

Campionamento ideale

- Si consideri il seguente sistema tempo continuo;

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 2s + 5}$$

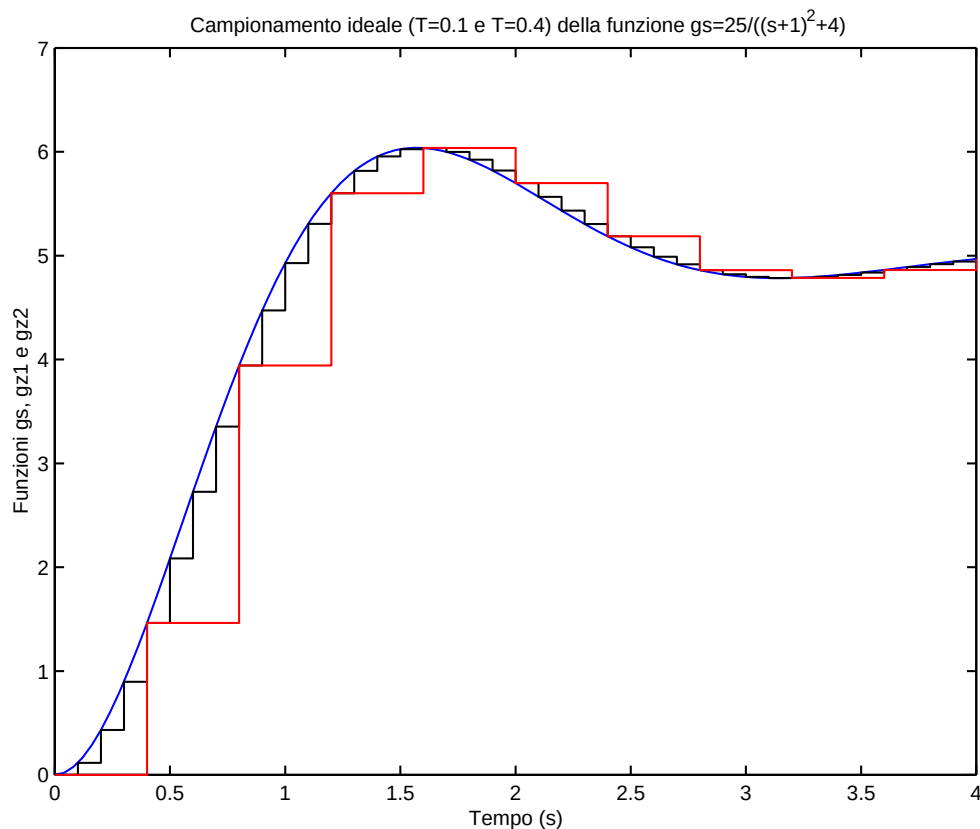
- Se si discretizza questa funzione utilizzando il periodo di campionamento $T = 0.1$ si ottiene la funzione:

$$G_1(z) = \mathcal{Z}[G(s)]_{T=0.1} = \frac{0.1166z + 0.1091}{z^2 - 1.774z + 0.8187}$$

- Utilizzando invece il periodo di campionamento $T = 0.4$ si ottiene la seguente funzione:

$$G_2(z) = \mathcal{Z}[G(s)]_{T=0.4} = \frac{1.463z + 1.114}{z^2 - 0.934z + 0.4493}$$

- Risposta al gradino unitario delle 3 funzioni $G(s)$, $G_1(z)$ e $G_2(z)$:



- Si noti l'esatta coincidenza delle 3 risposte al gradino negli istanti di campionamento.

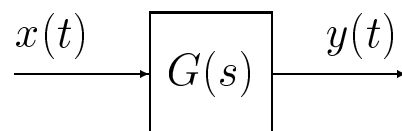
Regolatore discreto proporzionale

- Si consideri il seguente sistema:

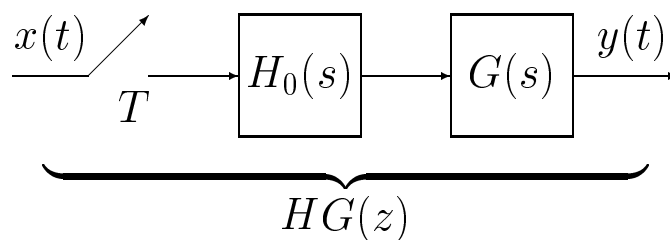
$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+10)}$$

Si metta a confronto funzione di risposta armonica dei seguenti 3 sistemi:

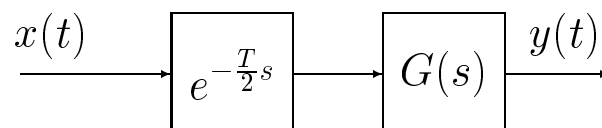
- 1) Il sistema $G(s)$:



- 2) Il sistema $HG(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]$ ottenuto inserendo un campionatore e un ricostruttore di ordine zero in cascata al sistema $G(s)$:

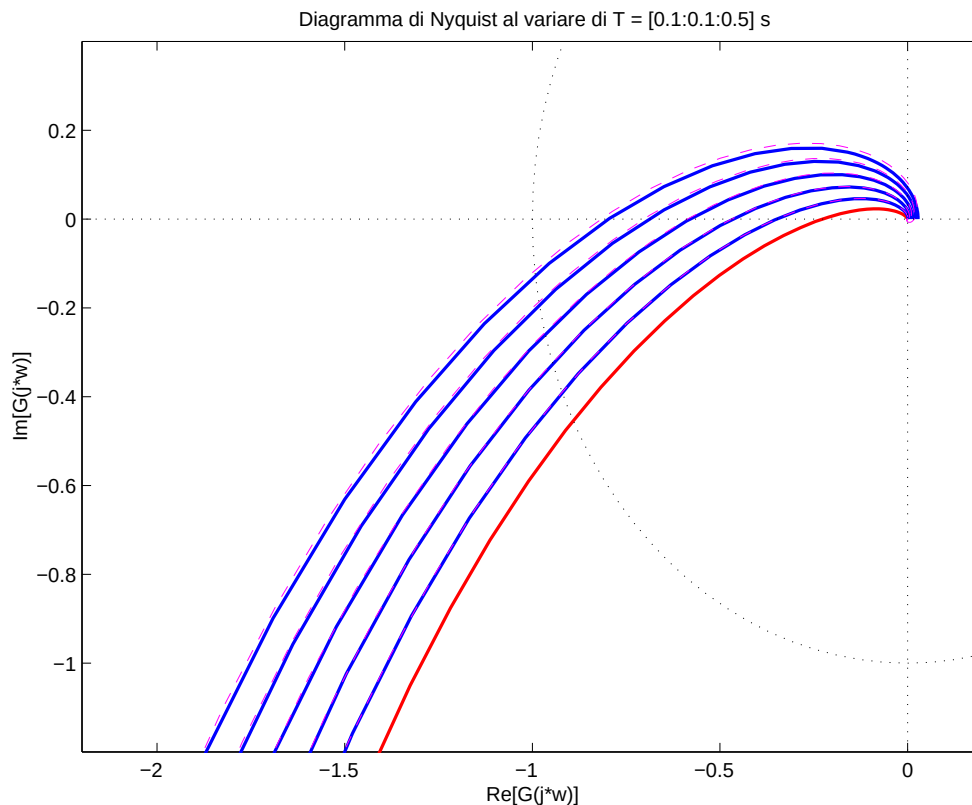


- 3) Il sistema $G(s)e^{-\frac{T}{2}s}$ ottenuto sostituendo la cascata del campionatore e del ricostruttore di ordine zero con un ritardo puro $e^{-\frac{T}{2}s}$ pari a metà del periodo di campionamento T :



- La funzione $HG(z, T) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]$ che si ottiene discretizzando il sistema $G(s)$ posto in cascata con il ricostruttore di ordine zero $H_0(s)$ è funzione del periodo di campionamento T .

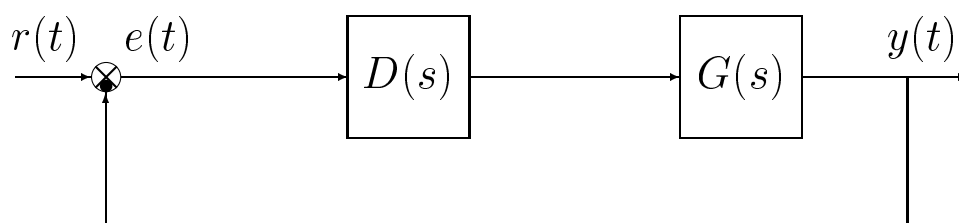
- Diagrammi di Nyquist dei sistemi $G(s)$, $HG(z, T)$ e $G(s)e^{-\frac{T}{2}s}$ per $T \in [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]$:



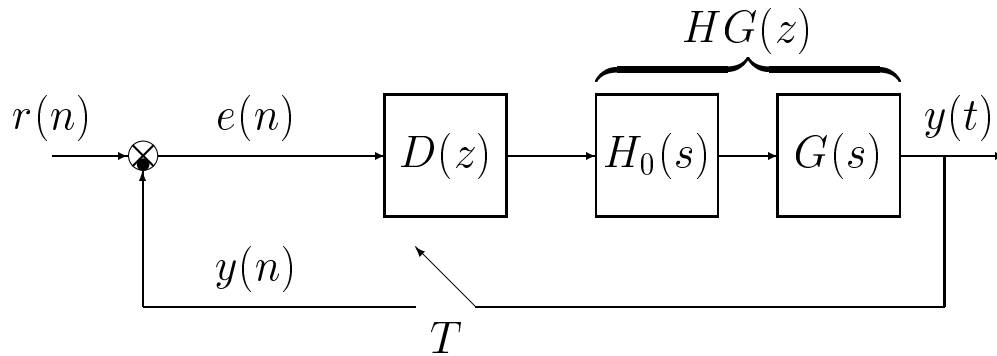
- Si noti come all'aumentare del periodo di campionamento T si ha un aumento dello sfasamento presente all'interno del sistema e quindi una riduzione dei margini di stabilità.
- Dai diagrammi di Nyquist sopra riportati è evidente che per basse pulsazioni la cascata del campionatore e del ricostruttore di ordine zero può essere ben approssimata da un ritardo puro:

$$\xrightarrow[T]{} \boxed{H_0(s)} \rightarrow \simeq e^{-\frac{T}{2}s}$$

- Si metta ora a confronto il sistema retroazionato tempo continuo:



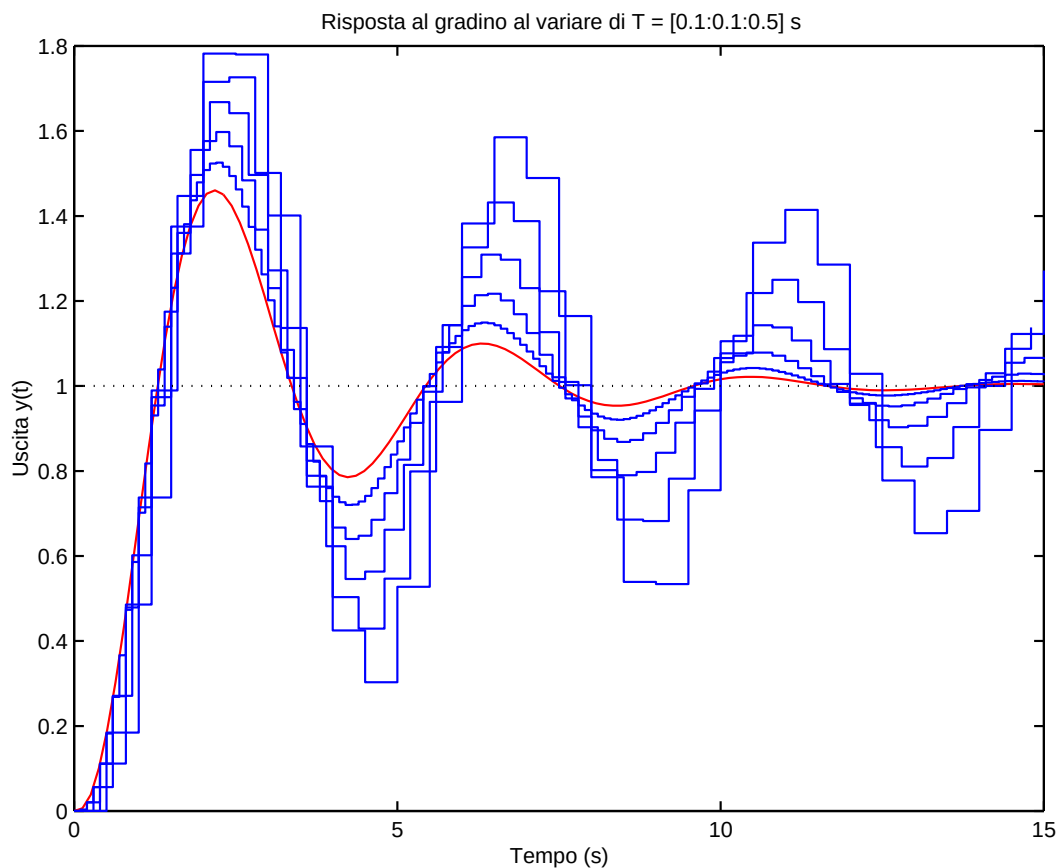
con il corrispondente sistema tempo discreto:



- Funzioni di trasferimento $G_0(s)$ e $G_0(z)$ dei due sistemi retroazionati:

$$G_0(s) = \frac{D(s) G(s)}{1 + D(s) G(s)}, \quad G_0(z) = \frac{D(z) HG(z)}{1 + D(z) HG(z)}$$

- Risposta al gradino dei sistemi $G(s)$ e $HG(z, T)$ posti in retroazione unitaria per $T \in [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]$ quando $D(s) = D(z) = 1$:



- All'aumentare del periodo di campionamento si hanno risposte al gradino sempre meno smorzate e con una sovraelongazione sempre più elevata.

Confronto tra diversi metodi di discretizzazione

- Si consideri il seguente sistema:

$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+10)}$$

e per esso si progetti una opportuna rete correttrice (anticipatrice):

$$D(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{1 + 0.806 s}{1 + 0.117 s}$$

che migliori la risposta al gradino del corrispondente sistema retroazionato.

