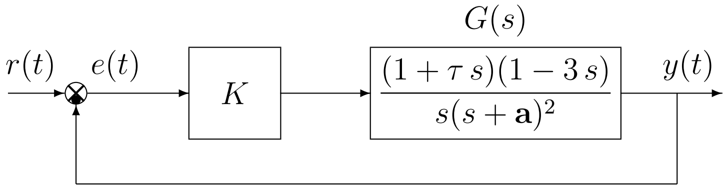
Nr.

Controlli Automatici B
26 Marzo 2008 - Esercizi
Compito Nr. $\boxed{\mathbf{a} = 3}$ $\boxed{\mathbf{b} = 5}$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad **a** e **b** i valori assegnati e si risponda alle domande.

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Posto $\tau = 0$ tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro K. Tracciare il luogo delle radici sia per $K > 0$ che per $K < 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. Posto $\tau = 0$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato diventa:

$$1 + K \frac{(1 - 3\, s)}{s(s + \mathbf{a})^2} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $K > 0$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$ è mostrato in Fig. 1. Sono presenti due asintoti che coincidono con

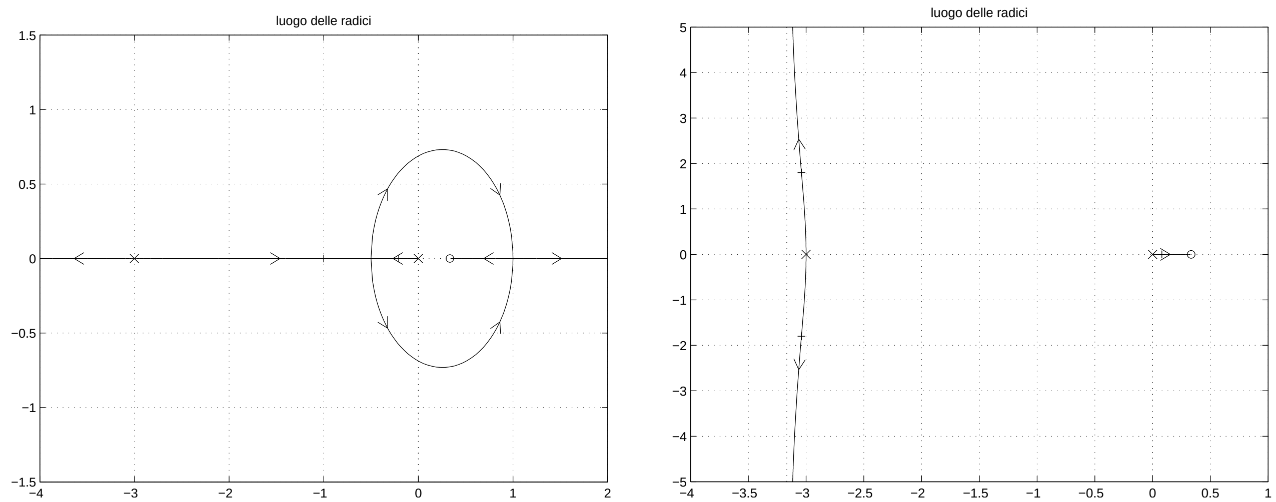


Figura 1: Luogo delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro K quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$. Le due figure sono relative, rispettivamente, ai casi $K > 0$ e $K < 0$.

i semiassi reali (positivo e negativo) quando $K > 0$ e hanno una posizione verticale quando $K < 0$. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}\left(-2\,\mathbf{a} - \frac{1}{3}\right) \qquad \xrightarrow{\mathbf{a}=3,\,\mathbf{b}=5} \qquad \sigma_a = -\frac{19}{6}$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K\, G(s) = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 2\,\mathbf{a}\, s^2 + (\mathbf{a}^2 - 3\,K)\, s + K = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (\mathbf{a}^2 - 3\,K) \\ 2 & 2\,\mathbf{a} & K \\ 1 & 2\,\mathbf{a}(\mathbf{a}^2 - 3\,K) - K & \\ 0 & K & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \rightarrow & 1 > 0 \\ \rightarrow & \mathbf{a} > 0 \\ \rightarrow & 2\,\mathbf{a}^3 - (1 + 6\,\mathbf{a})\,K > 0 \\ \rightarrow & K > 0 \end{array}$$

Il sistema risulta essere stabile per:

$$0 < K < \frac{2\,\mathbf{a}^3}{1+6\,\mathbf{a}} = K^* \quad \xrightarrow{\mathbf{a}=3,\,\mathbf{b}=5} \quad 0 < K < \frac{54}{19} = 2.842 = K^*$$

Le intersezioni con l'asse immaginario si hanno in corrispondenza della pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{\mathbf{a}^2 - 3\,K^*} = \frac{a}{\sqrt{1+6\,\mathbf{a}}} \quad \xrightarrow{\mathbf{a}=3,\,\mathbf{b}=5} \quad \omega^* = 0.688$$

a.2) Posto $\tau = 0$ e $K = K^*$, determinare la posizione p_1, p_2 e p_3 dei poli del sistema retroazionato.

