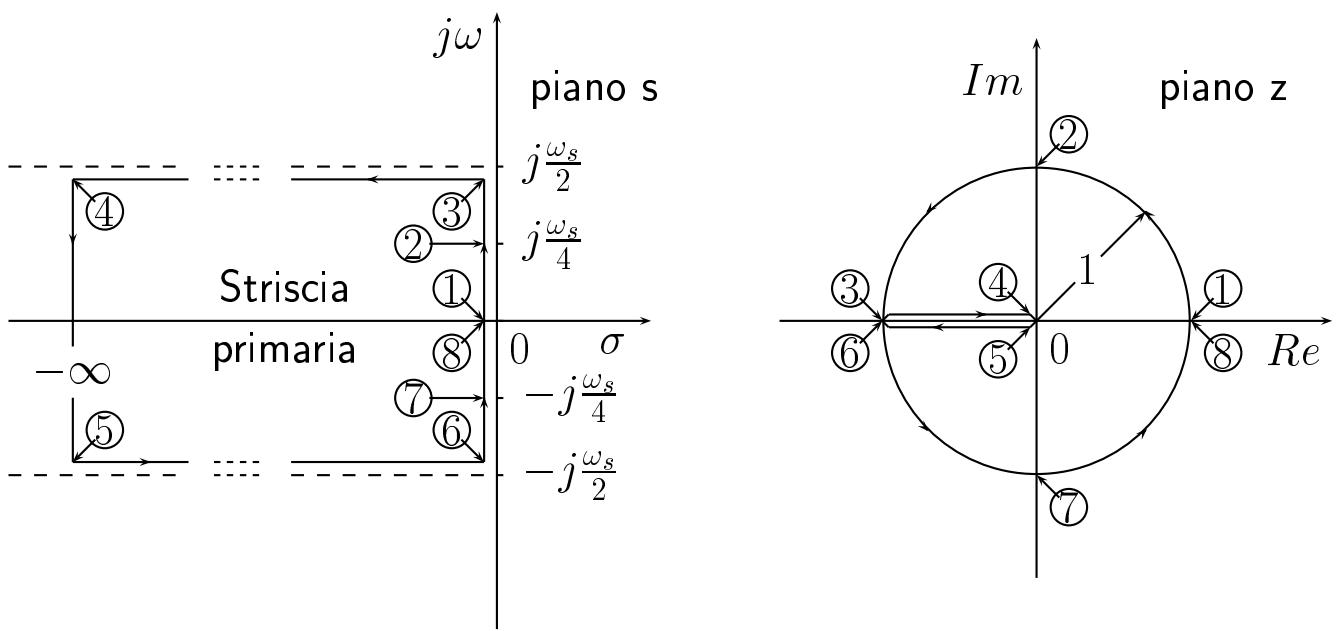
- Posto  $s = \sigma + j\omega$  si ha:

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega}$$

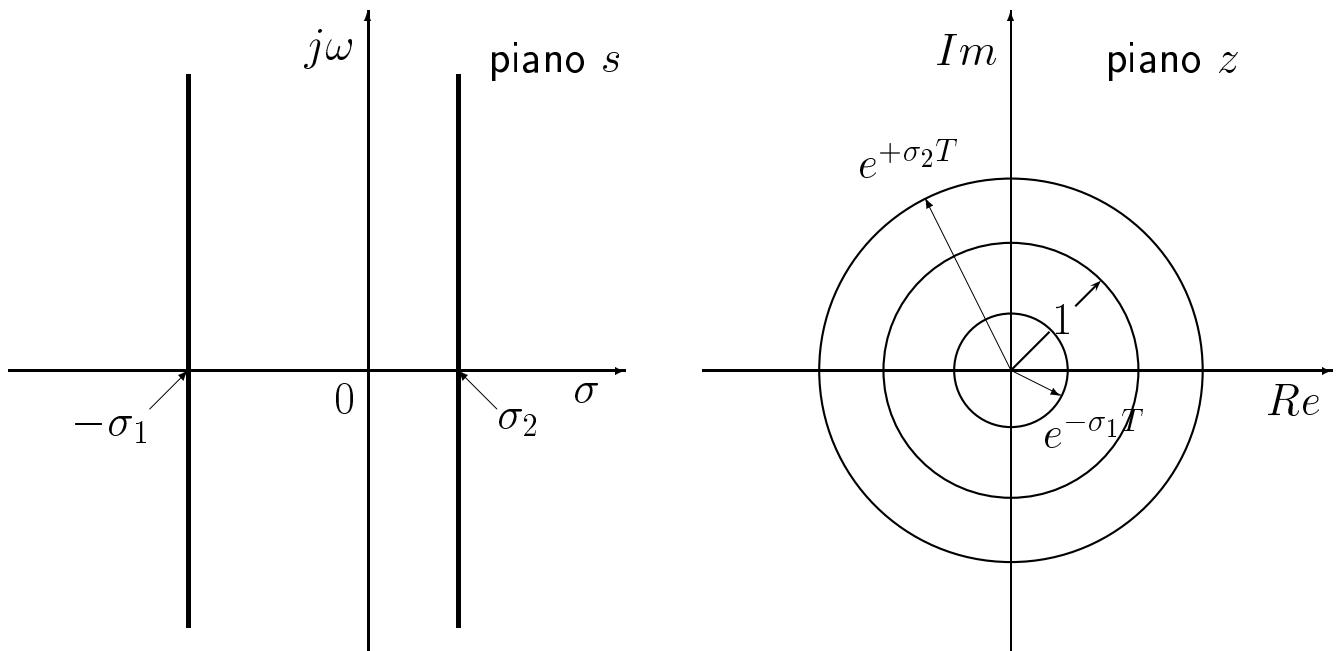
dove

$$0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

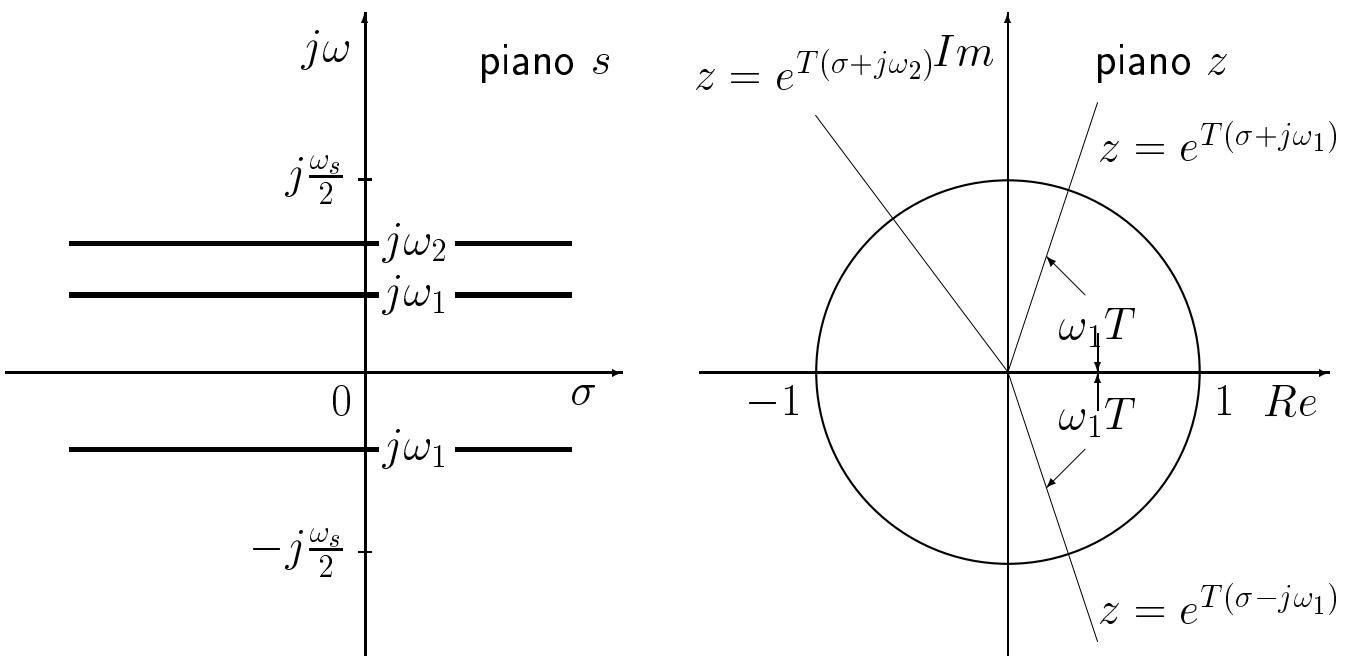
- Mapping tra striscia primaria e piano  $z$ :



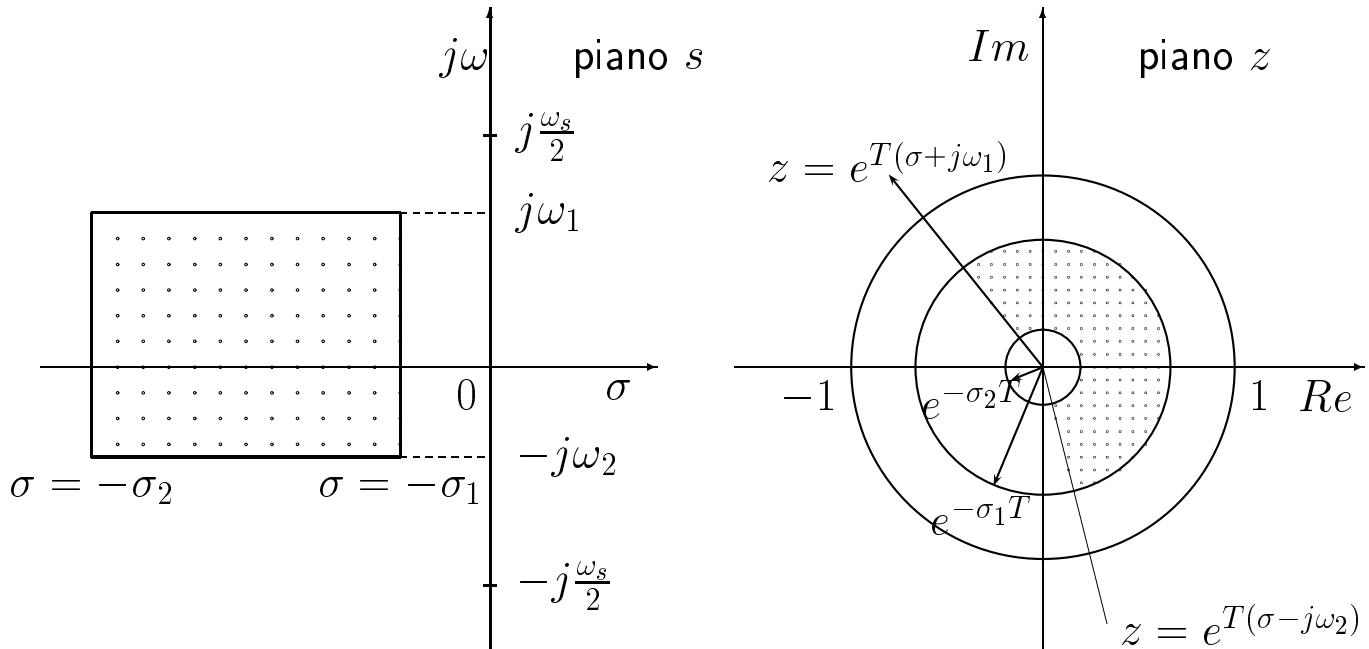
- Luoghi a decadimento esponenziale costante:



- Luoghi a pulsazione costante:



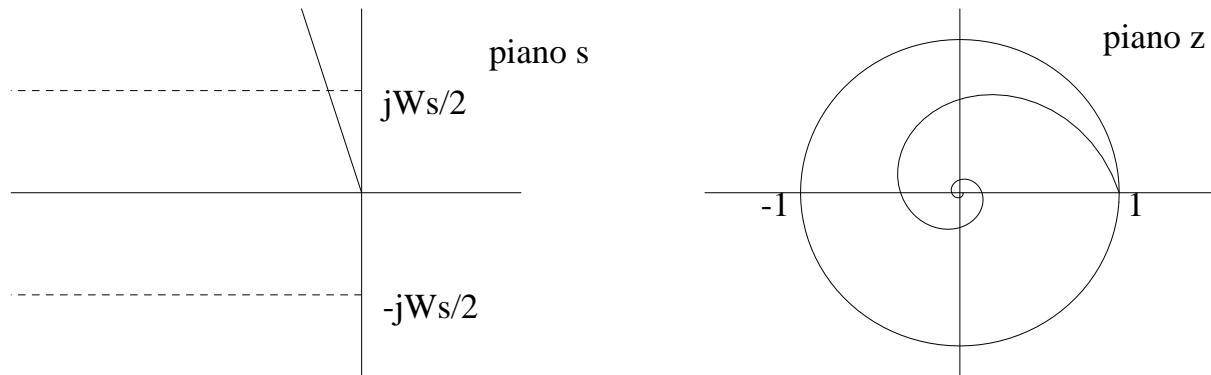
- Un esempio di corrispondenza fra due regioni del piano  $s$  e del piano  $z$ :



- Luogo dei punti a coefficiente di smorzamento costante  $\delta = \delta_1$ :

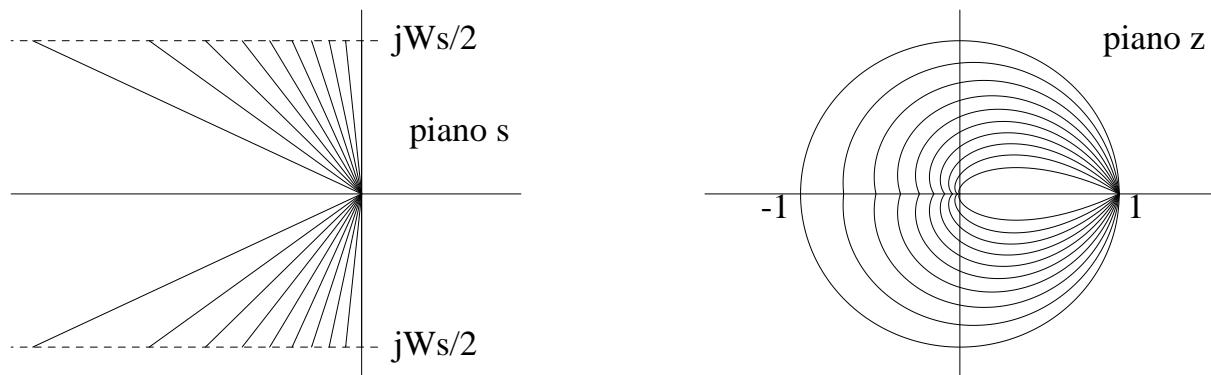
$$s = -\omega \tan \beta + j\omega = -\omega \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} + j\omega$$

$$\beta = \arcsin \delta_1$$

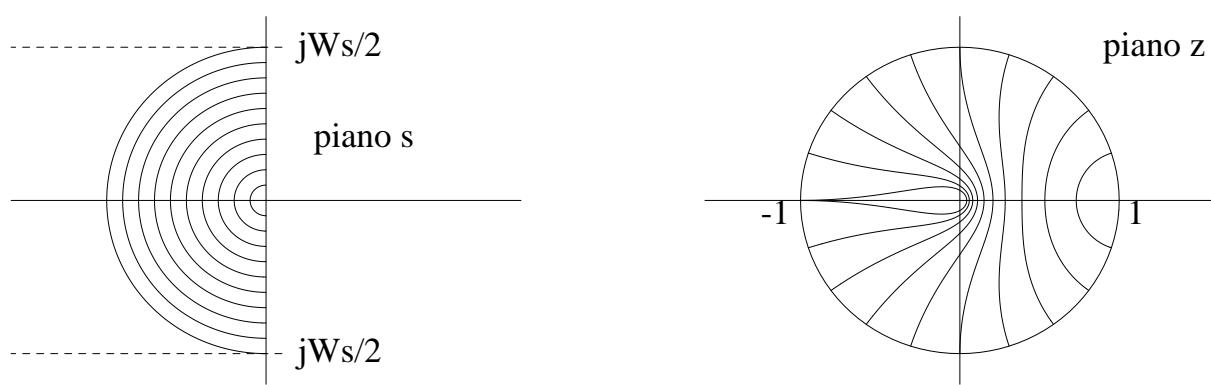


$$z = e^{sT} = e^{(-\omega \tan \beta + j\omega)T} = e^{-\varphi \tan \beta} e^{j\varphi} \quad \varphi = \omega T$$

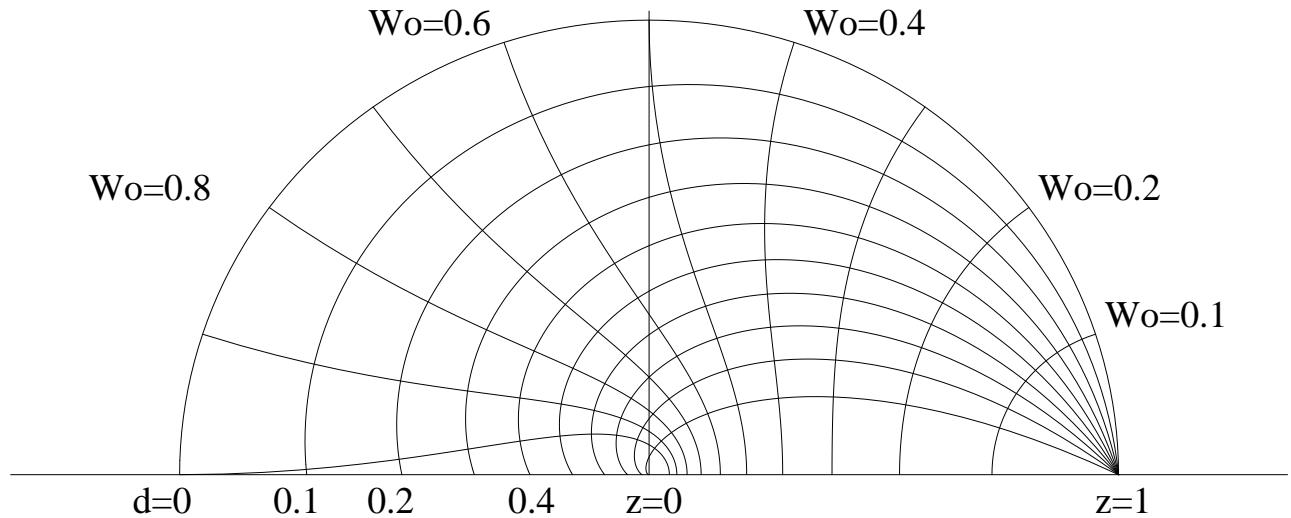
- Luoghi a coefficiente di smorzamento  $\delta$  costante:



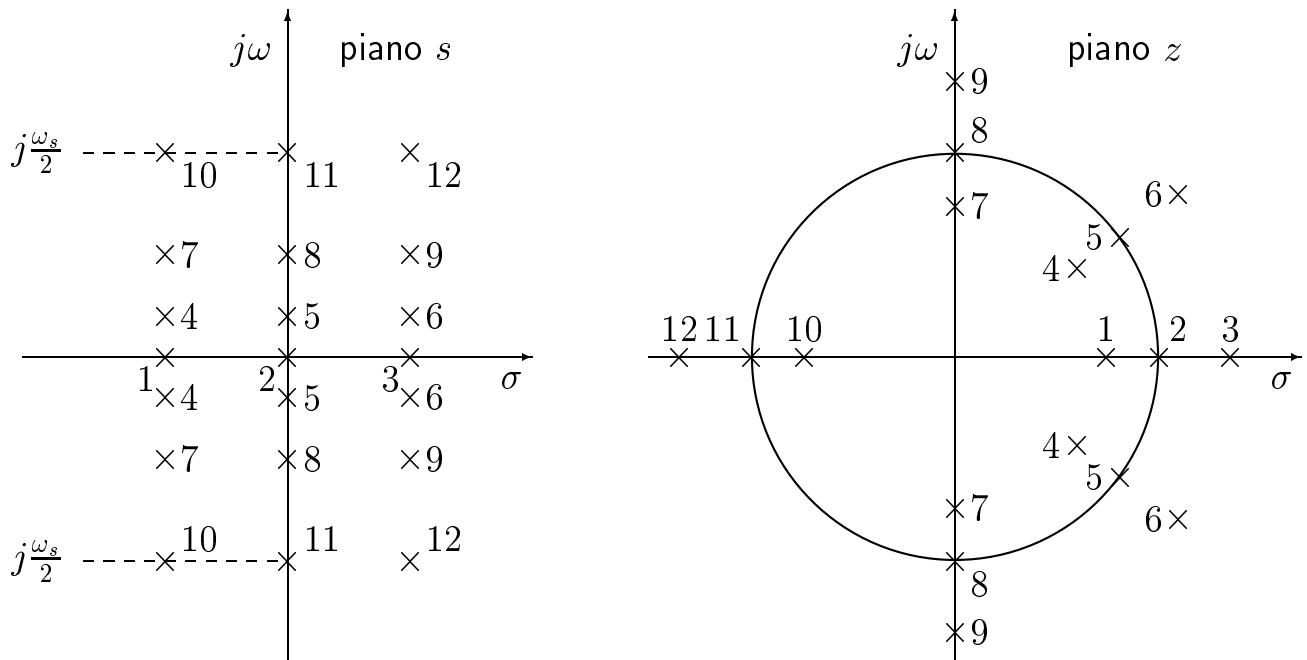
- Luoghi a pulsazione naturale  $\omega_n$  costante:



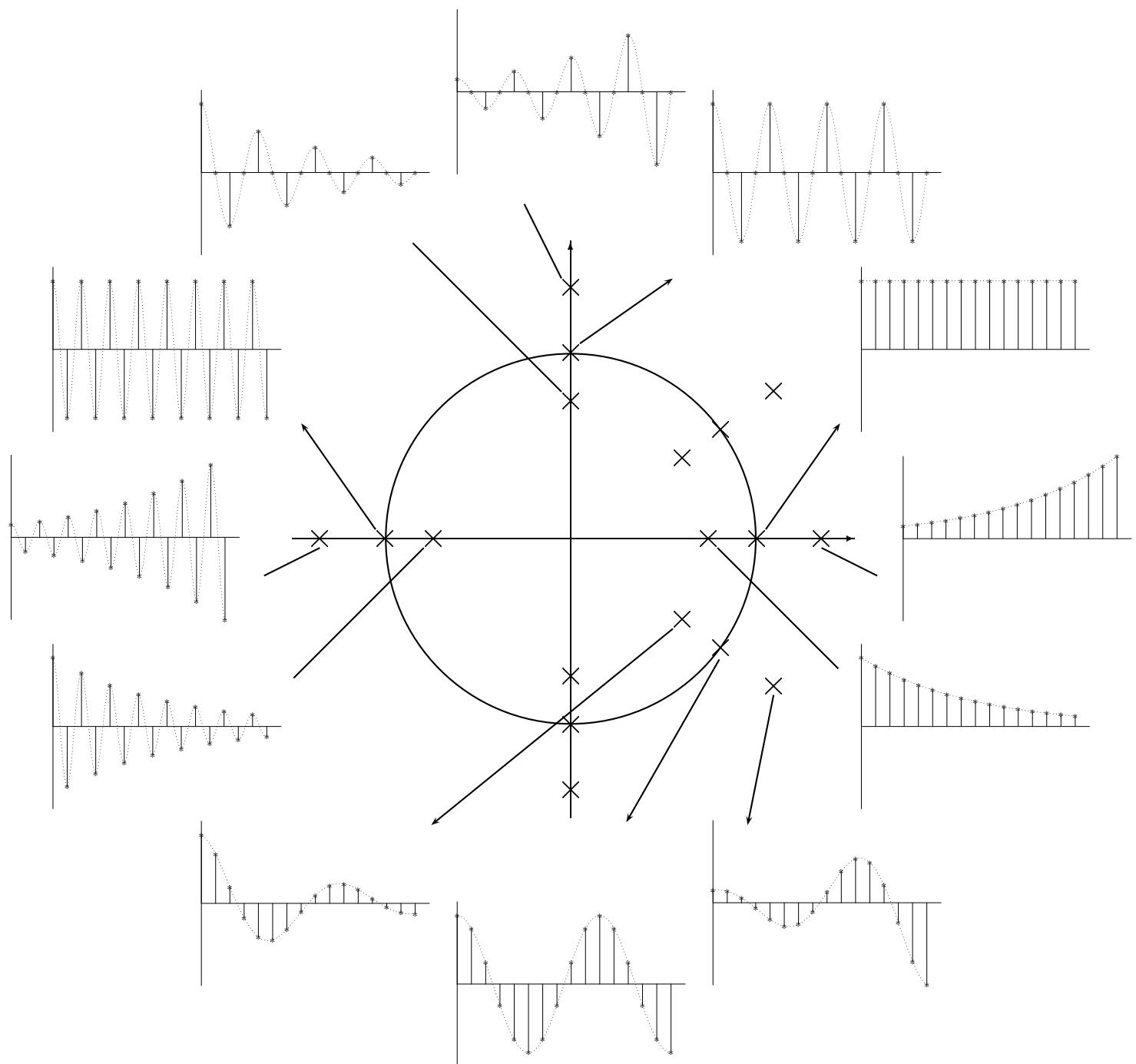
- Luoghi del piano  $z$  a  $\delta$  e  $\omega_n$  costanti:



- I punti del piano  $s$  e del piano  $z$ , posti in corrispondenza per mezzo della relazione  $z = e^{sT}$ , possono essere considerati come poli corrispondenti di trasformate  $F(s)$  ed  $F(z)$ , con  $F(z)$  calcolata campionando  $F(s)$

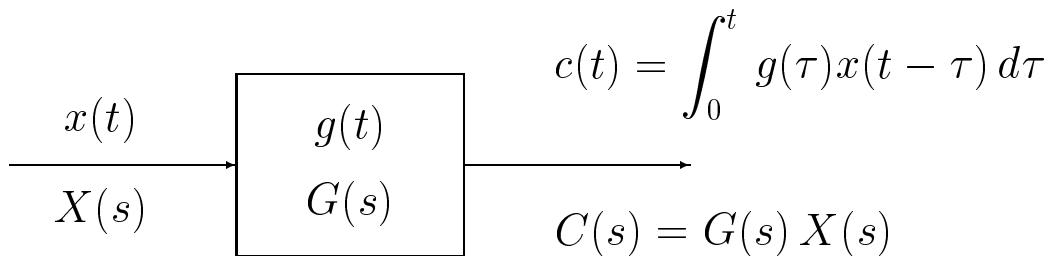


## POSIZIONE DEI POLI E RISPOSTE TRANSITORIE

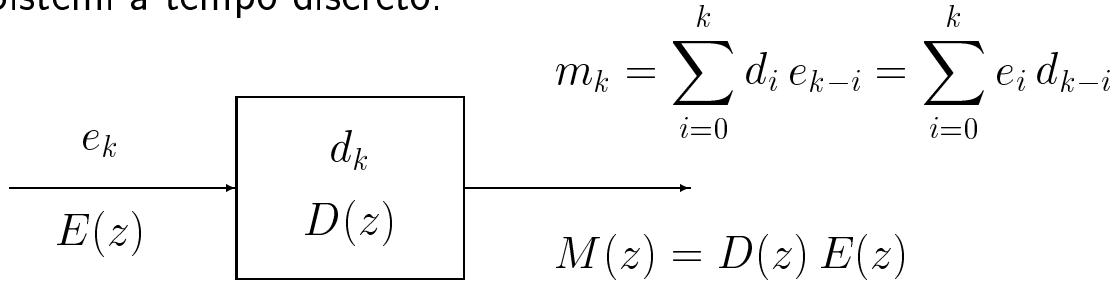


## SISTEMI A TEMPO DISCRETO

- Sistemi a tempo continuo:

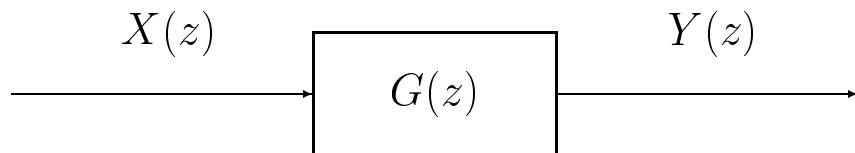


- Sistemi a tempo discreto:



- Funzione di trasferimento discreta:

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT)$$



$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = 1 \quad \rightarrow \quad Y(z) = G(z)$$

- Funzione di risposta armonica discreta:

$$G(e^{j\omega T}), \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

$$G(e^{j(\omega+k\omega_s)T}) = G(e^{j\omega T}), \quad G(e^{j(-\omega)T}) = G^*(e^{j\omega T})$$

- La risposta di un sistema  $G(z)$  asintoticamente stabile ad un ingresso sinusoidale  $\sin(\omega kT)$  di ampiezza unitaria è, a regime, una sinusoide  $A \sin(\omega kT + \varphi)$  la cui ampiezza  $A$  è data dal modulo del vettore  $G(e^{j\omega T})$ , e la cui fase  $\varphi$  è data dalla fase del vettore  $G(e^{j\omega T})$ :

$$A = |G(e^{j\omega T})|, \quad \varphi = \text{Arg}[G(e^{j\omega T})]$$

## STABILITÀ DEI SISTEMI DISCRETI

- Stabilità dei sistemi discreti:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- Il comportamento dinamico del sistema:

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

dipende dai poli di  $G(z)$ , cioè dalle radici del polinomio  $A(z)$ .

- Stabilità asintotica: tutti i poli  $p_i$  della  $G(z)$  devono essere interni al cerchio unitario:  $|p_i| < 1$ .
- Stabilità semplice: tutti i poli  $p_i$  della  $G(z)$  devono appartenere al disco unitario ( $|p_i| \leq 1$ ) e quelli che si trovano sul cerchio unitario ( $|p_i| = 1$ ) devono avere molteplicità unitaria.
- Esempio. Sia dato il sistema:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{4z^{-1}}{1 + az^{-1}} = \frac{4}{z + a}$$

Ad esso corrisponde la seguente equazione alle differenze:

$$Y(z)(1 + az^{-1}) = 4z^{-1}U(z)$$

$$y(k) = -ay(k-1) + 4u(k-1)$$

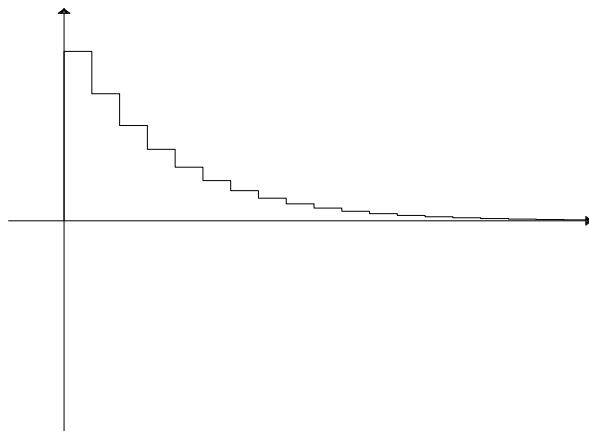
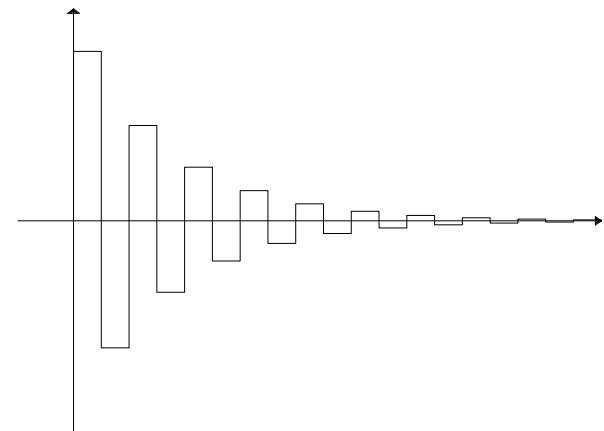
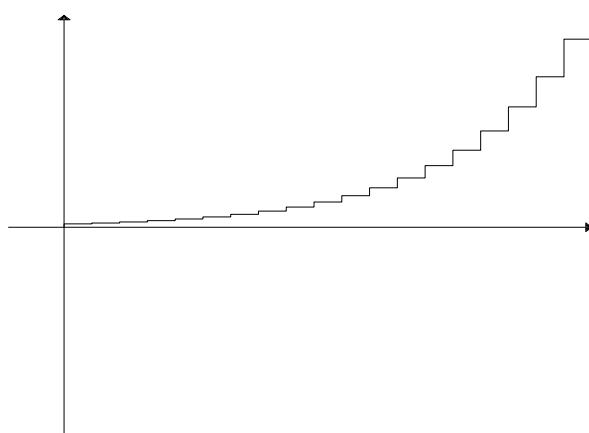
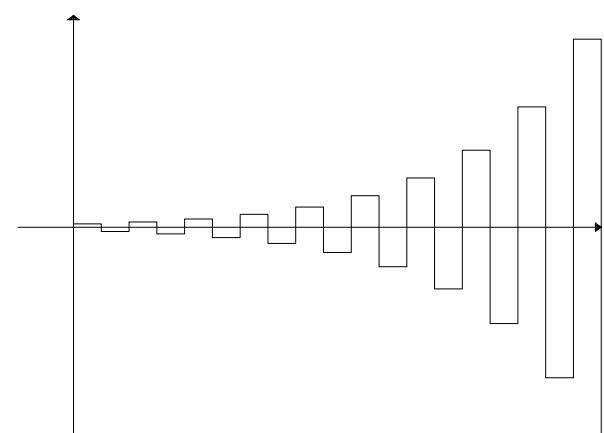
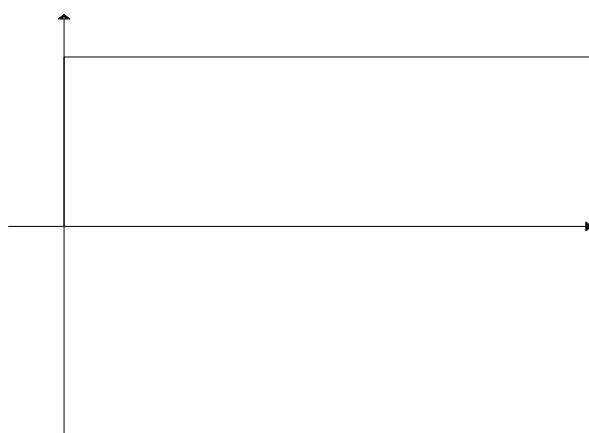
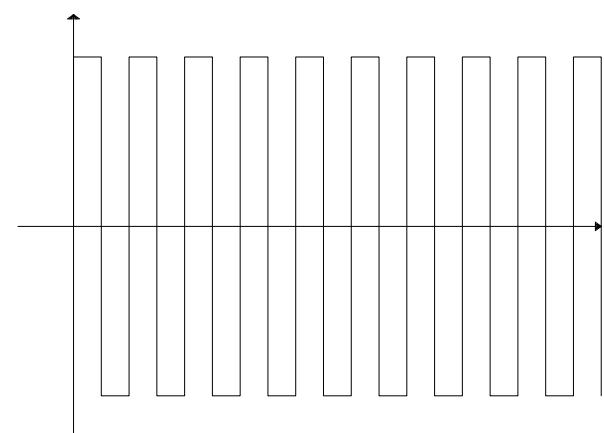
La risposta di questo sistema all'impulso unitario

$$u(0) = 1, \quad u(k) = 0, \quad k > 0;$$

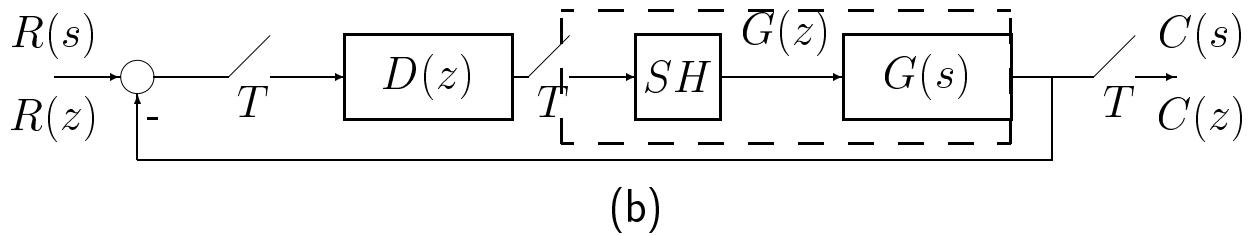
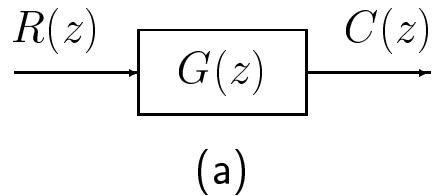
è la seguente:

$$y(k) = 4(-a)^{k-1}$$

- Andamenti temporali che si ottengono in corrispondenza dei valori  $a = 0.75$ ,  $a = -0.75$ ,  $a = 1.25$ ,  $a = -1.25$ ,  $a = 1$ , e  $a = -1$ :

polo in  $z=0.75$ polo in  $z=-0.75$ polo in  $z=1.25$ polo in  $z=-1.25$ polo in  $z=1$ polo in  $z=-1$ 

- Stabilità dei sistemi discreti:



$$G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

- Sia dato un sistema descritto da

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad \text{oppure} \quad G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

- Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutte le radici del polinomio  $A(z)$  (o del polinomio  $1 + D(z)G(z)$ ), cioè i poli del sistema, sono entro il cerchio di raggio unitario con centro nell'origine del piano  $z$  ossia  $|p_i| < 1, \forall i$ .
- Il sistema è stabile se tutti i poli a modulo unitario  $|p_i| = 1$  sono poli semplici (la loro molteplicità è 1), mentre tutti i rimanenti poli sono entro il cerchio unitario.
- Si deve risolvere una equazione polinomiale:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

la cui soluzione è agevole solo per piccoli valori di  $n$ .

- Tre metodi per studiare la stabilità:
  1. utilizzare una trasformazione bilineare ed applicare il criterio di Routh-Hurwitz;
  2. utilizzare il criterio di Jury che elabora direttamente i coefficienti di  $A(z)$ , cioè del denominatore di  $G(z)$ ;
  3. criterio di Nyquist.

- Trasformazione bilineare e criterio di Routh-Hurwitz:

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{z-1}{z+1}$$

- Il cerchio unitario in  $z$  corrisponde al semipiano sinistro del piano  $w$ .

$$\bullet |z| = \left| \frac{1+w}{1-w} \right| = \left| \frac{1+\sigma+j\omega}{1-\sigma-j\omega} \right| < 1$$

$$\frac{(1+\sigma)^2 + \omega^2}{(1-\sigma)^2 + \omega^2} < 1$$

$$(1+\sigma)^2 + \omega^2 < (1-\sigma)^2 + \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma < 0$$

$$\bullet |z| = 1 \quad \Rightarrow \quad (1+\sigma)^2 + \omega^2 = (1-\sigma)^2 + \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0$$

- Per l'analisi della stabilità di  $G(z)$  ( $G_0(z)$ ) si procede come segue:

1. si considera l'equazione caratteristica

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

2. si effettua la trasformazione

$$\left( \frac{1+w}{1-w} \right)^n + a_1 \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \frac{1+w}{1-w} + a_n = 0$$

da cui si ottiene

$$Q(w) = q_0 w^n + q_1 w^{n-1} + \cdots + q_{n-1} w + q_n = 0$$

3. applicando il criterio di Routh-Hurwitz, si studiano quindi i segni delle radici di  $Q(w)$ .

- Esempio:

$$G(z) = \frac{z+1}{z^3 + 2z^2 + z + 1}$$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + 2\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + \frac{1+w}{1-w} + 1 = 0$$

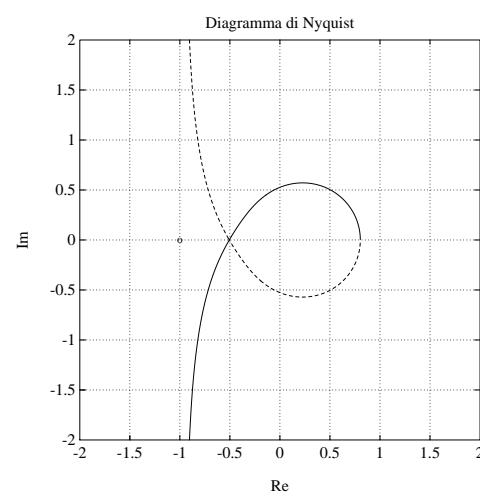
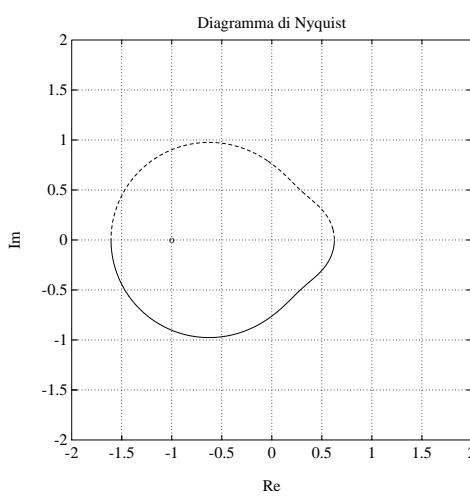
$$-w^3 + 3w^2 + w + 5 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 8/3 \\ 0 & 5 \end{array}$$

- Il sistema ha un polo instabile
- Il criterio di Nyquist permette di decidere circa la stabilità di sistemi in retroazione analizzando il comportamento frequenziale della risposta armonica di anello in rapporto al punto critico  $(-1 + j0)$

$$G(e^{j\omega T}), \quad -\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

- Se la  $G(z)$  è di tipo 0, allora il diagramma relativo è una curva chiusa; se è di tipo 1 o 2, allora si ha una curva aperta, che viene chiusa con una circonferenza o semicirconferenza all'infinito percorsa in senso orario



- Criterio di Nyquist I

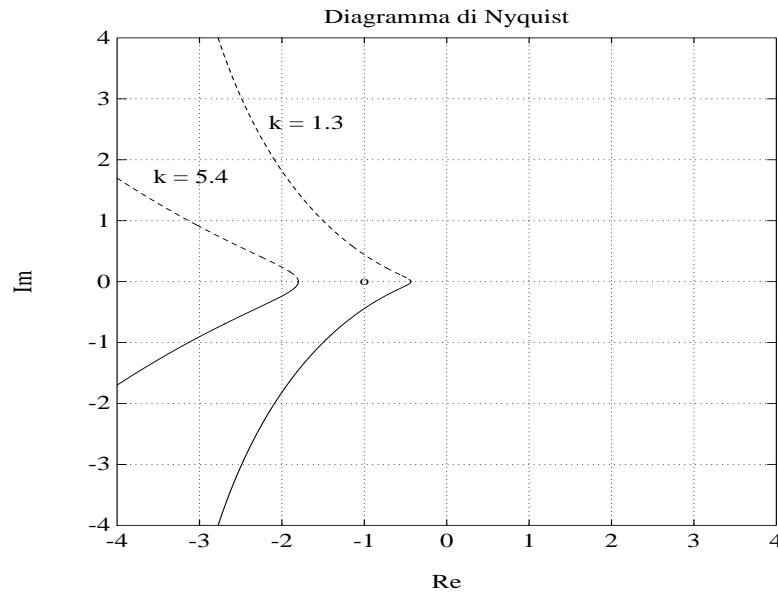
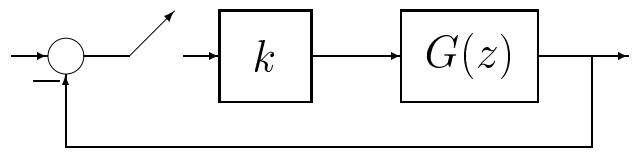
Sia data una funzione di guadagno d'anello  $G(z)$  con tutti i poli stabili (a modulo minore di uno), con l'eventuale eccezione di un polo semplice o doppio in  $z = 1$ . Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione  $G(e^{j\omega T})$  tracciato per  $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$  non circondi nè tocchi il punto critico  $-1 + j0$ .

- Criterio di Nyquist II

Sia data una funzione di guadagno d'anello  $G(z)$  senza poli a modulo unitario, con l'eventuale eccezione di un polo semplice o doppio in  $z = 1$ . Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione  $G(e^{j\omega T})$  tracciato per  $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$  circondi il punto critico  $-1 + j0$  tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di  $G(z)$  con modulo maggiore di uno. Ogni giro in meno in senso antiorario, oppure ogni giro in più in senso orario, corrisponde alla presenza di un polo a modulo maggiore di uno nel sistema in retroazione.

- Esempio:

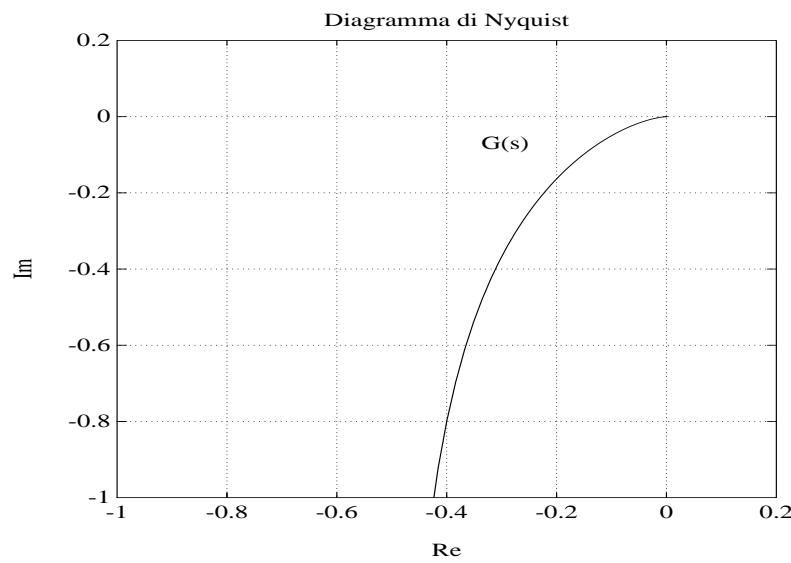
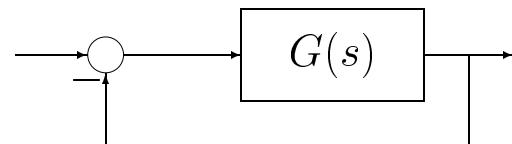
$$G(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$$



Il sistema in retroazione è stabile per  $k = 1.3$  ed instabile per  $k = 5.4$

- Esempio:

$$G(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$



Il sistema è instabile

- Luogo delle radici. È il luogo descritto dagli zeri di una funzione

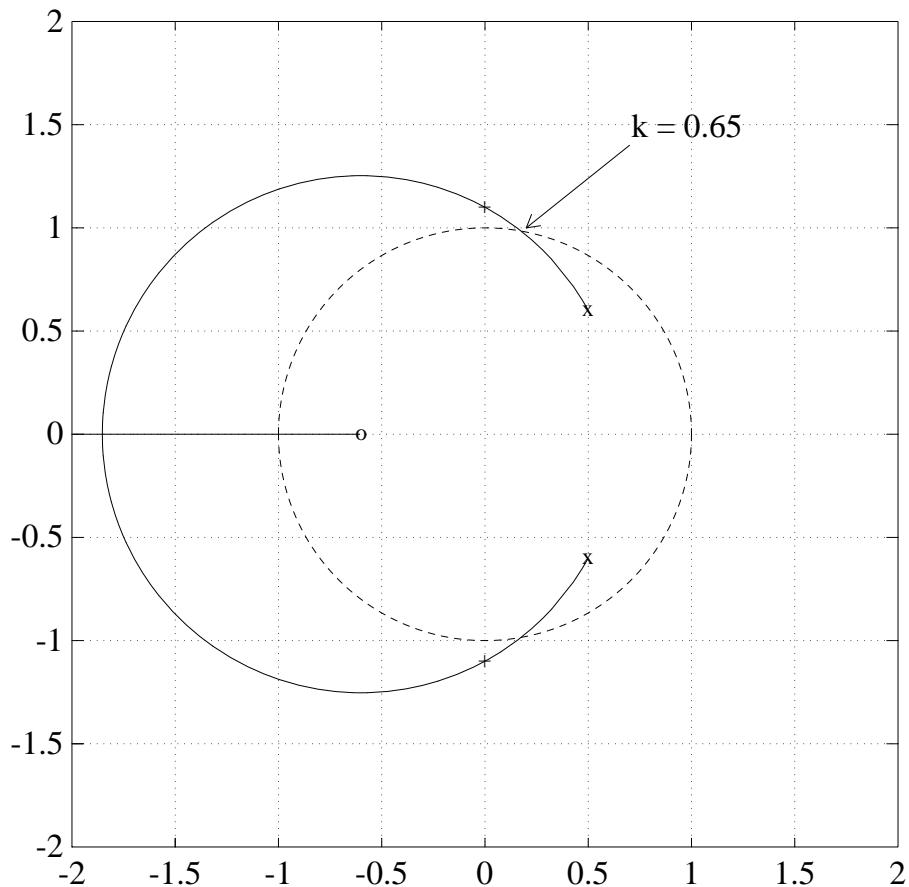
$$F(s) = 1 + k \quad G(s) = 1 + k \frac{B(s)}{A(s)}$$

al variare del parametro  $k$  nell'intervallo  $[0, +\infty]$ .

- Per il tracciamento del luogo valgono le stesse regole del caso continuo.
- Cambia l'interpretazione dei risultati che si ottengono.
- Esempio. Dato il seguente sistema in catena aperta con due poli in  $z_{1,2} = 0.5 \pm j0.6$ :

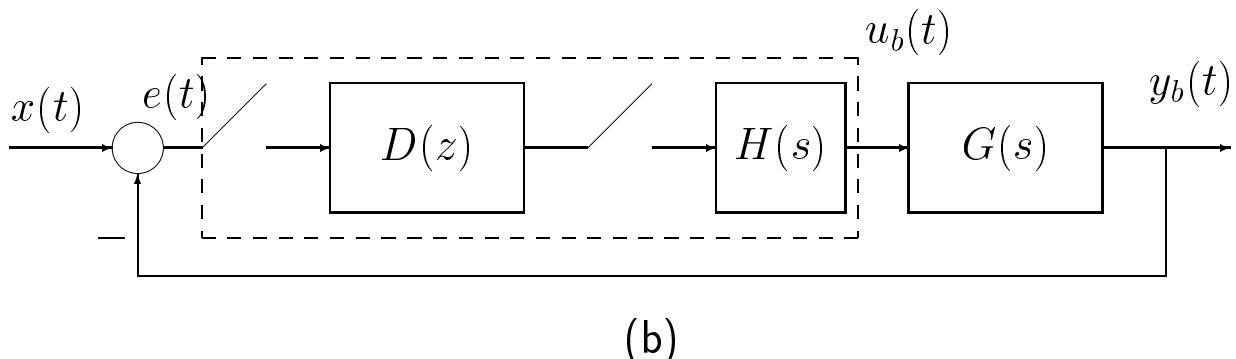
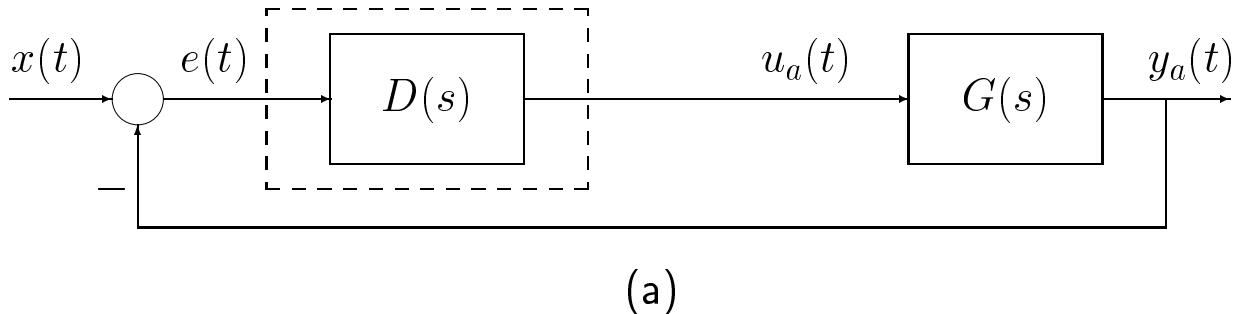
$$G(z) = k \frac{z + 0.6}{z^2 - z + 0.61}$$

Per il sistema in retroazione unitaria si ha:



## PROGETTO PER DISCRETIZZAZIONE

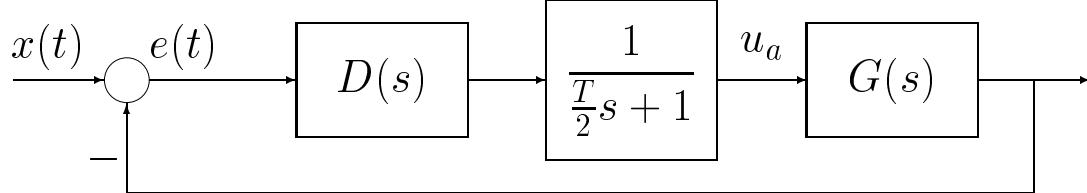
- Il regolatore  $D(s)$  progettato in ambito “tempo continuo” (caso a) viene “discretizzato” ottenendo una funzione  $D(z)$  che verrà inserita all’interno dell’anello di controllo discreto (caso b):



- Tutti i metodi di discretizzazione che verranno presentati sono “approssimati”, cioè forniscono un sistema discreto  $D(z)$  che riproduce bene, ma non esattamente, il comportamento dinamico del sistema  $D(s)$ .
- Più piccolo è il periodo di campionamento  $T$ , più il sistema  $D(z)$  ha un comportamento dinamico simile a quello del sistema  $D(s)$ .
- Il progetto per discretizzazione procede seguendo tre passi concettuali:

- 1) Scelta del periodo di campionamento  $T$  e verifica dei margini di stabilità del sistema:

$$H_0(s) \approx \frac{1}{\frac{T}{2}s + 1} \approx e^{-sT/2}$$



- 2) Discretizzazione della  $D(s)$ ;
- 3) Verifica a posteriori (simulativa e/o sperimentale) del comportamento dinamico del sistema retroazionato.

- TECNICHE DI DISCRETIZZAZIONE:

1. Metodo delle differenze all'indietro
2. Metodo delle differenze in avanti
3. Trasformazione bilineare
4. Trasformazione bilineare con precompensazione
5. Metodo della  $\mathcal{Z}$ -trasformata
6. Metodo della  $\mathcal{Z}$ -trasformata con ricostruttore di ordine 0
7. Metodo della corrispondenza poli/zeri

## 1. METODO DELLE DIFFERENZE ALL'INDIETRO

- Il metodo consiste nella seguente sostituzione:

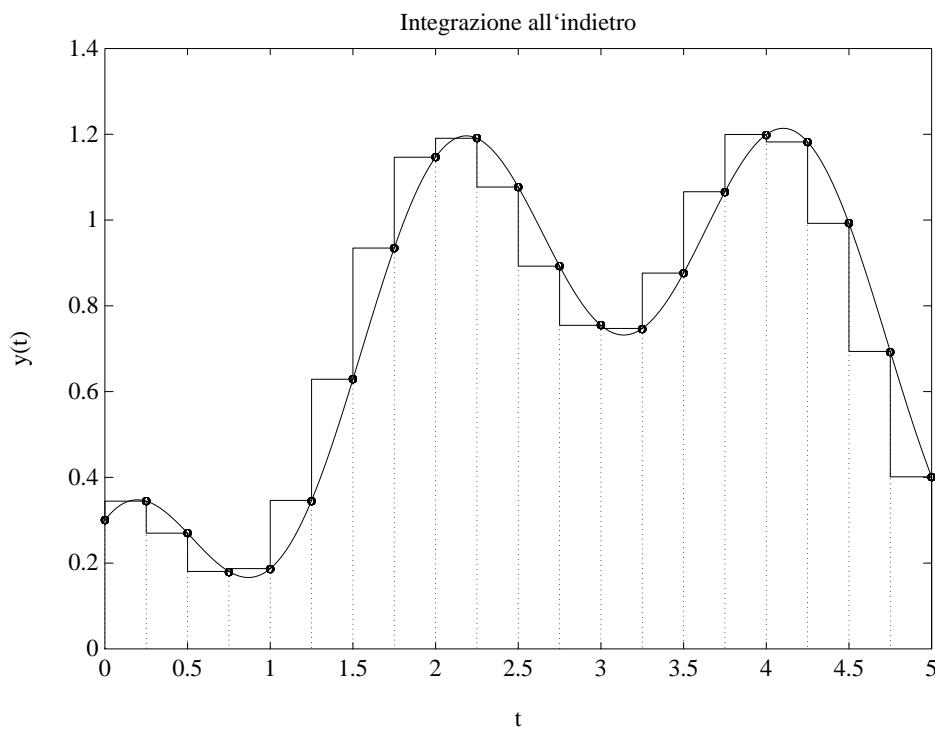
$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

- L'equazione alle differenze che descrive l'operazione di integrazione rettangolare all'indietro è la seguente:

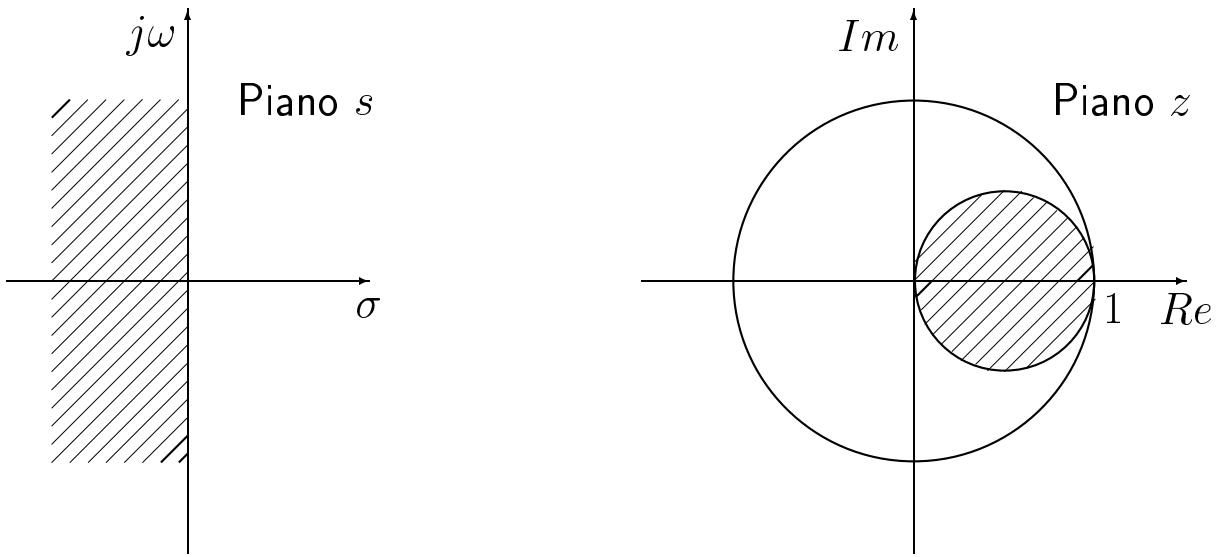
$$y(n) = y(n-1) + T x(n) \quad \leftrightarrow \quad Y(z) = \underbrace{\frac{T}{1 - z^{-1}}}_{G(z)} X(z)$$

dove con  $x(n)$  si è indicata la successione di ingresso e con  $y(n)$  la corrispondente successione integrale di uscita.

- Il legame  $s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$  nasce dal porre in corrispondenza l'integratore tempo continuo  $\frac{1}{s}$  con il corrispondente integratore discreto  $G(z)$  ottenuto per integrazione rettangolare all'indietro.



- Legame fra il piano  $s$  e il piano  $z$ :



- Per  $z = \sigma + j\omega$

$$Re \left( \frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega} \right) = Re \left( \frac{(\sigma + j\omega - 1)(\sigma - j\omega)}{\sigma^2 + \omega^2} \right) = \frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2}{\sigma^2 + \omega^2} < 0$$

$$(\sigma - \frac{1}{2})^2 + \omega^2 < \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

- Regolatori tempo continui  $D(s)$  stabili vengono trasformati in regolatori tempo discreti  $D(z)$  stabili.

Esempio. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete anticipatrice:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{1+s}{1+0.2s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.1$ .

[Soluzione.] Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(s) = \frac{1+s}{1+0.2s} = 5 \frac{s+1}{s+5} \quad \rightarrow \quad D(z) = D(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{5(1+T-z^{-1})}{1+5T-z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{5(1+T-z^{-1})}{1+5T-z^{-1}}$$

ottenendo

$$M(z)(1+5T-z^{-1}) = 5E(z)(1+T-z^{-1}) \quad \leftrightarrow \quad M(z)(1.5-z^{-1}) = E(z)(5.5-5z^{-1})$$

cioè

$$m(k) = \frac{1}{1.5} [m(k-1) + 5.5e(k) - 5e(k-1)]$$

da cui

$$m(k) = 0.666m(k-1) + 3.666e(k) - 3.333e(k-1)]$$

Esempio. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente funzione:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 2 \frac{s+2}{s+5}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.1$ .

[Soluzione.] Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene

$$D(z) = D(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = 2 \frac{1+2T-z^{-1}}{1+5T-z^{-1}} = 2 \frac{1.2-z^{-1}}{1.5-z^{-1}}$$

Il calcolo della corrispondente equazione alle differenze è immediato

$$m(n) = \frac{1}{1.5} [m(n-1) + 2.4e(n) - 2e(n-1)]$$

## 2. METODO DELLE DIFFERENZE IN AVANTI

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

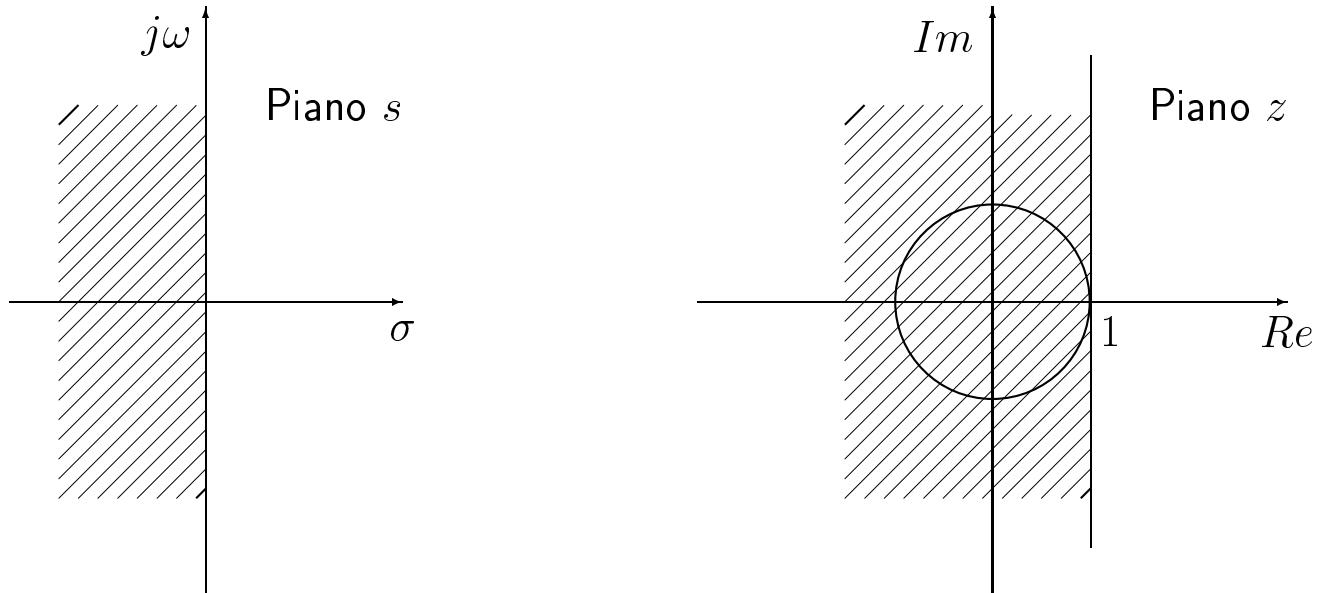
- Esempio

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt \approx Ty((k-1)T), \quad \int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt \approx Tx((k-1)T)$$

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT[y((k-1)T) - x((k-1)T)]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{aTz^{-1}}{1 - (1 - aT)z^{-1}} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} + a}$$

$$Re(s) = Re\left(\frac{z-1}{T}\right) < 0 \quad \rightarrow \quad Re(z) < 1$$



- Un regolatore stabile  $D(s)$  può trasformarsi in un regolatore instabile  $D(z)$ .

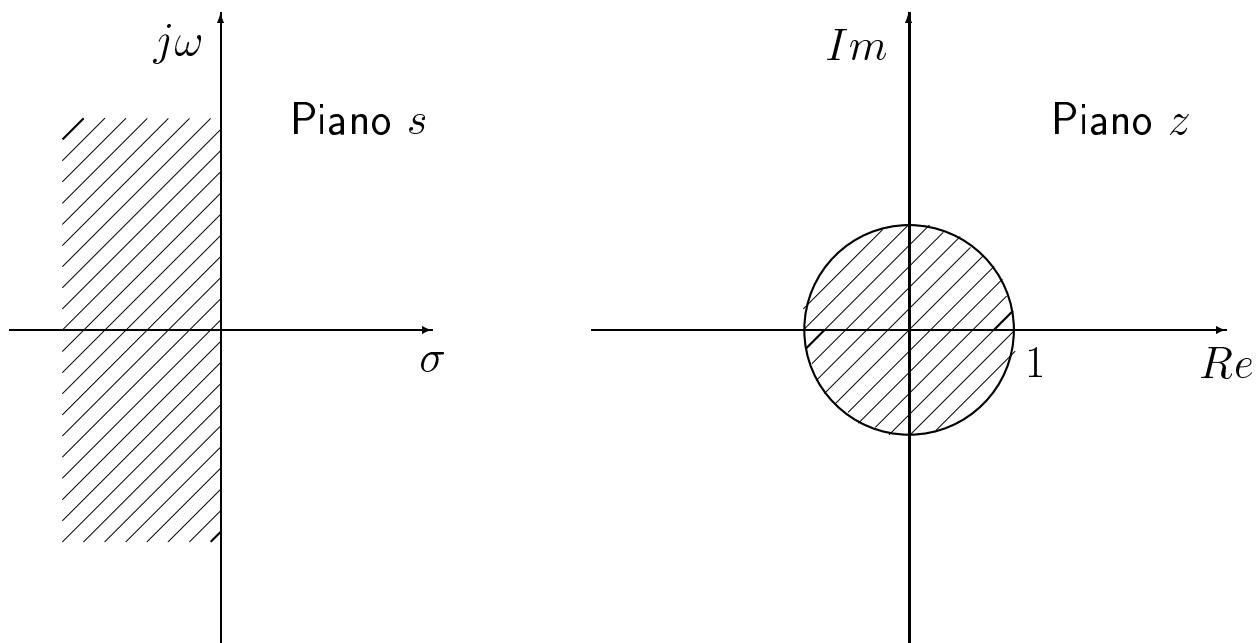
### 3. TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

- detta anche integrazione trapezoidale (o di Tustin)

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \approx \frac{[y(kT) + y((k-1)T)]T}{2}$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx \frac{[x(kT) + x((k-1)T)]T}{2}$$

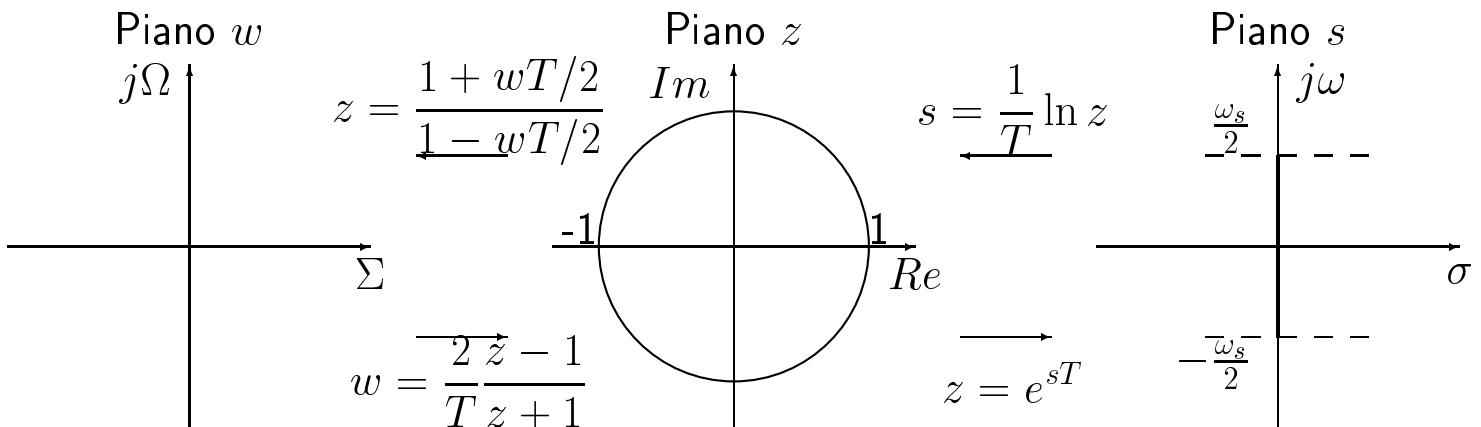


$$\operatorname{Re} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) < 0$$

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1} \right) = \operatorname{Re} \left[ \frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + j2\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} \right] < 0$$

$$\sigma^2 + \omega^2 < 1$$

- Relazione frequenziale tra il piano  $w$ , il piano  $z$  ed il piano  $s$



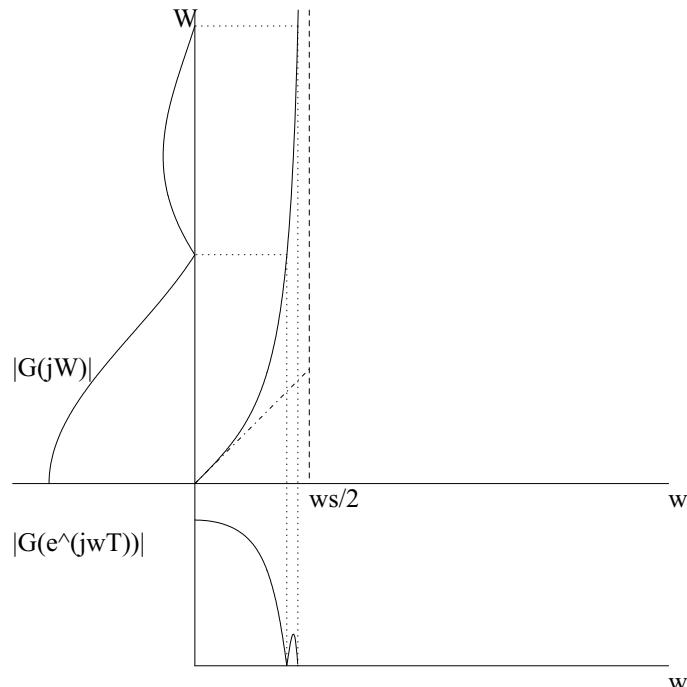
- La trasformazione non genera sovrapposizione frequenziale, ma introduce distorsioni

$$\begin{aligned}
 j\Omega &= \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}} \\
 &= \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} = \frac{2}{T} \frac{2j \sin \omega T/2}{2 \cos \omega T/2} \\
 &= j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}
 \end{aligned}$$

$$D_c(j\Omega) = D_d(e^{j\omega T})$$

per

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$



Esempio. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare il seguente regolatore PI:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.2$ .

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{10(1-z^{-1}) + (1+z^{-1})}{10(1-z^{-1})} = \frac{11-9z^{-1}}{10(1-z^{-1})}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(1-z^{-1}) = \frac{E(z)}{10}(11-9z^{-1})$$

da cui si ottiene

$$m(k) = m(k-1) + 1.1e(k) - 0.9e(k-1)$$

Esempio. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare la seguente funzione di trasferimento:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 2 \frac{(1+0.25s)}{(1+0.1s)}$$

Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.05$ .

[Soluzione.] La funzione di trasferimento da discretizzare è la seguente:

$$D(s) = 2 \frac{(1+0.25s)}{(1+0.1s)} = 5 \frac{(s+4)}{(s+10)}$$

Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene ( $T = 0.05$ )

$$D(z) = 5 \frac{(s+4)}{(s+10)} \Big|_s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = 4.4 \frac{z-\frac{9}{11}}{z-\frac{3}{5}} = 4.4 \frac{1-0.8182z^{-1}}{1-0.6z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$(1-0.6z^{-1})M(z) = 4.4(1-0.8182z^{-1})E(z)$$

da cui si ottiene

$$m(k) = 0.6m(k-1) + 4.4e(k) - 3.6e(k-1)$$

## 4. TRASFORMAZIONE BILINEARE CON PRECOMPENSAZIONE

$$s = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{z - 1}{z + 1}$$

- Per  $\Omega = \omega_1$  si ha  $\omega = \omega_1$

- Esempio

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

- Precompensazione alla frequenza  $\omega = a$

$$s = \frac{a}{\tan \frac{aT}{2}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$G_d(z) = \frac{\tan \frac{aT}{2} (1 + z^{-1})}{(\tan \frac{aT}{2} - 1)z^{-1} + (\tan \frac{aT}{2} + 1)}$$

- Esempio. Progettare un filtro passa basso discreto che approssimi il comportamento frequenziale nella banda  $[0, 10] \text{rad/s}$  del filtro analogico

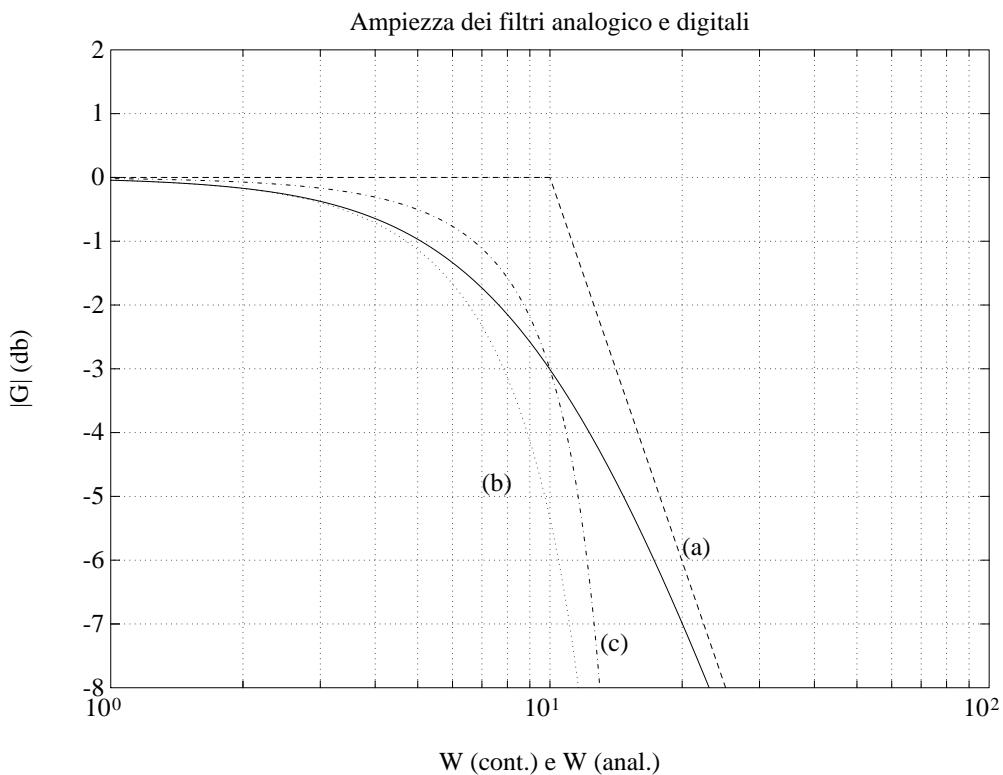
$$G(s) = \frac{10}{s + 10} \quad \text{con} \quad T = 0.2 \text{ s}$$

$$G_d(z) = \frac{10}{\frac{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{1+z^{-1}} + 10} = \frac{1 + z^{-1}}{2}$$

$$G_d(e^{j\omega T}) = \frac{10}{j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} + 10} = \frac{1}{j \tan 0.1\omega + 1}$$

- Utilizzando la precompensazione di frequenza per  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , si ottiene

$$G_d(z) = \frac{10}{\frac{10}{\tan \frac{10T}{2}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 10} = \frac{0.609(1 + z^{-1})}{1 + 0.218z^{-1}}$$



## 5. METODO DELLA $\mathcal{Z}$ -TRASFORMATA

$$D(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[D(s)]]$$

- Invarianza della risposta all'impulso
- Possibilità di aliasing
- Da  $D(s)$  stabili a  $D(z)$  stabili

## 6. METODO DELLA $\mathcal{Z}$ -TRASFORMATA CON RICOSTRUTTORE DI ORDINE 0 o dell'invarianza alla risposta al gradino

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[D(z)\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[D(s)\frac{1}{s}\right]_{t=kT}$$

$$D(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{D(s)}{s}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-sT}}{s}D(s)\right]$$

- Possibilità di aliasing
- Da  $D(s)$  stabili a  $D(z)$  stabili

Esempio. Utilizzando il metodo della  $\mathcal{Z}$  trasformata con ricostruttore di ordine zero, discretizzare la funzione:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{s+2}{s+5}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.1$ .

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della  $\mathcal{Z}$  trasformata con ricostruttore di ordine zero, la discretizzazione del regolatore  $D(s)$  procede nel seguente modo:

$$D(z) = \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{s+2}{s+5} \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{s+2}{s(s+5)} \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{2}{5s} + \frac{3}{5(s+5)} \right]$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} D(z) &= (1 - z^{-1}) \left[ \frac{2}{5(1 - z^{-1})} + \frac{3}{5(1 - e^{-5T}z^{-1})} \right] \\ &= \frac{2(1 - e^{-5T}z^{-1}) + 3(1 - z^{-1})}{5(1 - e^{-5T}z^{-1})} \\ &= \frac{5 - (3 + 2e^{-5T})z^{-1}}{5(1 - e^{-5T}z^{-1})} = \frac{5 - 4.213z^{-1}}{5(1 - 0.6065z^{-1})} \end{aligned}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(5 - 3.0325z^{-1}) = E(z)(5 - 4.213z^{-1})$$

da cui

$$m(k) = \frac{1}{5}[3.0325m(k-1) + 5e(k) - 4.213e(k-1)]$$

cioè

$$m(k) = 0.6065m(k-1) + e(k) - 0.8426e(k-1)$$

## 7. METODO DELLA CORRISPONDENZA POLI/ZERI

- Si fattorizza numeratore e denominatore di  $D(s)$
- Trasformazione dei poli e zeri

$$(s + a) \rightarrow (1 - e^{-aT} z^{-1})$$

$$(s + a \pm jb) \rightarrow (1 - 2e^{-aT} \cos bT z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2})$$

- Si introducono zeri in  $z = -1$  in numero pari al grado relativo
- Si aggiusta il guadagno alle basse ( $z = 1$ ) o alle alte ( $z = -1$ ) frequenze
- Esempio

$$D(s) = \frac{s + b}{s + a} \rightarrow D(z) = k \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}}$$

$$D(z = 1) = k \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}} = D(s = 0) = \frac{b}{a}$$

$$k = \frac{b}{a} \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}}$$

- Esempio. Filtro passa alto

$$D(s) = \frac{s}{s + a}$$

$$D(z) = k \frac{z - 1}{z - e^{-aT}} \quad k = \frac{1 + e^{-aT}}{2}$$

- Esempio

$$D(s) = \frac{1}{(s + a)^2 + b^2} = \frac{1}{(s + a + jb)(s + a - jb)}$$

- Eccesso poli-zeri uguale a 2

$$D(z) = k \frac{(z + 1)^2}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}$$

$$k = \frac{1 - 2e^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}{4(a^2 + b^2)}$$

Esempio. Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri, discretizzare il seguente regolatore PI:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.2$  e si imponga l'uguaglianza dei guadagni alle alte frequenze.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri si ottiene

$$D(s) = \frac{s+1}{s} \quad \rightarrow \quad D(z) = k \frac{1 - e^{-T} z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Big|_{T=0.2} = k \frac{1 - 0.8187 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Il valore di  $k$  si calcola imponendo l'uguaglianza dei guadagni alle elevate frequenze

$$D(s)|_{s \rightarrow \infty} = D(z)|_{z=-1} \quad \leftrightarrow \quad 1 = k \frac{1 + e^{-T}}{2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{2}{1.8187} = 1.1$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(1 - z^{-1}) = kE(z)(1 - 0.8187 z^{-1})$$

ottenendo

$$m(k) = m(k-1) + k e(k) - k 0.8187 e(k-1)$$

da cui

$$m(k) = m(k-1) + 1.1 e(k) - 0.9 e(k-1)$$

Esempio. Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri, discretizzare la seguente funzione di trasferimento:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{s+3}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.1$ .

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri si ottiene

$$D(s) = \frac{s+1}{s+3} \quad \rightarrow \quad D(z) = k \frac{1 - e^{-T} z^{-1}}{1 - e^{-3T} z^{-1}} \Big|_{T=0.1} = k \frac{1 - 0.905 z^{-1}}{1 - 0.741 z^{-1}}$$

Il valore di  $k$  si calcola imponendo l'uguaglianza dei guadagni statici

$$D(s)|_{s=0} = D(z)|_{z=1} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{3} = k \frac{1 - e^{-T}}{1 - e^{-3T}} \quad \rightarrow \quad k = \frac{1 - e^{-3T}}{3(1 - e^{-T})} = 0.908$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(1 - 0.741 z^{-1}) = kE(z)(1 - 0.905 z^{-1})$$

ottenendo

$$m(k) = 0.741m(k-1) + ke(k) - k0.905e(k-1)$$

da cui

$$m(k) = 0.741m(k-1) + 0.908e(k) - 0.821e(k-1)$$

Esempio. Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri discretizzare la rete anticipatrice

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzino i seguenti parametri:  $\tau = 1$ ,  $\alpha = 0.2$  e  $T = 0.1$ .

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri si ottiene

$$D(s) = \frac{1+s}{1+0.2s} = 5 \frac{s+1}{s+5} \quad \rightarrow \quad D(z) = k \frac{1-e^{-T}z^{-1}}{1-e^{-5T}z^{-1}} \Big|_{T=0.1} = k \frac{1-0.905z^{-1}}{1-0.606z^{-1}}$$

Il valore di  $k$  si calcola imponendo l'ugualanza dei guadagni statici

$$D(s)|_{s=0} = D(z)|_{z=1} \quad \leftrightarrow \quad 1 = k \frac{1-e^{-T}}{1-e^{-5T}} \quad \rightarrow \quad k = \frac{1-e^{-5T}}{1-e^{-T}} = 4.135$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = k \frac{1-0.905z^{-1}}{1-0.606z^{-1}}$$

ottenendo

$$M(z)(1-0.606z^{-1}) = kE(z)(1-0.905z^{-1})$$

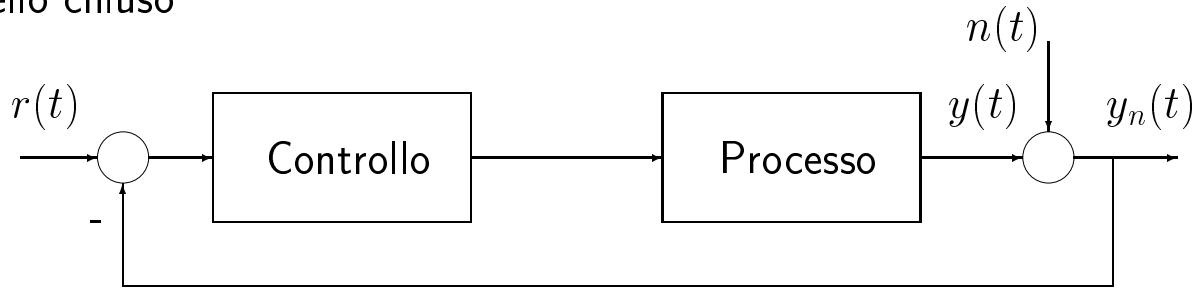
cioè

$$m(k) = 0.606m(k-1) + ke(k) - k0.905e(k-1)$$

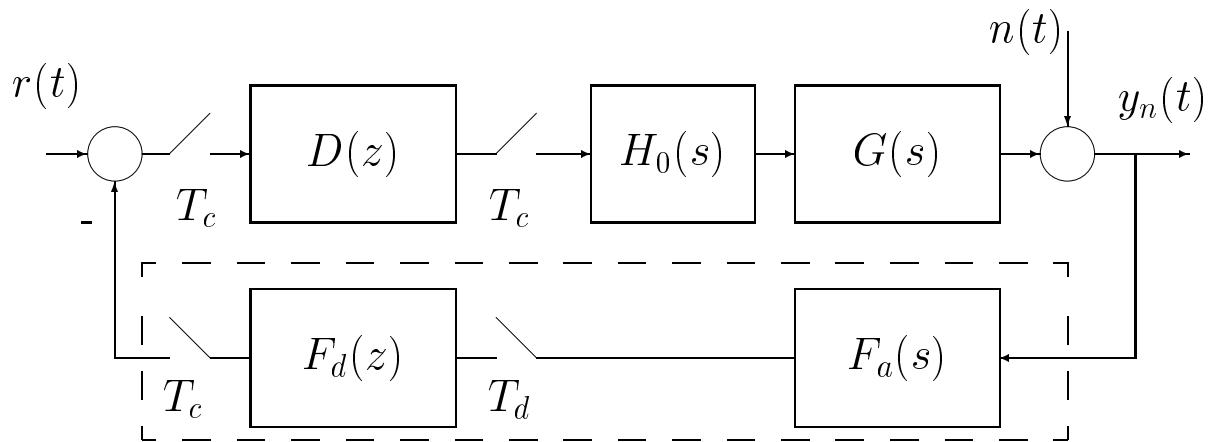
da cui

$$m(k) = 0.606m(k-1) + 4.135e(k) - 3.742e(k-1)$$

- Filtraggio antialiasing
- L'aliasing prodotto dal campionamento introduce componenti di segnale non desiderate a basse frequenze, ossia nella banda del segnale utile in anello chiuso

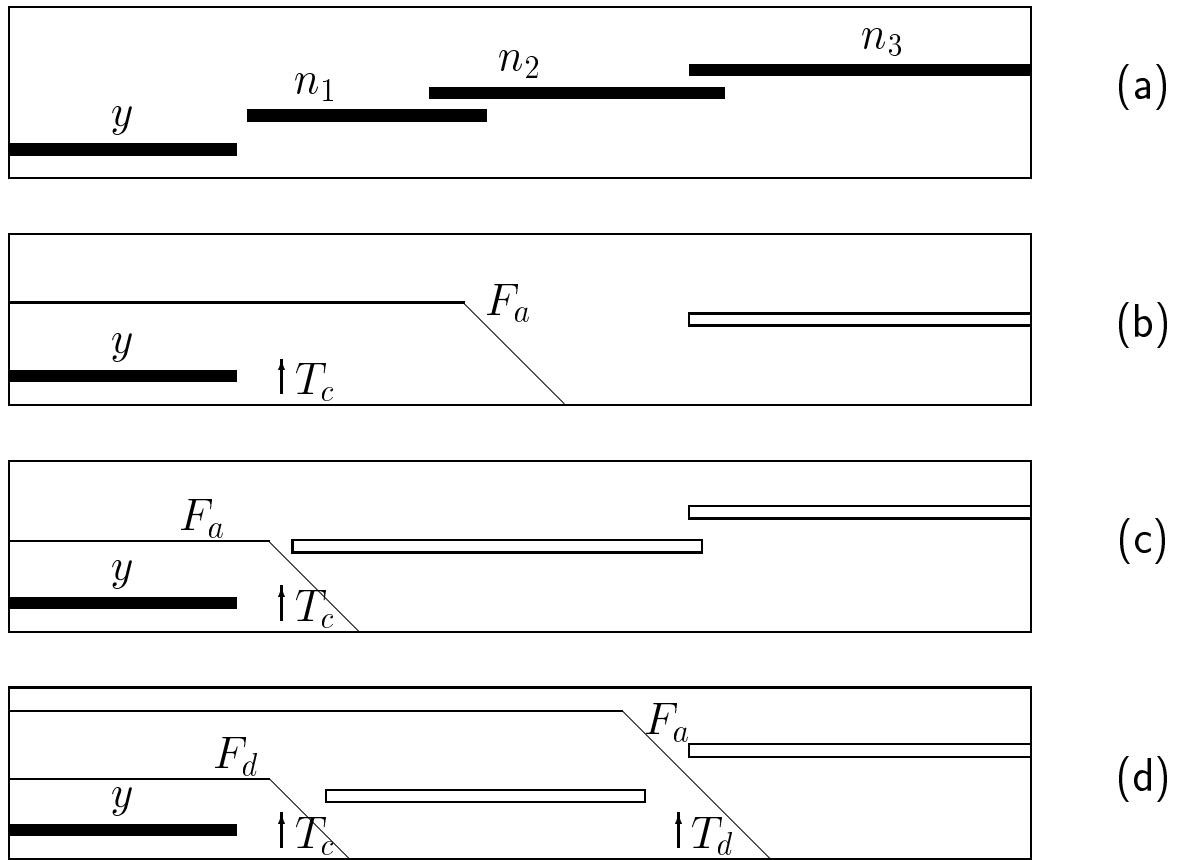


- È necessario introdurre opportuni filtri che eliminano il più possibile, prima del campionamento, il segnale di rumore
- Natura e banda di frequenza del rumore
- Complessità realizzativa
- Potenza di calcolo a disposizione



- Filtri di tipo analogico: passivi o attivi

- Diversi casi di filtraggio e di rumori presenti nel sistema



- Filtraggio analogico
- Filtri RC (del primo ordine)
- Pendenza di 20 db per decade
- È bene che l'azione filtrante non interessi la zona di segnale utile, per mantenere la prontezza del sistema

- Filtraggio digitale
- Periodo di campionamento minore di quello di controllo
- Filtro di media oppure filtro per discretizzazione
- Filtro di media:

$$y(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u(k-i)$$

con periodo di acquisizione

$$T_d = \frac{T_c}{N}$$

- Discretizzazione di un filtro analogico
- Esempio. Filtro del primo ordine:

$$F(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

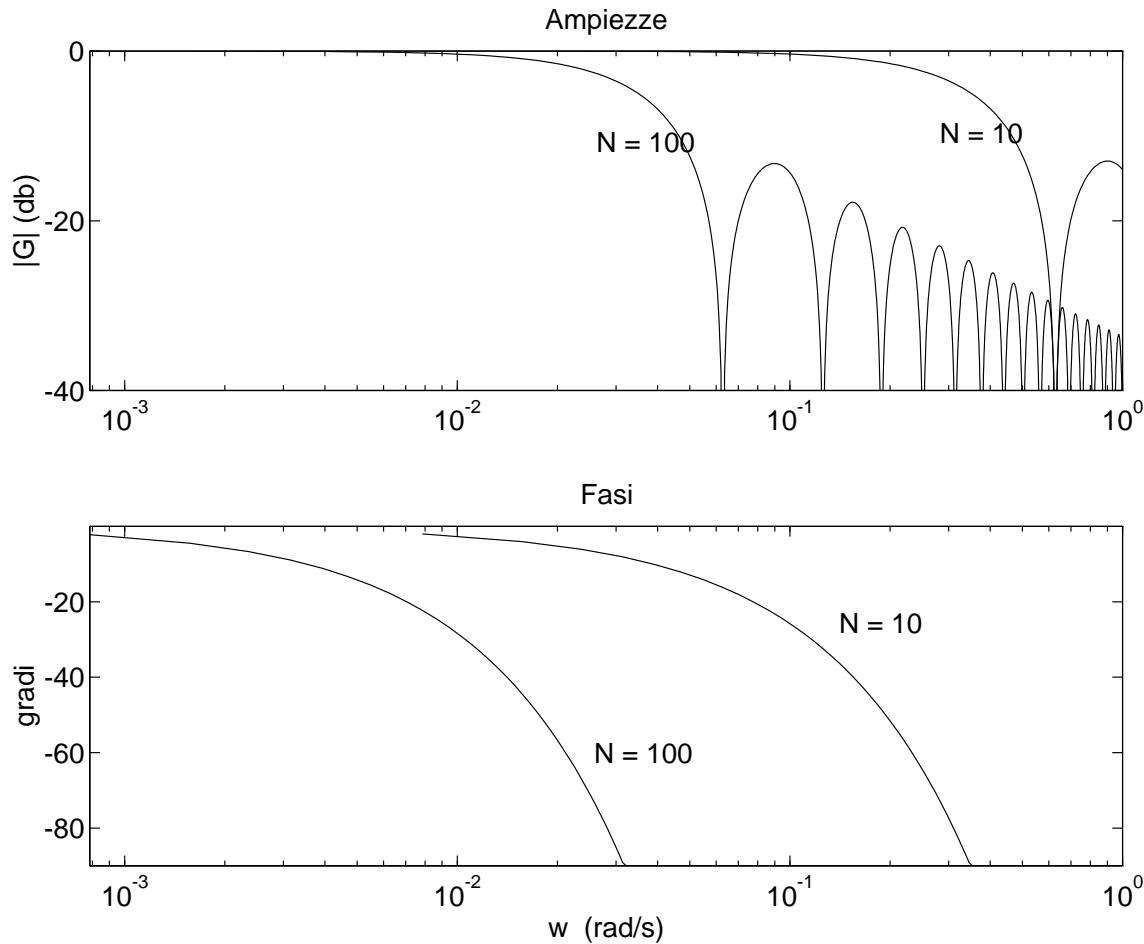
- Con il metodo delle differenze all'indietro:

$$F(z) = \frac{T_d/\tau}{(T_d/\tau) - z^{-1}}$$

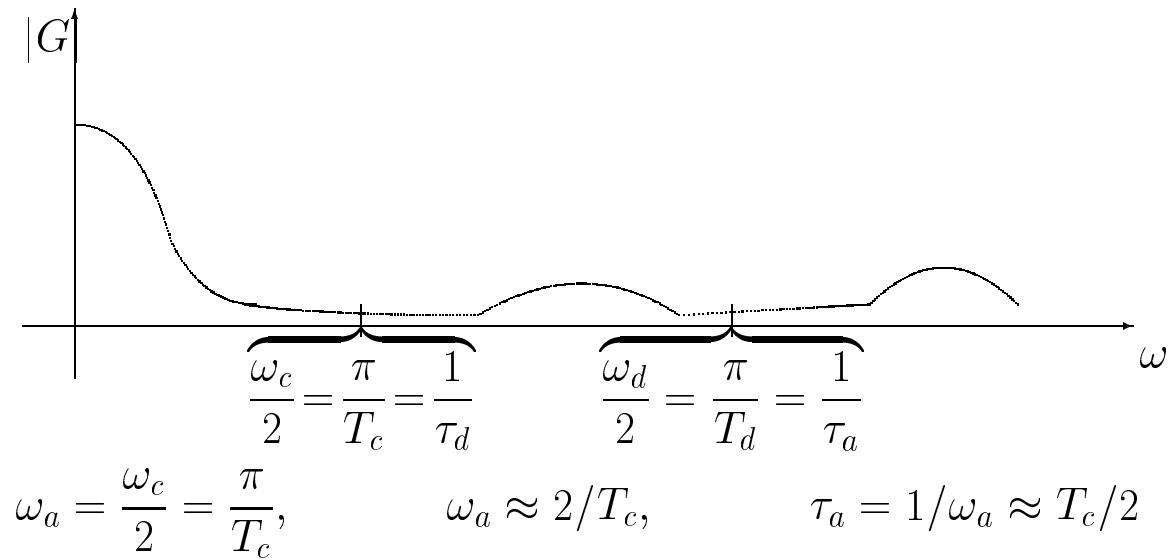
- Con il metodo della corrispondenza poli/zeri:

$$F(z) = \frac{1 - e^{-T_d/\tau}}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - e^{-T_d/\tau} z^{-1}}$$

- Diagrammi di Bode di due filtri di media

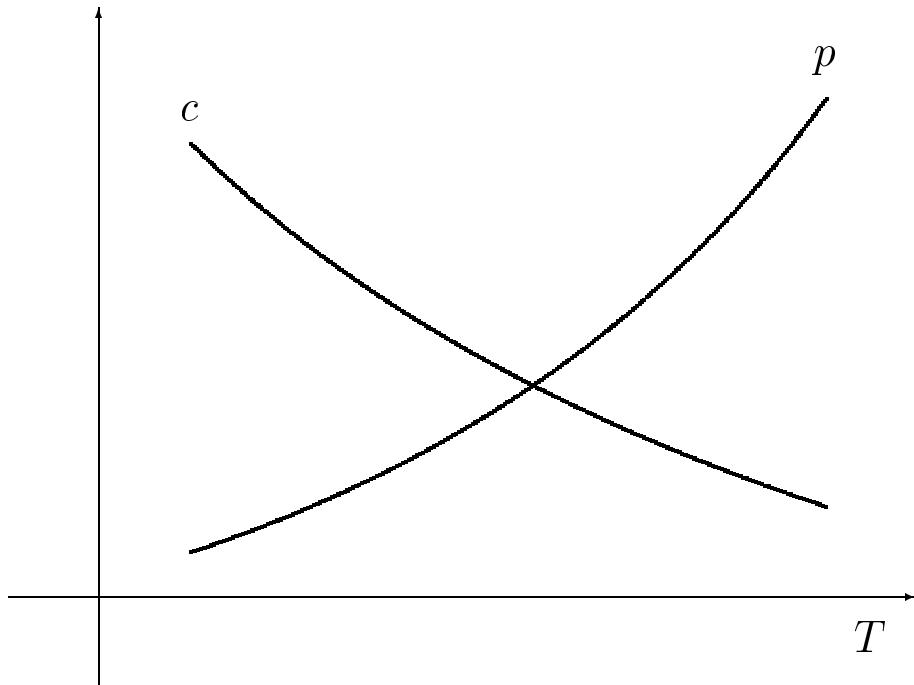


- Scelta delle costanti di tempo del filtro analogico, e dell'eventuale filtro digitale



- $\tau_d \approx T_c/2$ , mentre la costante di tempo del filtro analogico  $\tau_a$  deve essere rapportata al periodo di campionamento del filtro, come  $\tau_a \approx T_d/2$

- Considerazioni riassuntive sulla scelta del periodo di campionamento



- Prestazioni

- reiezione dei disturbi
- inseguimento del set-point
- energia di controllo
- ritardi e stabilità
- robustezza alle variazioni parametriche

- Costo

- sfruttamento della capacità elaborativa
- velocità di conversione
- velocità di elaborazione
- precisione nella memorizzazione dei parametri e delle variabili