- La funzione di trasferimento $D(s)$ può essere discretizzata utilizzando diversi metodi approssimati:

- 1) differenze all'indietro:

$$D_1(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T + \tau_1 - \tau_1 z^{-1}}{T + \tau_2 - \tau_2 z^{-1}}$$

- 2) differenze all'avanti:

$$D_2(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{\tau_1 + (T - \tau_1) z^{-1}}{\tau_2 + (T - \tau_2) z^{-1}}$$

- 3) trasformazione bilineare:

$$D_3(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{T + 2\tau_1 + (T - 2\tau_1) z^{-1}}{T + 2\tau_2 + (T - 2\tau_2) z^{-1}}$$

- 4) corrispondenza poli-zeri:

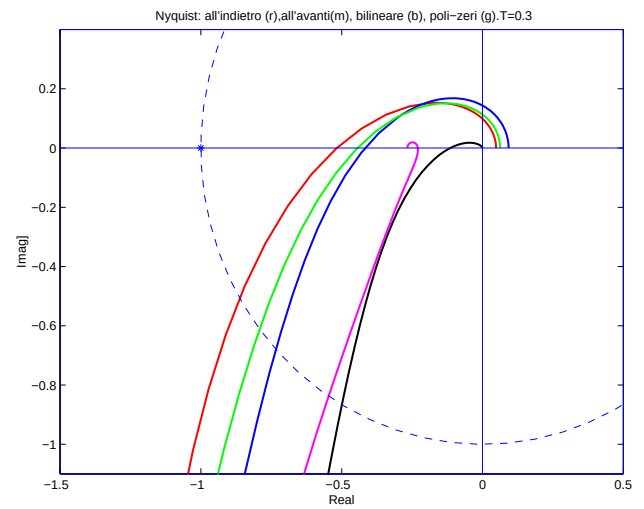
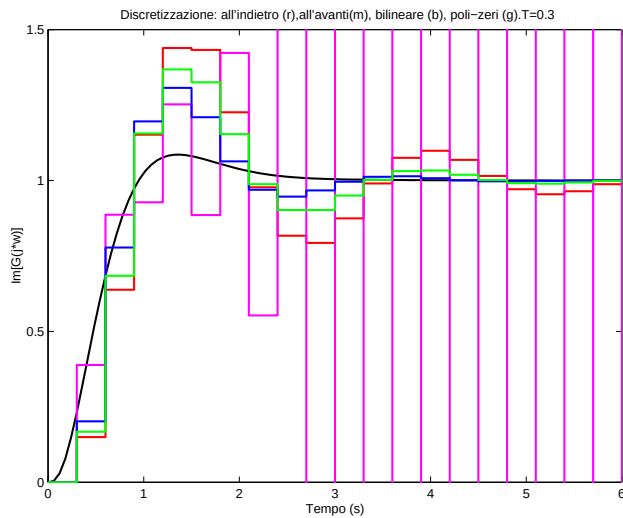
$$D(s) \rightarrow D_4(z) = \frac{(1 - \beta) - \alpha (1 - \beta) z^{-1}}{(1 - \alpha) - \beta (1 - \alpha) z^{-1}}$$

dove

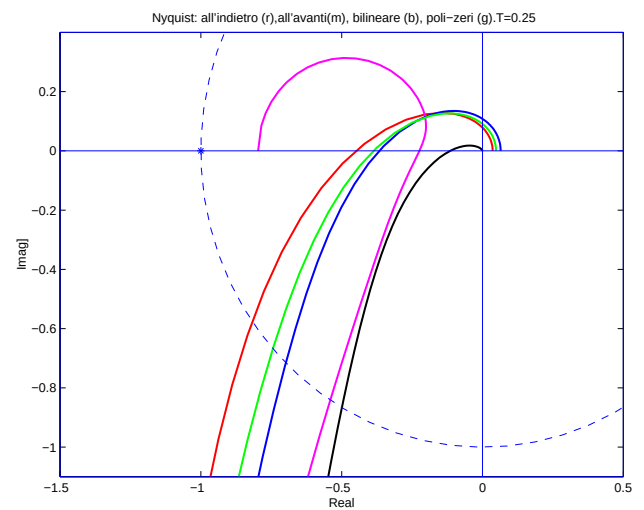
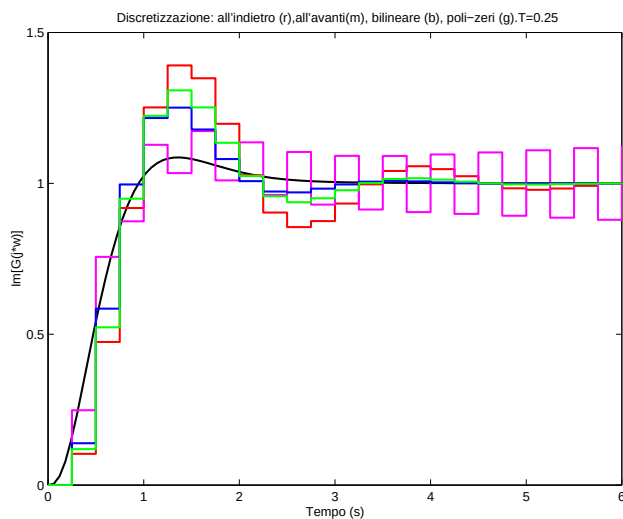
$$\alpha = e^{-\frac{T}{\tau_1}}, \quad \beta = e^{-\frac{T}{\tau_2}}$$

- Si noti che il regolatore $D_2(z)$ è stabile solo quando $T < 2\tau_2$ mentre gli altri 3 regolatori sono stabili per qualunque valore di $T > 0$.