Sol. In corrispondenza del valore $K = K^*$ il sistema retroazionato è marginalmente stabile e due dei suoi poli si trovano sull'asse immaginario nella posizione $p_{1,2} = \pm j\,\omega^*$. La posizione del terzo polo p_3 si determina utilizzando il teorema del baricentro:

$$p_1 + p_2 + p_3 = \sum_{i=1}^{3} p_{0i} = -2\,\mathbf{a} \quad \xrightarrow{\mathbf{a}=3,\,\mathbf{b}=5} \quad p_3 = \sum_i p_{0i} = -6$$

a.3) Posto $K = K^*$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$. Nella graficazione del contorno delle radici si tenga conto del fatto che il sistema retroazionato è stabile per $\tau < \tau^*$. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo". Nota: nel caso in cui lo studente non fosse stato in grado di determinare la posizione dei poli al punto a.2) è pregato di utilizzare le seguenti posizioni $p_{1,2} = \pm j$ e $p_3 = -4$.

Sol. Posto $K = K^*$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1 + \frac{K^*(1+\tau\,s)(1-3\,s)}{s(s+\mathbf{a})^2} = 0 \quad \rightarrow \quad s(s+\mathbf{a})^2 + K^*(1+\tau\,s)(1-3\,s) = 0$$

da cui si ricava l'equazione caratteristica $1 + \tau\,G_1(s) = 0$:

$$s(s+\mathbf{a})^2 + K^*(1-3\,s) + \tau\,K^*\,s(1-3\,s) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\tau\,K^*\,s(1-3\,s)}{s(s+\mathbf{a})^2 + K^*(1-3\,s)} = 0$$

I poli della funzione $G_1(s)$ sono quelli ottenuti al punto a.2):

$$1 + \frac{\tau\,K^*\,s(1-3\,s)}{(s-j\,\omega^*)(s+j\,\omega^*)(s+2\,\mathbf{a})} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$ quando $\mathbf{a} = 3$ è mostrato in Fig. 2. Il

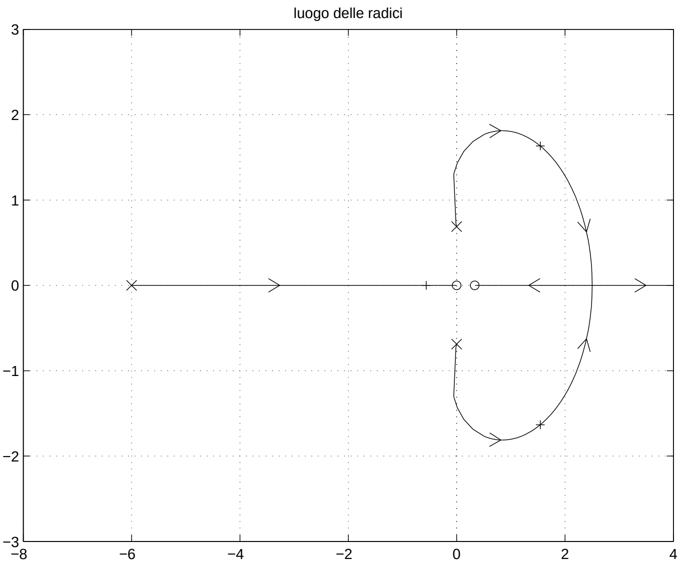


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\tau > 0$ quando $\mathbf{a} = 3$.

valore limite τ^* e l'intersezione ω^* del contorno delle radici con l'asse immaginario si determinano utilizzando il criterio di Routh:

$$s(s+\mathbf{a})^2+K^*(1-3\,s)+\tau\,K^*\,s(1-3\,s)=0 \quad\rightarrow\quad s^3+(2\mathbf{a}-3\,\tau\,K^*)s^2+(\mathbf{a}^2-3\,K^*+\tau\,K^*)s+K^*=0$$

$$\begin{array}{r|ccll}
3 & 1 & (\mathbf{a}^2-3\,K^*+\tau\,K^*) & \rightarrow & 1>0 \\
2 & (2\mathbf{a}-3\,\tau\,K^*) & K^* & \rightarrow & \tau<\frac{2\mathbf{a}}{3\,K^*} \\
1 & (2\mathbf{a}-3\,\tau\,K^*)(\mathbf{a}^2-3\,K^*+\tau\,K^*)-K^* & & \rightarrow & >0 \\
0 & K^* & & \rightarrow & K^*>0
\end{array}$$

Sostituendo K^* nell'equazione di riga 1:

$$(2\mathbf{a}-3\,\tau\,K^*)(\mathbf{a}^2-3\,K^*+\tau\,K^*)-K^*=0$$

si ottiene la seguente equazione in τ:

$$\tau[2\mathbf{a}^4(2+9\mathbf{a})-12\mathbf{a}^6\,\tau]=0$$

Il sistema retroazionato è stabile per:

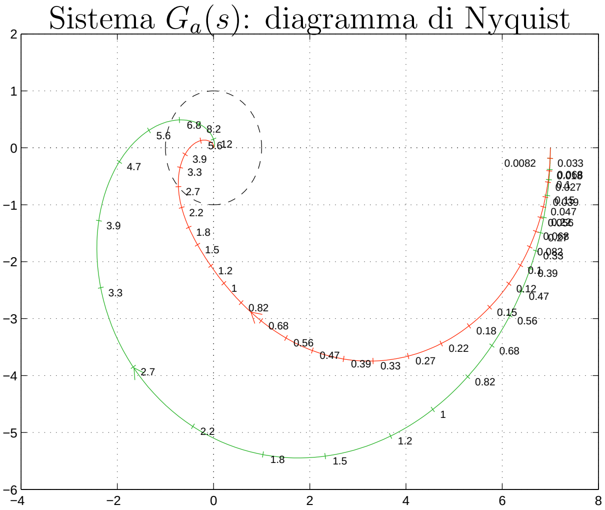
$$0<\tau<\frac{2+9\,\mathbf{a}}{6\,\mathbf{a}^2}=\tau^* \qquad \xrightarrow{\mathbf{a}=3,\,\mathbf{b}=5} \qquad \tau^*=0.537$$

L'intersezione con l'asse immaginario si ha in corrispondenza della pulsazione:

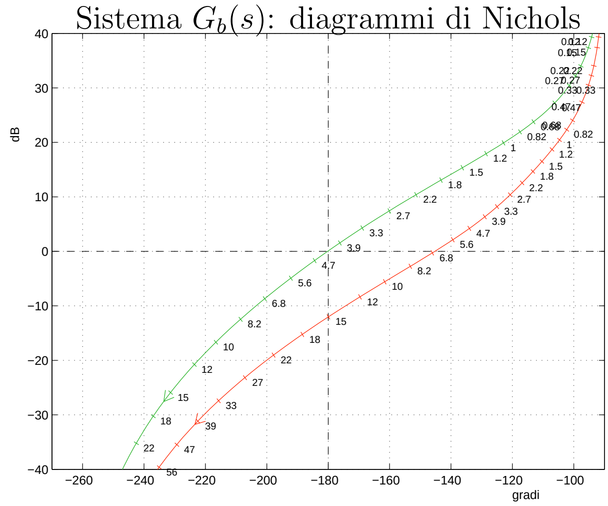
$$\omega^*=\sqrt{(\mathbf{a}^2-3\,K^*+\tau^*\,K^*)}=\sqrt{\frac{2\,\mathbf{a}}{3}} \qquad \xrightarrow{\mathbf{a}=3,\,\mathbf{b}=5} \qquad \omega^*=1.414$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:

Sistema $G_a(s)$: diagramma di Nyquist



Sistema $G_b(s)$: diagrammi di Nichols



b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi=(40+2\,\mathbf{a})^o$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di fase definisce completamente la posizione del punto B:

$$M_B=1,\quad \varphi_B=226^o$$

Un punto A ammissibile è quello corrispondente alla pulsazione $\omega=2.7$:

$$M_A=4.196,\quad \varphi_A=246.5^o \qquad\longrightarrow\qquad M=\frac{M_B}{M_A}=0.2383,\quad \varphi=-23.5^o$$

La rete correttrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1=\frac{M-\cos\varphi}{\omega\,\sin\varphi}=0.6297,\qquad \tau_2=\frac{\cos\varphi-\frac{1}{M}}{\omega\,\sin\varphi}=3.043 \quad\rightarrow\quad C(s)=\frac{1+0.6297\,s}{1+3.043\,s}$$

b.2) Sempre per il sistema $G_a(s)$, progettare i parametri K, τ_1 e τ_2 di una rete correttrice $C(s) = K\,\dfrac{1+\tau_1\,s}{1+\tau_2\,s}$ in modo da garantire al sistema compensato un errore a regime per ingresso a gradino unitario $e_p = 0.02$ e un margine di ampiezza $M_\alpha = \mathbf{b}+1$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. Il modulo e la fase del punto $B = (-\frac{1}{\mathbf{b}+1},\ 0)$ sono completamente determinati dalla specifica sul margine di ampiezza $M_\alpha = \mathbf{b}+1$:

$$M_B = \frac{1}{\mathbf{b}+1}, \qquad\qquad \varphi_B = -180^o$$

Per avere un errore a regime per ingresso a gradino unitario pari a $e_p \simeq 0.02$ occorre che il guadagno statico del sistema compensato $C(s)G_b(s)$ sia sufficientemente elevato:

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+G_b(0)C(0)} = \frac{1}{1+7\,K} \simeq 0.02 \qquad \rightarrow \qquad K = 7$$

Un punto A' da portare in B deve essere scelto appartenente alla funzione $G_b'(s) = 7\,G_b(s)$. Sul diagramma di Nyquist la funzione $G_b'(s)$ si ottiene amplificando di un fattore $K = 7$ la funzione $G_b(s)$. Un punto A' che può essere portato in B usando una rete ritardatrice quello (per esempio) corrispondente alla pulsazione $\omega = 3.9$:

$$M_A = 7\,M_{A'} = 18.94, \qquad\qquad \varphi_A = -151.8^o$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0132, \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -28.2^o$$

La rete ritardatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M-\cos\varphi}{\omega\,\sin\varphi} = 0.4714, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega\,\sin\varphi} = 40.65 \qquad \rightarrow \qquad C(s) = \frac{1+0.4714\,s}{1+40.65\,s}$$

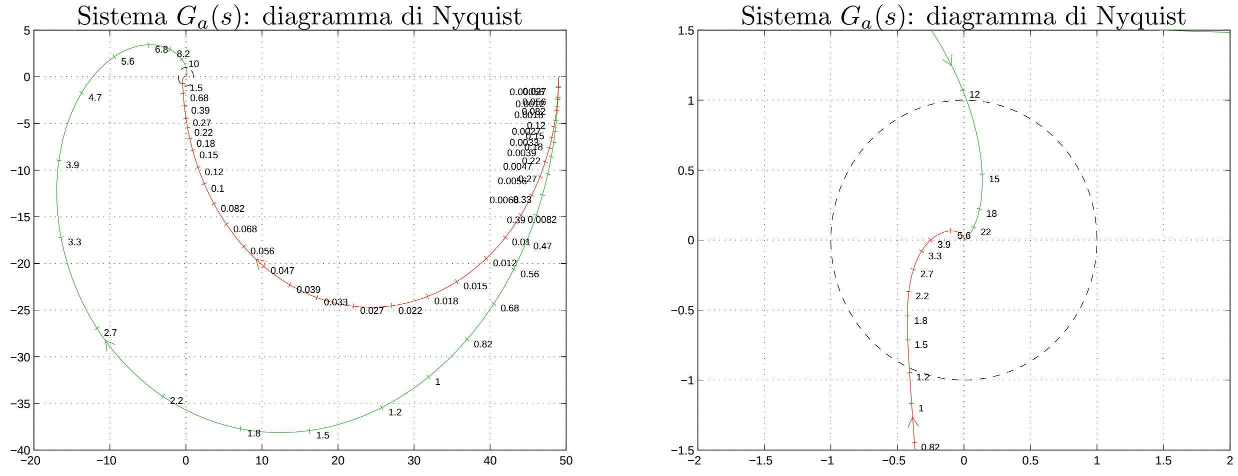


Figura 3: Diagramma di Nyquist del sistema $K\,G_a(s)$ e zoom nell'intorno dell'origine.

b.3) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete correttrice in modo da garantire che il sistema compensato abbia un margine di ampiezza $M_\alpha = 4$ e una elevata larghezza di banda ω_{f0} per il sistema retroazionato. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La richiesta di passare per il punto $B = (-180^o,\ -12\,\mathrm{db})$ definisce completamente la posizione del punto B:

$$M_B = -12\,\mathrm{db} = 0.25, \quad \varphi_B = 180^o$$

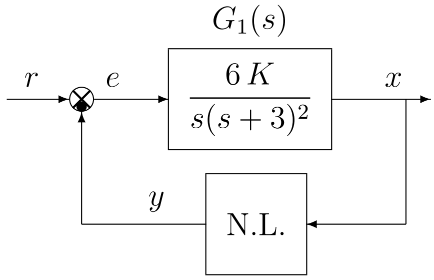
Un punto A ammissibile è quello corrispondente alla pulsazione $\omega = 15$:

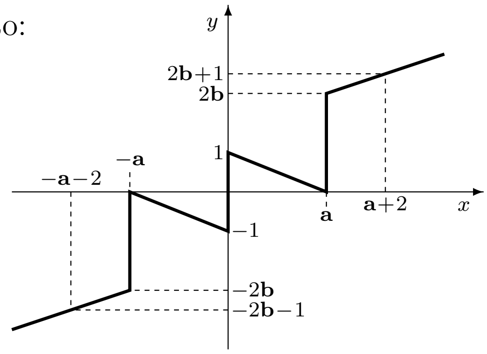
$$M_A \simeq -26\,\text{db} = 0.0503, \quad \varphi_A = 128.6^o \qquad \longrightarrow \qquad M = \frac{M_B}{M_A} = 4.96, \quad \varphi = 51.4^o$$

La rete correttrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi} = 0.37, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi} = 0.03596 \qquad \rightarrow \qquad C(s) = \frac{1 + 0.37\,s}{1 + 0.03596\,s}$$