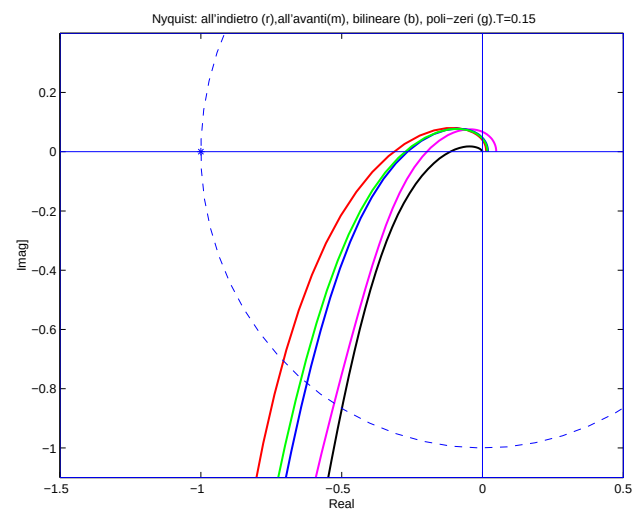
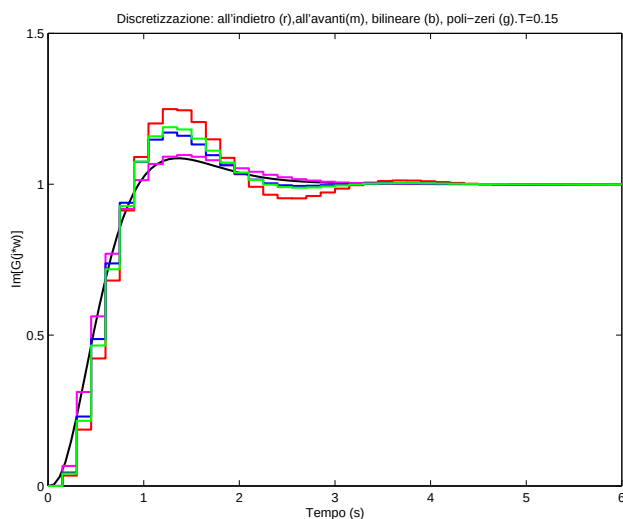
- Risposte al gradino del sistema retroazionato e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.3$ e utilizzando i vari metodi di discretizzazione:



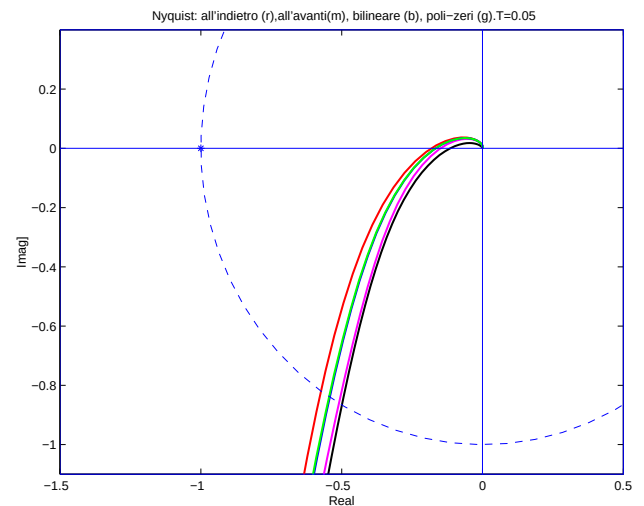
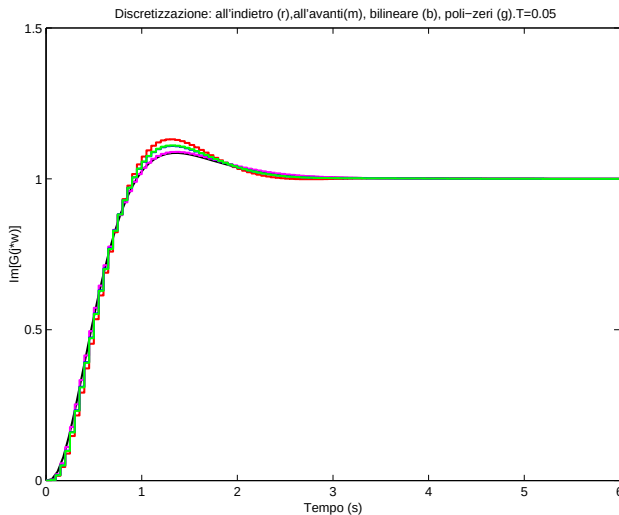
- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.25$:



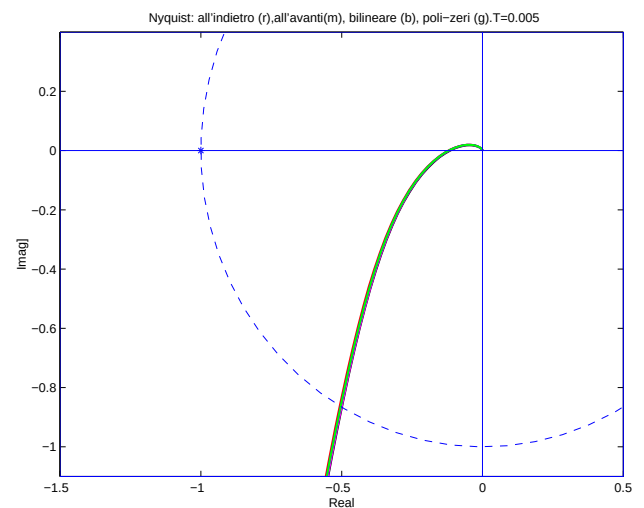
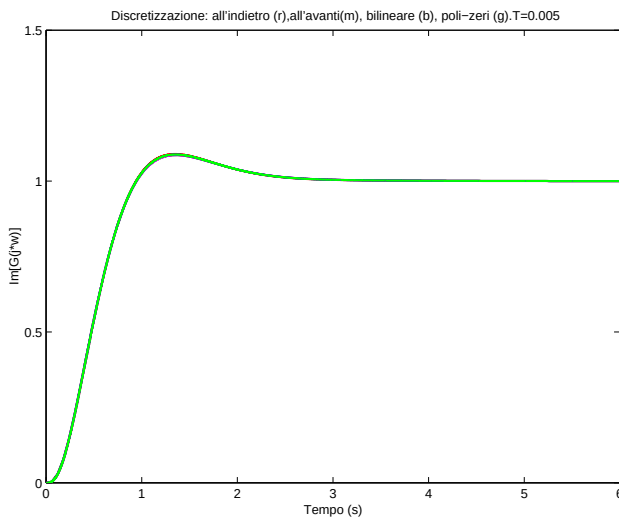
- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.15$:



- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.05$:



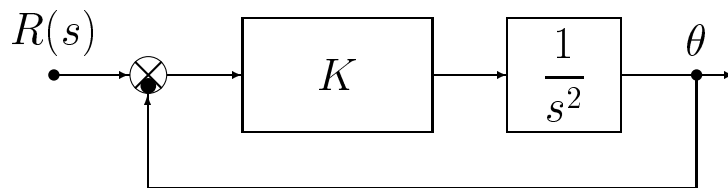
- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.005$:



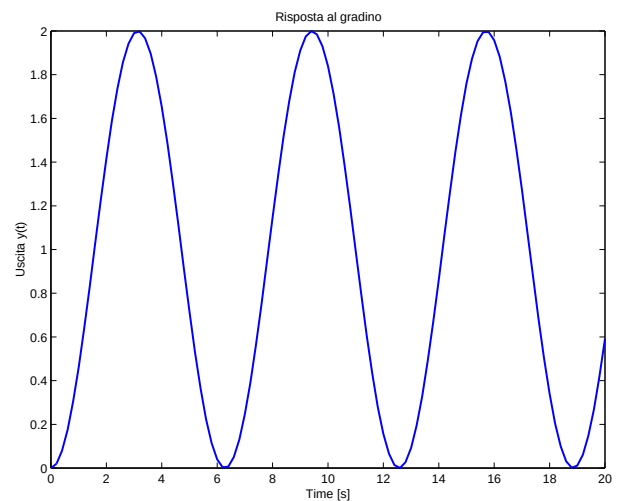
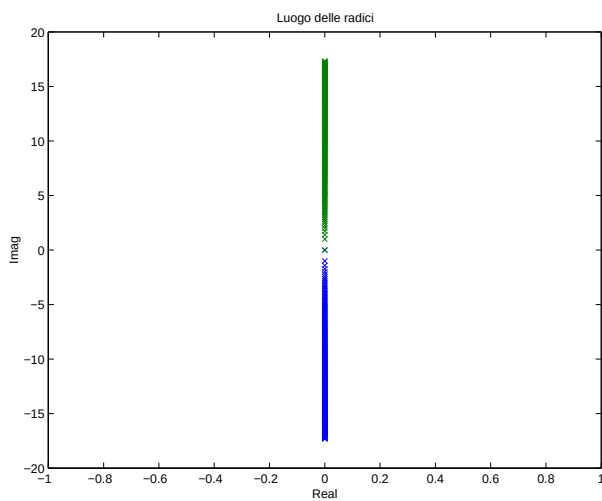
- Per periodi di campionamento così piccoli i regolatori discreti hanno tutti un comportamento sostanzialmente equivalente.