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





c.1) Posto $K = 1$, determinare per quali valori r_0 ed r_1 dell'ingresso r i punti di lavoro del sistema retroazionato sono posizionati in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e in $(x_1, y_1) = (\mathbf{a}+2, 2\mathbf{b}+1)$.
Sol. Il sistema $G_1(s)$ è di tipo 1 per cui si ha: $K_1 = \infty$, $K_2 = 1$ e $K_3 = 1$. La retta di carico della parte lineare del sistema è una retta orizzontale di ordinata:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} = r \qquad \rightarrow \qquad r_0 = 0, \qquad r_1 = 2\,\mathbf{b} + 1$$

c.2) Posto $K = 1$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile o meno nell'intorno del punto $(x_1, y_1) = (\mathbf{a}+2, 2\mathbf{b}+1)$.
Sol. Le pendenze α e β di 2 rette che centrate in $(x_0, y_0) = (\mathbf{a}+2, 2\mathbf{b}+1)$ racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{2\,\mathbf{b}+1}{2} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}$$

La pendenza β è stata calcolata facendo riferimento al punto $(x_1, y_1) = (0, \mathbf{a})$. Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -2, \qquad -\frac{1}{\beta} = -\frac{2}{2\,\mathbf{b}+1}$$

Il margine di ampiezza K^* e la pulsazione ω^* della funzione $G_1(s)$ si determinano utilizzando il criterio di Routh:

$$K^* = 9, \qquad \omega^* = 3.$$

Per $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in [1, 2, \ldots, 8]$ il valore di K^* è maggiore sia di α che di β

$$\alpha < \beta < K^* \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{1}{2} < \mathbf{b} + \frac{1}{2} < 9$$

Ne segue che il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ non interseca mai il cerchio critico e quindi utilizzando il criterio del cerchio si può affermare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile nell'intorno del punto di lavoro.

c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0, 0)$. Utilizzare le variabili m_1, m_2, ... per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.
Sol. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$ è mostrato in Fig. 4. Per $X < \mathbf{a}$ la funzione descrittiva $F(X)$ coincide con quella di un relè ideale sommata ad una retta di pendenza negativa :

$$F(X) = \frac{4}{\pi X} - \frac{1}{\mathbf{a}}$$

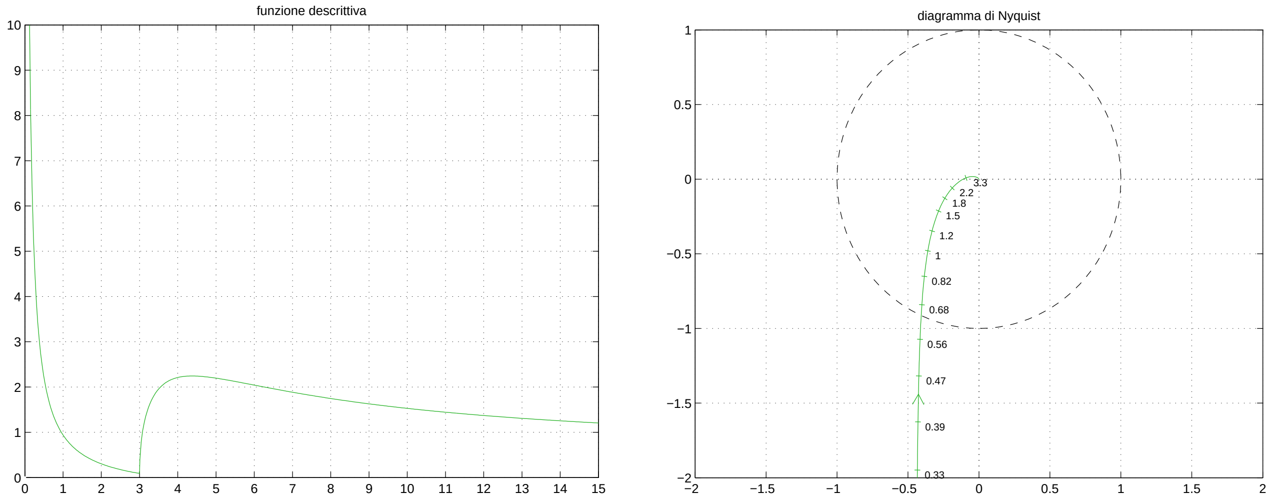


Figura 4: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$. Diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$.

Il valore m_1 del primo minimo si ottiene calcolando la $F(X)$. in corrispondenza di $X = \mathbf{a}$:

$$m_1 = F(X)|_{X=\mathbf{a}} = \frac{4}{\pi\,\mathbf{a}} - \frac{1}{\mathbf{a}} \qquad \xrightarrow{\mathbf{a}=3,\,\mathbf{b}=5} \qquad m_1 = 0.0911$$

Il valore m_2 del massimo intermedio può essere calcolato sono conoscendo la $F(X)$ per $X > \mathbf{a}$. Per $X \to \infty$ la $F(X)$ tende al valore finale minimo $m_3 = \frac{1}{2}$.

c.4) Discutere "qualitativamente" in funzione anche dei parametri $m_1,\ m_2,\ \ldots$ l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza $\bar{K}^*$ del sistema $G_1(s)$ è $\bar{K}^* = 9$. Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K\,G_1(s)$ è $K^* = \frac{9}{K}$. Al variare di K^* si possono avere le seguenti condizioni di funzionamento:

1) Per $K^* < m_1$ la funzione $-1/F(X)$ è tutta interna al diagramma completo della funzione $G_1(s)$ per cui non vi sono cicli limite e il sistema retroazionato è instabile.