Esercizio: controllo di un doppio integratore

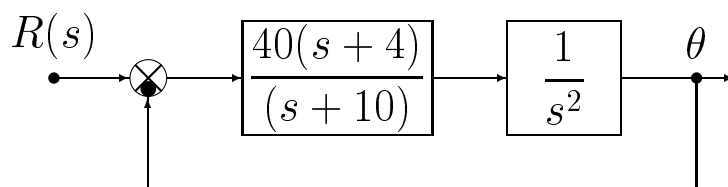
- Luogo delle radici al variare del guadagno K :



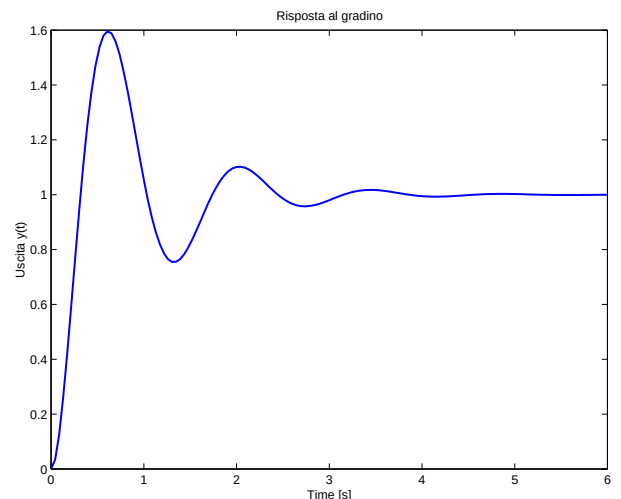
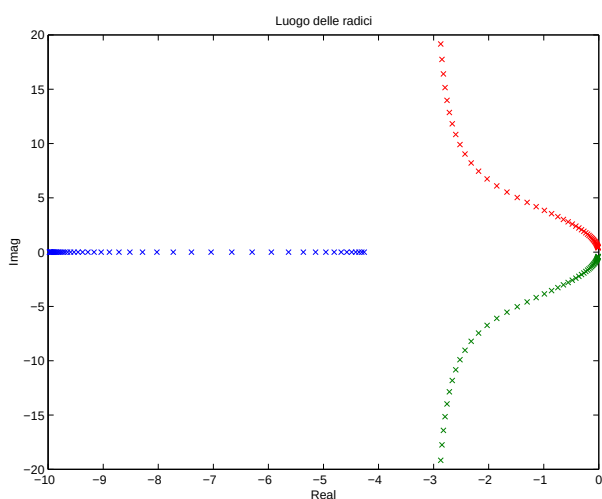
- Il sistema retroazionato è semplicemente stabile per tutti i valori di $K > 0$.



- Il sistema può essere stabilizzato utilizzando una rete anticipatrice:



- Luogo delle radici e risposta al gradino del sistema retroazionato:



- Sia $T = 0.03 \text{ s}$. La discretizzazione del regolatore

$$D(s) = \frac{40(s + 4)}{(s + 10)}$$

può essere fatta utilizzando vari metodi:

- 1) metodo delle differenze all'indietro:

$$D_1(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{4.48 - 4 z^{-1}}{0.13 - 0.1 z^{-1}}$$