2) Per $m_1 < K^* < m_3$ il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in due punti di cui il primo corrisponde un ciclo limite stabile, il secondo ad un ciclo limite instabile.

3) Per $m_3 < K^* < m_2$, il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in tre punti a cui corrispondono due cicli limite stabili (quelli esterni) e uno instabile (quello intermedio).

4) Per $K^* > m_2$, il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

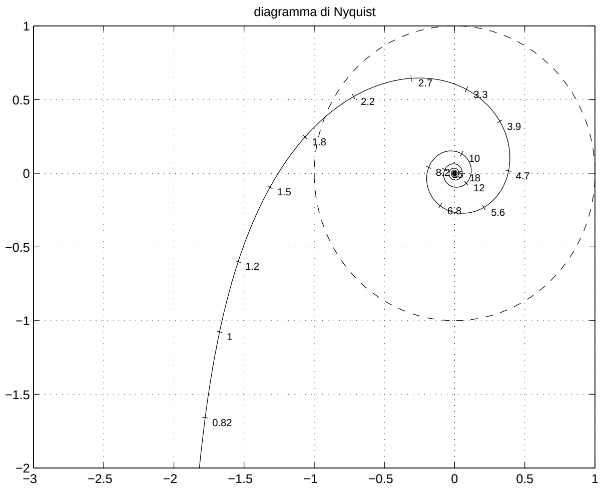
c.5) Posto $K = 1$, calcolare l'ampiezza X^* e la pulsazione ω^* del più piccolo ciclo limite stabile presente nel sistema retroazionato.

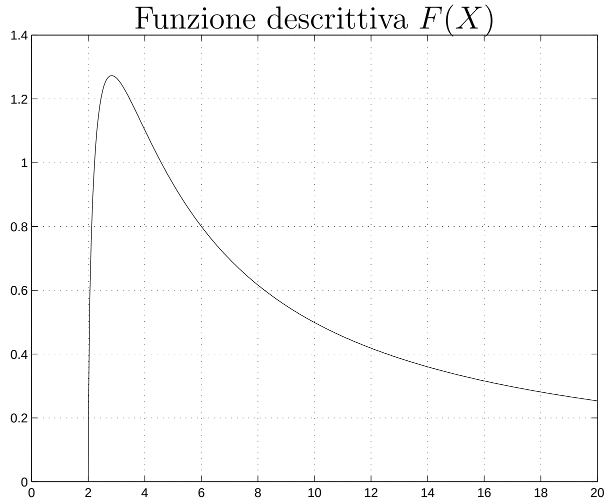
Sol. Posto $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K\,G_1(s)$ è $K^* = 9$. Tale valore è maggiore di m_2 per cui nel sistema retroazionato è presente un solo ciclo limite stabile di cui è possibile calcolare l'ampiezza X^* utilizzando la $F(X)$ precedentemente individuata:

$$F(X^*) = K^* \quad \to \quad \frac{4}{\pi\,X^*} - \frac{1}{\mathbf{a}} = 9 \quad \to \quad X^* = \frac{4\,\mathbf{a}}{\pi(9\mathbf{a}+1)} \quad \xrightarrow{\mathbf{a}=3} \quad X^* = 0.1364$$

La pulsazione ω^* del ciclo limite coincide con quella del punto di intersezione della $G_1(s)$ con il semiasse reale negativo $\omega^* = 3$.

d) Dato il diagramma di Nyquist di un sistema $G(s)$ posto in retroazione negativa su di una non linearità $y = y(x)$ di cui viene fornita la funzione descrittiva $F(X)$.





d.1) Partendo dalla funzione descrittiva $F(X)$ mostrata in figura, cercare di ricostruire l'andamento "qualitativo" della corrispondente non linearità $y = f(x)$. <u>Nota</u>: $\lim_{X\to\infty} F(X) = 0$.

Sol. L'andamento "qualitativo" della non linearità $y = f(x)$ è mostrato in Fig. 5. In questo caso la funzione considerata è un relè di ampiezza $Y = 4$ con una soglia di ampiezza $X_1 = 2$.

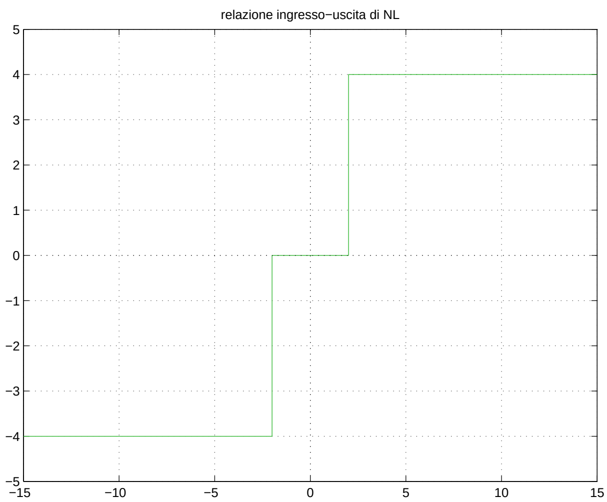


Figura 5: Andamento "qualitativo" della non linearità $y = f(x)$.

d.2) Nei limiti della precisione dei grafici forniti, determinare l'ampiezza X^*, la pulsazione ω^* e la stabilità degli eventuali cicli limite stabili presenti nel sistema retroazionato.

Sol. Dal diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ si ricava (in modo approssimato) il margine di ampiezza $K^* \simeq \frac{1}{1.25} = 0.8$ e la pulsazione $\omega^* = 1.58$. Utilizzando la funzione descrittiva $F(X)$ che è stata fornita ed imponendo $F(X^*) = K^*$ si ricava $X^* \simeq 2.2$.

d.3) Progettare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete correttrice $C(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ da mettere in cascata al sistema $G(s)$ in modo che il sistema retroazionato abbia un ciclo limite stabile di ampiezza $X^* = 4$ in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 1.2$.

Sol. Nel sistema retroazionato sarà presente un ciclo limite stabile di ampiezza $X^* = 4$ solo se il margine di ampiezza $\bar{K}^*$ del sistema compensato $C(s)G(s)$ ha il valore $\bar{K}^* = 1.1$ che si ricava dalla $F(X)$ in corrispondenza del valore $X^* = 4$. Il sistema compensato dovrà quindi passare per il punto $B = -\frac{1}{\bar{K}^*}$:

$$M_B = 0.9091, \quad \varphi_B = 180^o$$

Un punto A che deve essere portato in **B** è quello caratterizzato dalla pulsazione $\omega = 1.2$:

$$M_A = 1.655, \quad \varphi_A = 201.3^o \qquad \longrightarrow \qquad M = \frac{M_B}{M_A} = 0.549, \quad \varphi = -21.3^o$$

La rete ritardatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega\,\sin\varphi} = 0.8783, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega\,\sin\varphi} = 2.04 \qquad \to \qquad C(s) = \frac{1 + 0.8783\,s}{1 + 2.04\,s}$$

e) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete correttrice

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s + \mathbf{a})}{(s+2)(s+1)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \left.\frac{(s + \mathbf{a})}{(s+2)(s+1)}\right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T(1 - z^{-1} + \mathbf{a}\,T)}{(1 - z^{-1} + 2\,T)(1 - z^{-1} + T)}$$

Per $\mathbf{a} = 3$ e $T = 0.1$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{0.13 - 0.1\,z^{-1}}{(1.2 - z^{-1})(1.1 - z^{-1})} = \frac{0.13 - 0.1\,z^{-1}}{(1.2 - z^{-1})(1.1 - z^{-1})} = \frac{0.13 - 0.1\,z^{-1}}{1.32 - 2.3\,z^{-1} + z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = \frac{1}{1.32}[2.3\,m(k-1) - m(k-2) + 0.13\,e(k) - 0.1\,e(k-1)]$$

cioè:

$$m(k) = 1.7424\,m(k-1) - 0.7576\,m(k-2) + 0.0985\,e(k) - 0.0758\,e(k-1)]$$

f) Partendo dalla condizione iniziale non nulla $y(0) = 1$, calcolare la risposta $y(n)$ al gradino unitario $x(n) = (1, 1, 1, \ldots)$ del seguente sistema dinamico discreto:

$$y(n+1) - y(n) = \mathbf{b}\,x(n)$$

Sol. Applicando la Z-trasformata alla precedente equazione alle differenze si ottiene:

$$z\,Y(z) - z\,y(0) - Y(z) = \mathbf{b}\,X(z)$$

Esprimendo $Y(z)$ in funzione di $X(z)$ e della condizione iniziale $y(0)$ si ottiene:

$$Y(z) = \frac{\mathbf{b}}{z-1}\,X(z) + \frac{y(0)\,z}{z-1} = \frac{\mathbf{b}\,z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = \mathbf{b}\,n + 1$$

Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Controlli Automatici B

26 Marzo 2008 - Domande Teoriche

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considerata corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

1. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali tempo continui $x(t)$ quando $t = k\,T$:

$$x(t) = e^{-2\,t} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{(z - e^{-2\,T})} \qquad\qquad x(t) = 3\,t \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{3\,z\,T}{(z-1)^2}$$

2. Posto $T = 1$, il tempo di assestamento T_a della risposta impulsiva $g(k)$ del sistema discreto $G(z) = \frac{z}{z-0.4}$ è:

   - ○ $T_a = 3\,|\ln(0.4)|$;
   - ○ $T_a = 3\,|\log_{10}(0.4)|$;
   - ⊗ $T_a = 3/|\ln(0.4)|$;
   - ○ $T_a = 3/|\log_{10}(0.4)|$;

3. 1) Disegnare qualitativamente al variare di $K > 0$ il luogo delle radici del seguente sistema:

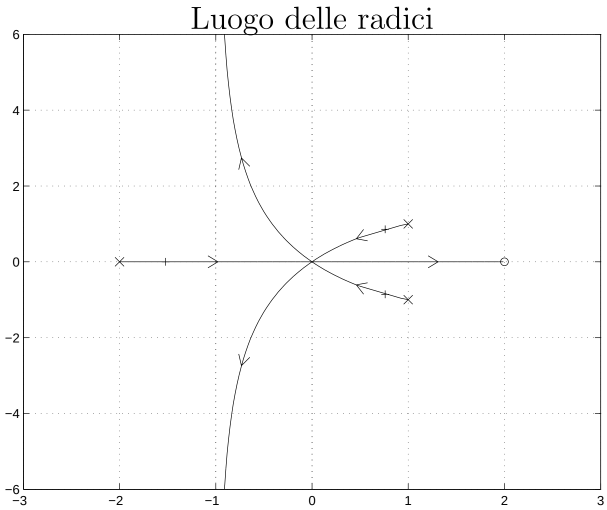
$$G(s) = \frac{(s-2)}{(s+2)[(s-1)^2+1]}$$

   2) Determinare la posizione σ_a del centro degli asintoti e l'ascissa σ_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

$$\sigma_a = -1, \qquad\qquad \sigma_0 = 0$$

   3) Il valore K^* corrispondente alla condizione di attraversamento dell'asse immaginario:

$$K^* = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=0} = 2$$



4. Sia $G(z)$ la trasformata Z della successione numerica $g(k)$. Scrivere gli enunciati dei teoremi del valore iniziale e del valore finale:

$$g(0) = g(k)|_{k=0} = \lim_{z\to\infty} G(z), \qquad\qquad g(\infty) = \lim_{k\to\infty} g(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})G(z)$$

5. Dato un periodo di campionamento T, indicare la pulsazione massima ω_{max} che è possibile rappresentare mediante una funzione discreta $G(z)$:

$$\omega_{max} = \frac{\pi}{T}$$

6. Per poter applicare il criterio del Cerchio ad un sistema $G(s)$ retroazionato su una non linearità $y = f(x)$

   - ○ la non linearità $y = f(x)$ deve essere simmetrica rispetto all'origine;
   - ⊗ la non linearità $y = f(x)$ deve essere di tipo "a settore";
   - ⊗ la non linearità $y = f(x)$ deve passare per l'origine;

7. Nel piano z i luoghi dei punti a coefficiente di smorzamento δ costante

   ○ sono rette uscenti dall'origine

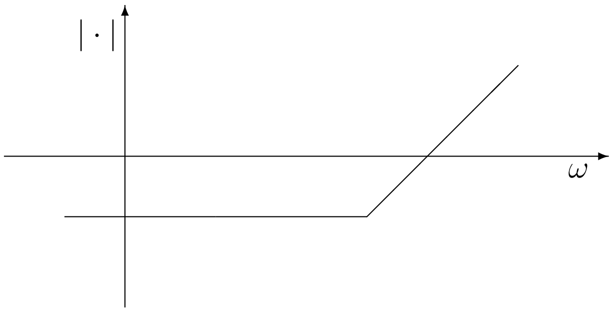
   ○ sono circonferenze centrate nell'origine

   ⊗ sono tratti di spirali decrescenti verso l'origine

8. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ corrispondente al ricostruttore di ordine 0:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

9. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PD e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:



$$G(s) = K\,(1 + T_d s)$$

10. Fornire l'enunciato del Teorema del baricentro: *La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta con ...*
    polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.

11. Sia $Y(X)\sin(\omega t + \varphi(X))$ la fondamentale del segnale periodico $y(t)$ presente all'uscita della nonlinearità algebrica $y(t) = f[x(t)]$ in risposta all'ingresso $x(t) = X\sin(\omega t)$. La funzione descrittiva $F(X)$ è definita nel modo seguente:

$$F(X) = \frac{Y(X)}{X}\, e^{j\varphi(X)}$$

12. Calcolare la funzione di trasferimento $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$5\,x(k–1)+4\,x(k–2) = 2\,y(k)+3\,y(k–1)+y(k–2) \qquad \rightarrow \qquad G(z) = \frac{5\,z^{-1} + 4\,z^{-2}}{2 + 3\,z^{-1} + z^{-2}} = \frac{5\,z + 4}{2\,z^2 + 3\,z + 1}$$

13. Disegnare "qualitativamente" sia sul piano di Nichols che sul piano di Nyquist la regione dei punti del piano che possono essere portati nel punto $B = (-180^o,\ -6\text{db}) = (-0.5,\ 0)$ utilizzando una rete ritardatrice.