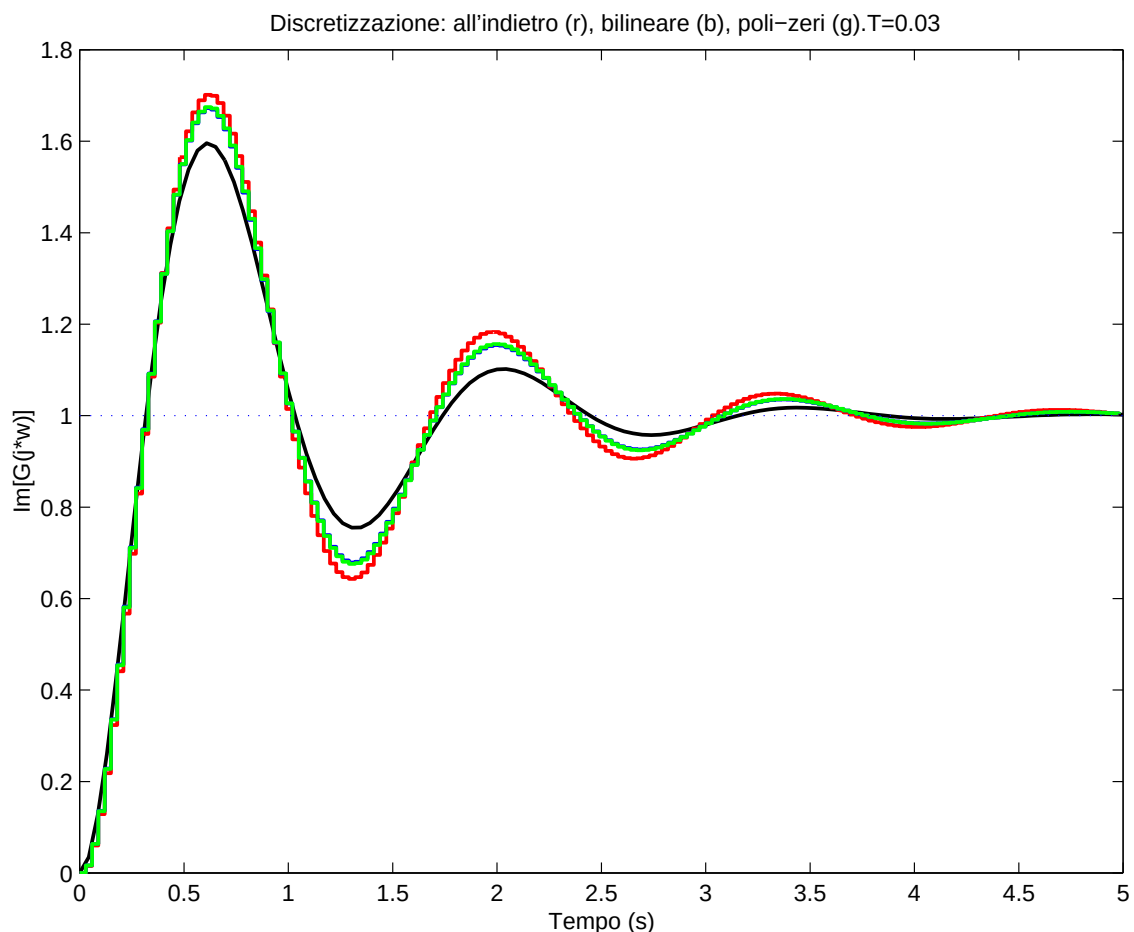
- 2) metodo della trasformazione bilineare:

$$D(z)_2 = D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{8.48 - 7.52 z^{-1}}{0.23 - 0.17 z^{-1}}$$

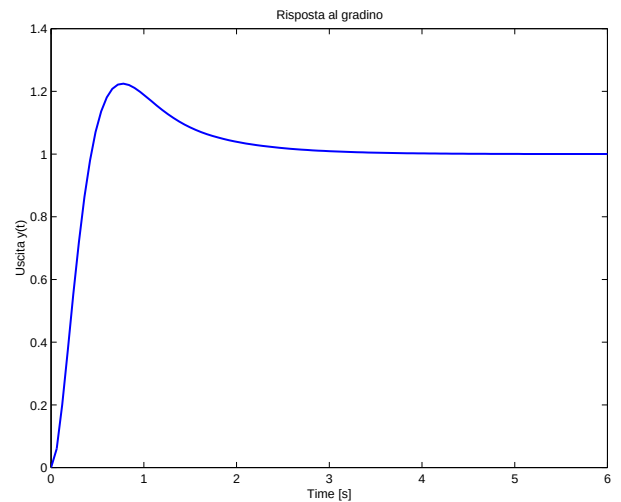
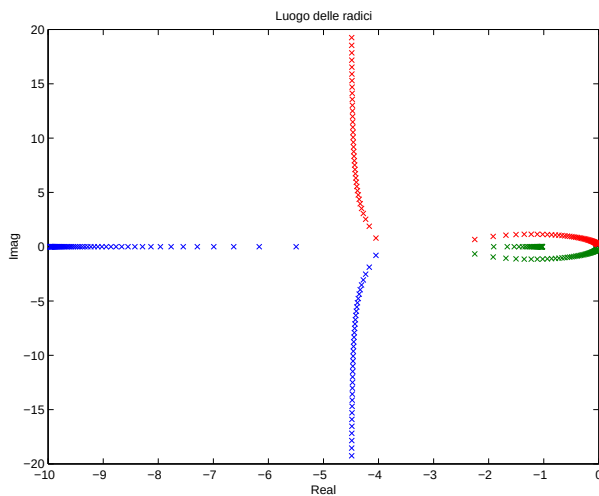
- 3) metodo della corrispondenza poli-zeri:

$$D(z)_3 = k \frac{1 - e^{-aT} z^{-1}}{1 - e^{-bT} z^{-1}} = \frac{36.67 - 32.53 z^{-1}}{1 - 0.7408 z^{-1}}$$

- Risposta del sistema retroazionato al gradino unitario:



- Luogo delle radici e risposta al gradino del sistema retroazionato se si utilizza la rete corretttrice $D(s) = \frac{40(s+1)}{(s+10)}$:



- Risposte al gradino che si ottengono discretizzando la rete corretttrice $D(s)$ e utilizzando il periodo di campionamento $T = 0.03$ s:

