

Controlli Automatici B

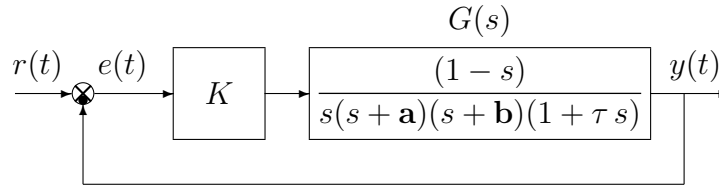
6 Aprile 2009 - Esercizi

Compito Nr. a = 3 b = 5

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad **a** e **b** i valori assegnati e si risponda alle domande.

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Posto $\tau = 0$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro K . Si proceda al tracciamento del luogo delle radici sia per $K > 0$ che per $K < 0$. Determinare esattamente gli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^* . Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. Posto $\tau = 0$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \frac{-K(s-1)}{s(s+a)(s+b)} = 0$$

dove $K_1 = -K$. Gli andamenti qualitativi dei luoghi delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K_1 < 0$ e $K_1 > 0$ quando $a = 3$ e $b = 5$ sono mostrati in Fig. 1. Nei luoghi delle radici sono presenti

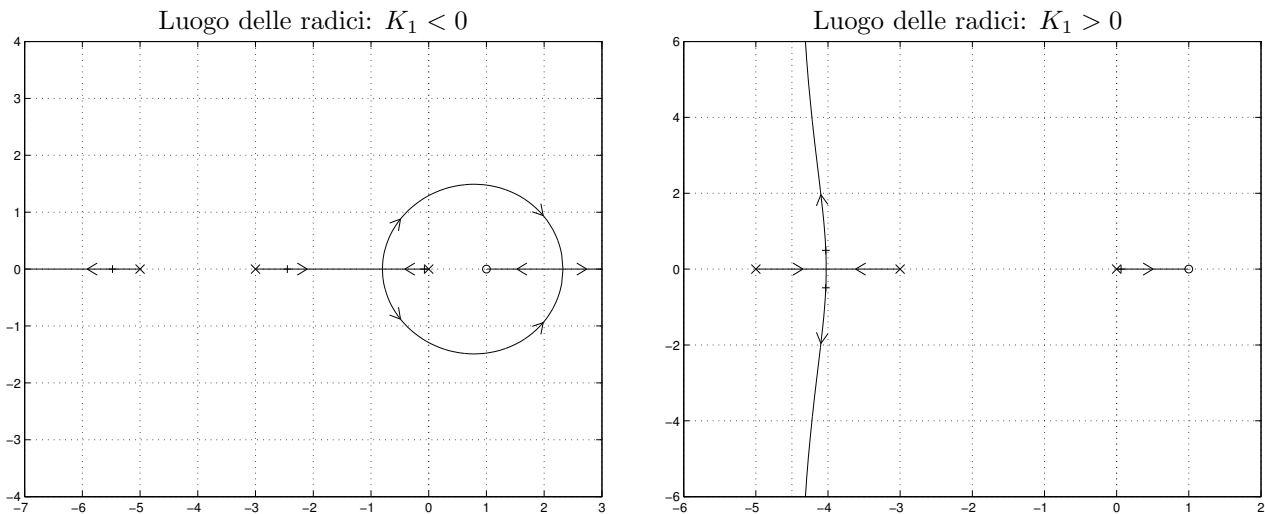


Figura 1: luoghi delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K_1 < 0$ e $K_1 > 0$ quando $a = 3$ e $b = 5$.

due asintoti: per $K_1 < 0$ gli asintoti coincidono con il semiasse reale positivo e il semiasse reale negativo; per $K_1 > 0$ gli asintoti sono verticali e si incontrano su un punto dell'asse reale di ascissa σ_a :

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-a - b - 1) \quad \xrightarrow{a=3, b=5} \quad \sigma_a = 4.5$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola utilizzando il criterio di Routh:

$$1 - \frac{K(s-1)}{s(s+a)(s+b)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (a+b)s^2 + (ab-K)s + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

3	1	$(ab - K)$	\rightarrow	$1 > 0$
2	$(a + b)$	K	\rightarrow	$K < ab$
1	$(ab - K)(a + b) - K$		\rightarrow	$K(a + b + 1) < ab(a + b)$
0	K		\rightarrow	$K > 0$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$0 < K < K^* = \frac{\mathbf{ab}(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{(\mathbf{a} + \mathbf{b} + 1)}$$

Nel caso $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$ si ha $K^* = 13.33$. La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{\mathbf{a} + \mathbf{b}}} = \sqrt{(\mathbf{ab} - K^*)}$$

Nel caso $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$ si ha $\omega^* = 1.29$.

a.2) Calcolare la posizione dei 3 poli p_1 , p_2 e p_3 del sistema retroazionato quando $\tau = 0$ e $K = K^*$. Si consiglia di utilizzare il teorema del baricentro.

Sol. In corrispondenza del valore $K = K^*$ il sistema retroazionato è marginalmente stabile e due dei tre poli del sistema retroazionato si trovano sull'asse immaginario nella posizione $p_{1,2} = \pm j\omega^*$. La posizione del terzo polo p_3 può essere determinato utilizzando il teorema del baricentro:

$$p_1 + p_2 + p_3 = \sum_{i=1}^3 p_{0i} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} \quad \xrightarrow{\mathbf{a}=3, \mathbf{b}=5} \quad p_3 = -8$$

a.3) Posto $K = K^*$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\tau > 0$. Determinare la posizione dei punti di diramazione e le intersezioni con l'asse immaginario "solo in modo qualitativo". Nel tracciamento del contorno delle radici si tenga conto del fatto che per $K = K^*$ il sistema retroazionato è instabile per $\tau > 0$.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$1 + \frac{K^*(1-s)}{s(s+\mathbf{a})(s+\mathbf{b})(1+\tau s)} = 0 \quad \rightarrow \quad s(s+\mathbf{a})(s+\mathbf{b})(1+\tau s) + K^*(1-s) = 0$$

da cui si ricava l'equazione caratteristica $1 + \tau G_1(s) = 0$:

$$s(s+\mathbf{a})(s+\mathbf{b}) + K^*(1-s) + \tau s^2(s+\mathbf{a})(s+\mathbf{b}) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\tau s^2(s+\mathbf{a})(s+\mathbf{b})}{s(s+\mathbf{a})(s+\mathbf{b}) + K^*(1-s)} = 0$$

Mettendo in evidenza i poli della funzione $G_1(s)$ si ottiene:

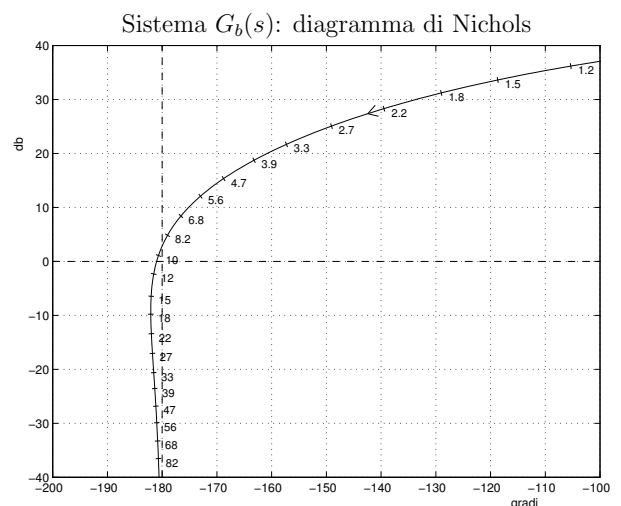
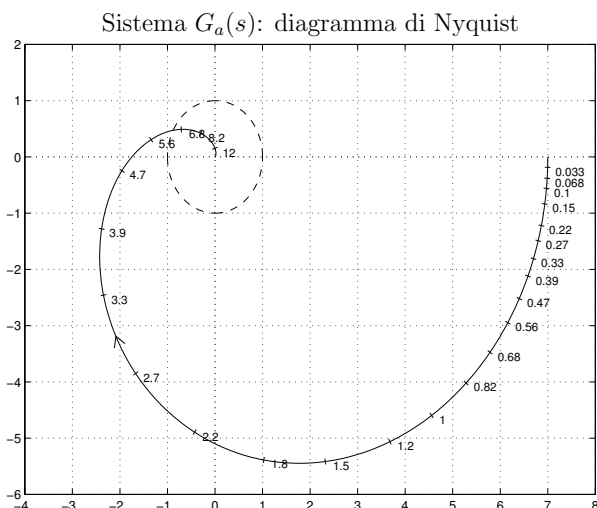
$$1 + \frac{\tau s^2(s+\mathbf{a})(s+\mathbf{b})}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} = 0 \quad \xrightarrow{\mathbf{a}=3, \mathbf{b}=5} \quad 1 + \frac{\tau s^2(s+\mathbf{a})(s+\mathbf{b})}{(s-1.29j)(s+1.29j)(s+8)} = 0$$

dove p_1 , p_2 e p_3 sono i poli calcolati al punto a.2):

$$p_{1,2} = \pm j\omega^* j, \quad p_3 = -\mathbf{a} - \mathbf{b} \quad \xrightarrow{\mathbf{a}=3, \mathbf{b}=5} \quad p_1 = \pm j 1.29, \quad p_3 = -8.$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\tau > 0$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$ è mostrato in Fig. 2.

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi $G_a(s)$ e $G_b(s)$:



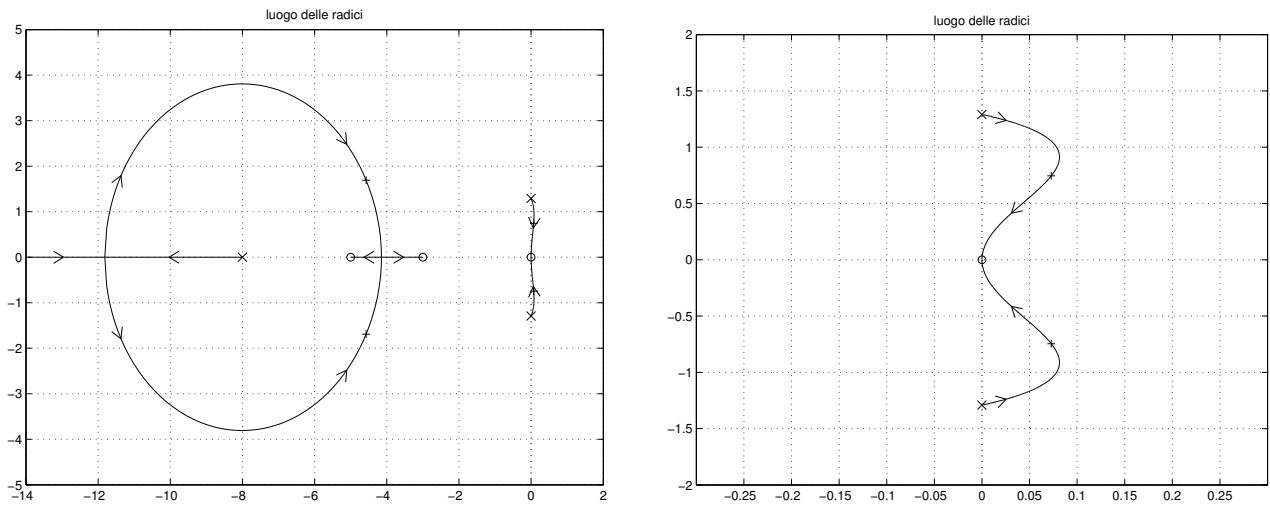


Figura 2: Contorno delle radici del sistema $G(s)$ al variare del parametro $\tau > 0$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$. Il secondo grafico è uno zoom della prima figura nell'intorno dell'origine.

b.1) Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttiva in modo da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_\alpha = 2 + \mathbf{a}$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. Il modulo e la fase del punto $B = (-\frac{1}{2+\mathbf{a}}, 0)$ sono completamente determinati dalla specifica sul margine di ampiezza $M_\alpha = 2 + \mathbf{a}$:

$$M_B = \frac{1}{\mathbf{a} + 1} = 0.2, \quad \varphi_B = -180^\circ$$

Un punto A che può essere portato in B usando una rete ritardatrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega = 3.9$:

$$M_A = 2.706, \quad \varphi_A = 208.18^\circ.$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0739, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -28.18^\circ$$

La rete ritardatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.4384, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 6.867 \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{1 + 0.4384 s}{1 + 6.867 s}$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 3.

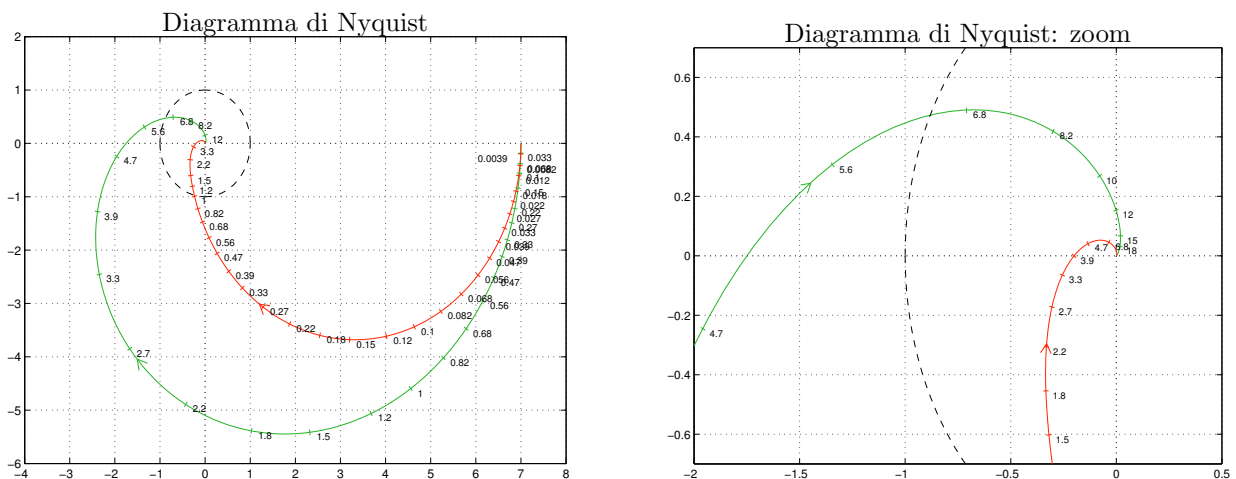


Figura 3: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$.

- b.2) Per il sistema $G_b(s)$, progettare una rete anticipatrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = (40 + \mathbf{b})^\circ$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di fase $M_\varphi = (40 + \mathbf{b})^\circ$ identifica completamente modulo e fase del punto B :

$$M_B = 0 \text{ db} = 1, \quad \varphi_B = (180 + 40 + \mathbf{b})^\circ = 225^\circ$$

Un punto A compatibile con la richiesta di utilizzare una rete ritardatrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega = 27$:

$$M_A = 0.1405, \quad \varphi_A = 178.2^\circ \quad \rightarrow \quad M = \frac{M_B}{M_A} = 7.118, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 46.77^\circ$$

La rete correttiva che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.327, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 0.02767 \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{1 + 0.327 s}{1 + 0.02767 s}$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$ per $\mathbf{b} = 5$ sono mostrati in Fig. 4.

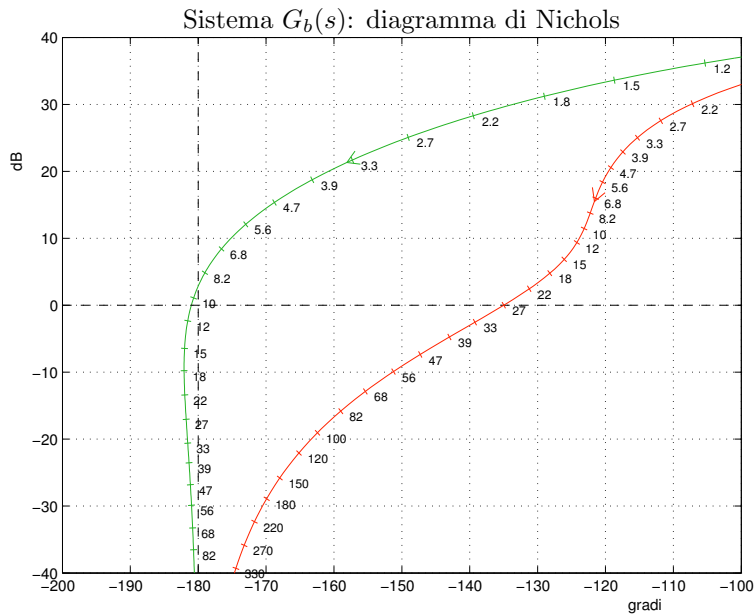


Figura 4: Diagrammi di Nichols delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$ per $\mathbf{b} = 5$.

- b.3) Sempre per il sistema $G_b(s)$, progettare i parametri K , τ_1 e τ_2 di una rete correttiva $C_3(s) = K \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$ in modo da portare il punto A , caratterizzato dalla pulsazione $\omega_A = 5.6$, a passare per il punto B caratterizzato dalle seguenti coordinate: $B = (-140^\circ + \mathbf{a}, -12 \text{ db})$.

Sol. Il modulo e la fase del punto $B = (-140^\circ + \mathbf{a}, -12 \text{ db}) \stackrel{\mathbf{a}=3}{=} (-137^\circ, -12 \text{ db})$ sono:

$$M_B = 0.25 = -12 \text{ db}, \quad \varphi_B = -137^\circ = 223^\circ$$

Il punto A caratterizzato dalla pulsazione $\omega = 5.6$ non può essere portato in B “direttamente” usando una rete ritardatrice o anticipatrice.

$$M_A = 4.02 = 12.08 \text{ db}, \quad \varphi_A = -173^\circ = 187^\circ$$

Utilizzando, per esempio, un guadagno $K = 1/40 = 0.025 = -32 \text{ db}$ è possibile portare il punto A in un punto A' che appartiene alla regione ammissibile per la sintesi di una rete anticipatrice:

$$M_{A'} = 0.1005 = -20.08 \text{ db}, \quad \varphi_{A'} = -173^\circ = 187^\circ$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{M_B}{M_{A'}} = 2.488, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_{A'} = 36^\circ$$

La rete anticipatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.51, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 0.1237 \quad \rightarrow \quad C_3(s) = \frac{1 + 0.51 s}{1 + 0.1237 s}$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni $K G_b(s)$ e $K C_3(s) G_b(s)$ per $\mathbf{a} = 3$ sono mostrati in Fig. 5.

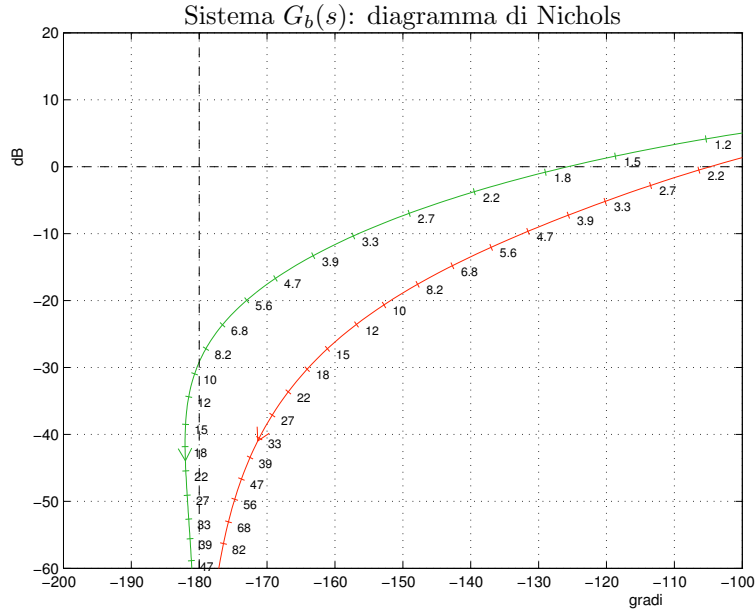
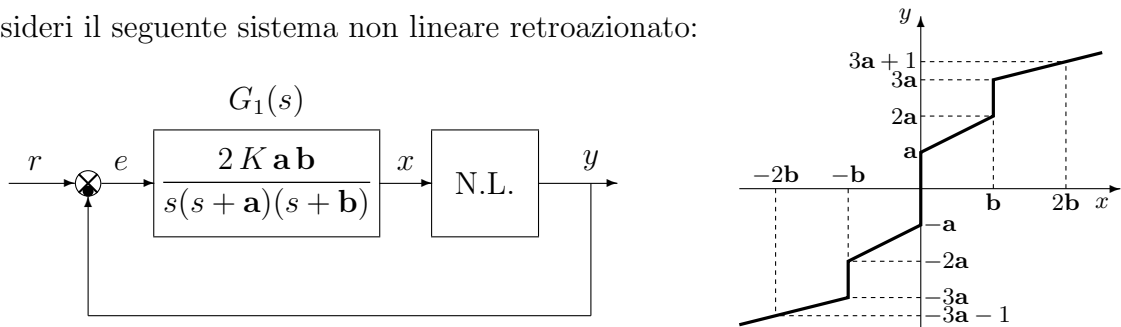


Figura 5: diagrammi di Nichols delle funzioni $K G_b(s)$ e $K C_3(s) G_b(s)$ per $\mathbf{a} = 3$.

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



c.1) Posto $K = 1$, determinare per quali valori r_1 ed r_2 dell'ingresso r i punti di lavoro del sistema retroazionato sono posizionati in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e in $(x_1, y_1) = (-2\mathbf{b}, -3\mathbf{a} - 1)$.

Sol. Il sistema $G_1(s)$ è di tipo 1 per cui si ha: $K_1 = \infty$, $K_2 = 1$ e $K_3 = 1$. La retta di carico della parte lineare del sistema è una retta orizzontale di ordinata:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} = r \quad \rightarrow \quad r_0 = 0, \quad r_1 = -3\mathbf{a} - 1 \stackrel{\mathbf{a}=3}{=} -10$$

c.2) Posto $K = 1$ ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile o meno nell'intorno del punto $(x_1, y_1) = (-2\mathbf{b}, -3\mathbf{a} - 1)$.

Sol. Le pendenze α e β di 2 rette che centrate nel punto $(x_1, y_1) = (-2\mathbf{b}, -3\mathbf{a} - 1)$ racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = \frac{1}{\mathbf{b}}, \quad \beta = \frac{4\mathbf{a} + 1}{2\mathbf{b}}$$

Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -\mathbf{b}, \quad -\frac{1}{\beta} = -\frac{2\mathbf{b}}{4\mathbf{a}+1}$$

Il margine di ampiezza K_1^* e la pulsazione ω_1^* della funzione $G(s) = G_1(s)$ si determinano utilizzando il criterio di Routh:

$$G_1(s) = \frac{2\mathbf{a}\mathbf{b}}{s(s+\mathbf{a})(s+\mathbf{b})} \quad \rightarrow \quad K_1^* = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}, \quad \omega_1^* = \sqrt{\mathbf{a}\mathbf{b}}.$$

Per $\mathbf{a} = 3$ si ha $K_1^* = 5$ e $\omega_1^* = 2.4495$. Nei casi in cui il valore di K_1^* sia maggiore di β

$$K_1^* = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} > \beta = \frac{4\mathbf{a}+1}{2\mathbf{b}}$$

il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ non interseca mai il cerchio critico e quindi, in base al criterio del cerchio, si può affermare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile nell'intorno del punto di lavoro. Quando invece $K_1^* < \beta$ non si può affermare nulla perchè il criterio del cerchio è solo sufficiente.

- c.3) Fornire l'espressione esatta della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0, 0)$ per $X \leq \mathbf{b}$. Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ per $X > 0$. Utilizzare le variabili m_1, m_2, \dots per rappresentare gli eventuali valori minimi e massimi "non noti" della funzione $F(X)$.

Sol. L'espressione esatta della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0, 0)$ per $X \leq \mathbf{b}$ è la seguente:

$$F(X) = \frac{4\mathbf{a}}{\pi X} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \quad \xrightarrow{\mathbf{a}=3, \mathbf{b}=5} \quad F(X) = \frac{12}{\pi X} + \frac{3}{5}$$

L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$ è mostrato in Fig. 6. Indichiamo con m_1 il minimo locale della funzione $F(X)$ nell'intorno del punto

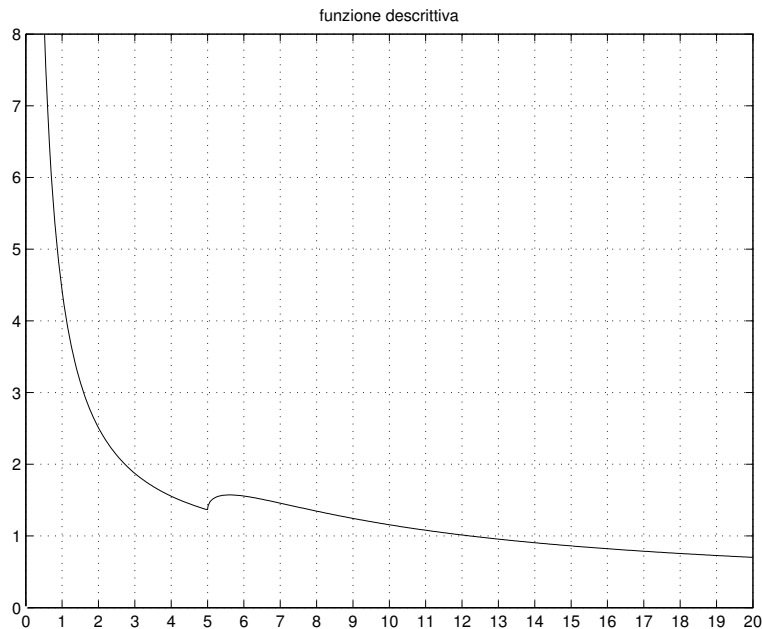


Figura 6: andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ quando $\mathbf{a} = 3$ e $\mathbf{b} = 5$.

$X = 5$:

$$m_1 = F(X)|_{X=5} = \frac{4\mathbf{a}}{5\pi} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \quad \xrightarrow{\mathbf{a}=3, \mathbf{b}=5} \quad m_1 = 1.3639$$

Indichiamo inoltre con m_2 il massimo locale nell'intorno di $X \simeq 5.5$ e con m_3 il valore finale a cui tende la funzione $F(X)$ per $X \rightarrow \infty$:

$$m_3 = F(X)|_{X \rightarrow \infty} = \frac{1}{\mathbf{b}} \quad \xrightarrow{\mathbf{a}=3, \mathbf{b}=5} \quad m_3 = 0.2$$

c.4) Discutere “qualitativamente”, anche in funzione dei parametri $m_1, m_2 \dots$, l’esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K_1^* del sistema $G_1(s)$ è $K_1^* = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, vedi c.2). Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K G_1(s)$ è $K^* = \frac{K_1^*}{K} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2K}$. Al variare di K^* vale la seguente analisi qualitativa del comportamento dinamico del sistema retroazionato:

a) Per $K^* > m_2$ il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

b) Per $m_1 < K^* < m_2$, il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in tre punti a cui corrispondono due cicli limite stabili (quelli esterni) e un ciclo limite instabile (quello intermedio).

c) Per $m_3 < K^* < m_1$ il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

d) Per $K^* < m_3$, la funzione $-1/F(X)$ è tutta interna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e il sistema retroazionato è instabile.

c.5) Posto $K = 1$, determinare l’ampiezza X^* e la pulsazione ω^* dell’eventuale ciclo limite presente nel sistema retroazionato per $X^* < \mathbf{b}$.

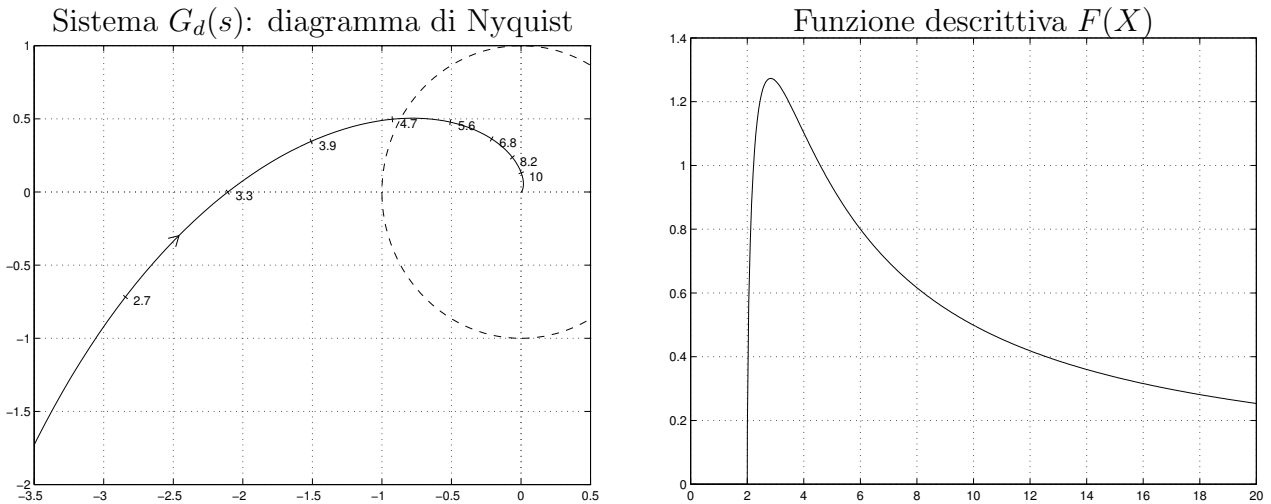
Sol. Posto $K = 1$, l’ampiezza X^* dell’eventuale ciclo limite presente nel sistema retroazionato si determina imponendo $F(X^*) = K_1^*$:

$$F(X^*) = \frac{4\mathbf{a}}{\pi X^*} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} = K_1^* \quad \longrightarrow \quad X^* = \frac{8\mathbf{a}\mathbf{b}}{\pi[\mathbf{b}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - 2\mathbf{a}]}$$

La pulsazione ω^* del corrispondente ciclo limite coincide con la pulsazione ω_1^* di intersezione della $G_1(s)$ con il semiasse reale negativo calcolata al punto c.2):

$$\omega^* = \omega_1^* = \sqrt{\mathbf{a}\mathbf{b}}.$$

d) Sia dato il diagramma di Nyquist di un sistema $G_d(s)$ posto in retroazione negativa su di una non linearità $y = y(x)$ di cui viene fornita la funzione descrittiva $F(X)$.



d.1) Nei limiti della precisione dei grafici forniti, determinare l’ampiezza X^* , la pulsazione ω^* e la stabilità degli eventuali cicli limite presenti nel sistema retroazionato.

Sol. Dal diagramma di Nyquist della funzione $G_d(s)$ si può leggere chiaramente il margine di ampiezza K_d^* del sistema e la pulsazione ω_d^* di attraversamento del semiasse reale negativo:

$$K_d^* \simeq -\frac{1}{-2.2} = 0.4545, \quad \omega_d^* = 3.3.$$

Gli eventuali cicli limite si determinano imponendo $F(X) = K_d^*$. Utilizzando il grafico della funzione $F(X)$ si individuano due cicli limite:

$$X_1^* \simeq 2.01, \quad X_2^* \simeq 11$$

il primo instabile e il secondo stabile. La pulsazione ω^* di entrambi i cicli limite è $\omega^* = \omega_d^* = 3.3$.

- d.2) Progettare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete correttiva $C_d(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ da mettere in cascata al sistema $G_d(s)$ in modo che il sistema retroazionato abbia un ciclo limite stabile di ampiezza $X^* = 6$ in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 2.7$.

Sol. Dal grafico della funzione $F(X)$ risulta chiaro che nel sistema retroazionato è presente un ciclo limite stabile $X^* = 6$ solo se il margine di ampiezza del sistema $C_d(s)G_d(s)$ vale $K^* = F(X)|_{X=4} = 0.8$. Tale valore identifica completamente il modulo e la fase del punto $B = -\frac{1}{K^*}$ da utilizzare nella sintesi della rete correttiva:

$$M_B = \frac{1}{0.8} = 1.25, \quad \varphi_B = 180^\circ$$

In punto A è completamente determinato dalla specifica sulla pulsazione $\omega^* = 2.7$. Il modulo e la fase del punto A si ricavano in modo approssimato dal grafico:

$$M_A = 2.932, \quad \varphi_A = 194.1^\circ.$$

I parametri da utilizzare nelle formule di inversione sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.4263, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -14.15^\circ$$

La rete ritardatrice che si ottiene utilizzando le formule di inversione è la seguente:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi} = 0.8233, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi} = 2.085 \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{1 + 0.8233 s}{1 + 2.085 s}$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_d(s)$ e $C_d(s)G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 7.

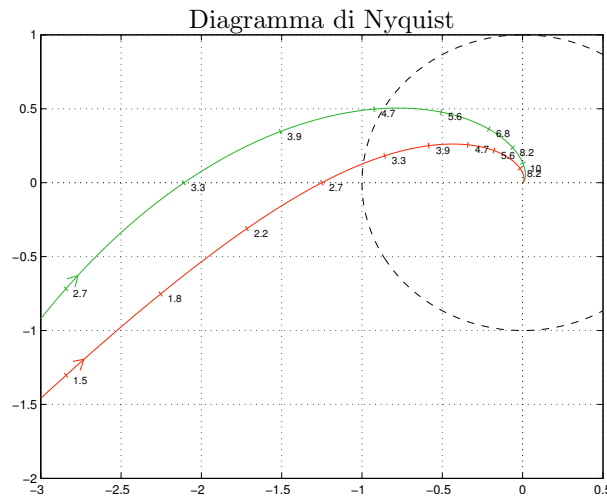


Figura 7: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_d(s)$ e $C_d(s)G_d(s)$.

- e) Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare la seguente rete correttiva:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \mathbf{a} \frac{s + 1}{s + \mathbf{b}}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.04$. Per chi ha $\mathbf{b} = 1$, porre $\mathbf{b} = 2$ in modo che non avvenga la cancellazione polo-zero all'interno della funzione $D(s)$.

Sol. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene:

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \mathbf{a} \frac{2(1-z^{-1}) + T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1}) + \mathbf{b}T(1+z^{-1})} = \frac{\mathbf{a}[T+2+(T-2)z^{-1}]}{\mathbf{b}T+2+(\mathbf{b}T-2)z^{-1}}$$

Posto $\mathbf{a} = 3$, $\mathbf{b} = 5$ e $T = 0.04$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{3.12 - 5.88 z^{-1}}{2.2 + 1.8 z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione:

$$M(z)(2.2 + 1.8 z^{-1}) = E(z)(3.12 - 5.88 z^{-1})$$

ottenendo:

$$m(k) = 0.8182 m(k-1) + 2.782 e(k) - 2.673 e(k-1)$$

- f) Calcolare la risposta all'impulso unitario $x(n) = (1, 0, 0, \dots)$ del seguente sistema dinamico discreto, partendo da condizioni iniziali nulle:

$$y(n+2) - 0.25 y(n) = \mathbf{b} x(n+1)$$

Sol. Applicando la Z-trasformata alla precedente equazione alle differenze si ottiene:

$$z^2 Y(z) - 0.25 Y(z) = \mathbf{b} z X(z)$$

Esprimendo $Y(z)$ in funzione di $X(z)$ e tenendo presente che $X(z) = 1$ si ottiene:

$$Y(z) = \frac{\mathbf{b} z}{z^2 - 0.25} X(z) = \frac{\mathbf{b} z}{(z - 0.5)(z + 0.5)}$$

Scomponendo in fratti semplici si ottiene:

$$Y(z) = \mathbf{b} z \left[\frac{1}{(z - 0.5)} - \frac{1}{(z + 0.5)} \right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(n) = \mathbf{b} [(0.5)^n - (-0.5)^n]$$

Controlli Automatici B
6 Aprile 2009 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. La risposta al test è considerata corretta solo se tutte le affermazioni corrette sono state contrassegnate.

1. Scrivere la formula che esprime il centro degli asintoti σ_a del luogo delle radici di un sistema $G(s)$ avente n poli p_i ed m zeri z_i :

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m} (\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i)$$

2. Dato il sistema $G(s) = N(s)/D(s)$, tutte le radici “doppie” del corrispondente luogo delle radici che sono presenti sull’asse reale si determinano risolvendo, rispetto ad s , l’equazione:

$\frac{dG(s)}{ds} = 0$

$\frac{d}{ds}[1 + K G(s)] = 0$

$\frac{dD(s)}{ds} + K \frac{dN(s)}{ds} = 0$

$\frac{dN(s)}{ds} D(s) - \frac{dD(s)}{ds} N(s) = 0$

3. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell’equazione caratteristica al variare (da 0 all’infinito)

delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero;

di un qualunque parametro che compare nell’equazione caratteristica;

di un qualunque parametro che entra linearmente nell’equazione caratteristica.

4. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{1}{s(s^2+6s+25)}$ al variare del parametro $K > 0$. Utilizzando, quando è possibile, il teorema del baricentro calcolare:

- 4.1) L’ascissa σ_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

$$\sigma_0 = -2$$

- 4.2) Il valore K_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

$$K_0 = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=-2} = 34$$

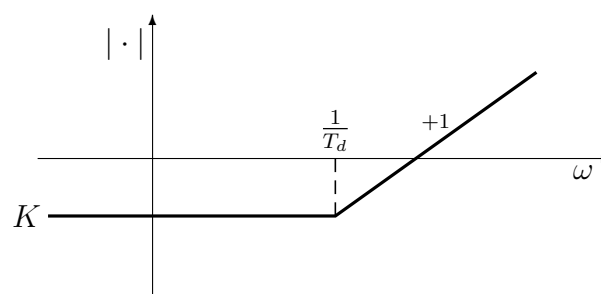
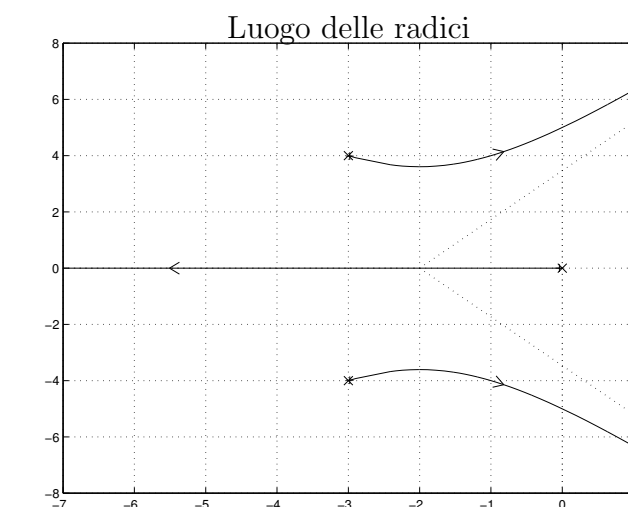
- 4.3) La posizione p_1^* del polo sull’asse reale quando gli altri 2 poli si trovano sull’asse immaginario $p_{2,3}^* = \pm j\omega^*$ e il corrispondente valore del guadagno K^* :

$$p_1^* = \sum_{i=1}^n p_i = -6,$$

$$K^* = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=-6} = 150$$

5. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un regolatore standard PD e a fianco disegnare qualitativamente il corrispondente diagramma di Bode dei moduli:

$$G(s) = K(1 + T_d s)$$



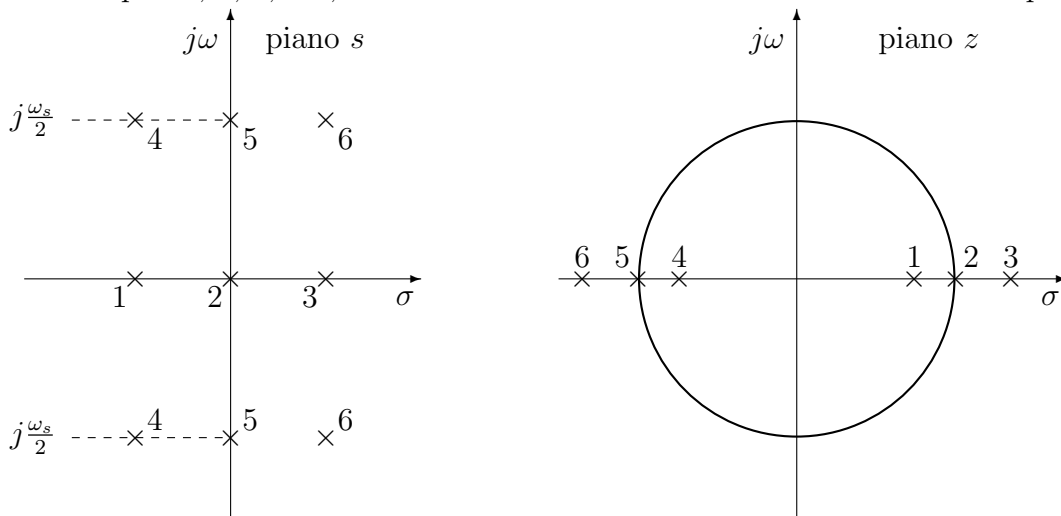
6. Tipicamente, quali delle seguenti reti correttive è bene utilizzare se si vuole migliorare il transitorio di un sistema in retroazione caratterizzato da un margine di ampiezza leggermente maggiore di 1?

- una rete anticipatrice;
- una rete ritardatrice;
- un regolatore PD;
- un regolatore PI;

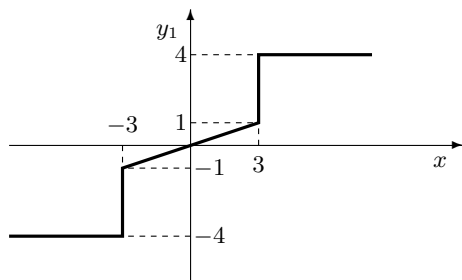
7. Calcolare la soluzione $y(n)$ della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale $y(0) = y_0$:

$$y(n+1) - 0.3y(n) = 0 \quad \rightarrow \quad y(n) = y_0(0.3)^n$$

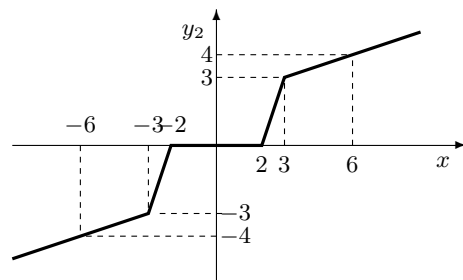
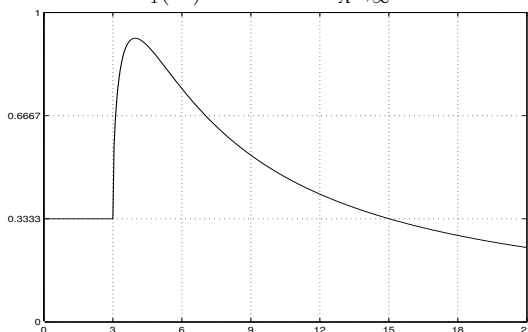
8. In base al legame teorico esistente tra il piano s e il piano z , tracciare qualitativamente sul piano z le posizioni dei poli 1, 2, 3, ..., 6 che sono stati evidenziati con delle crocette sul piano s :



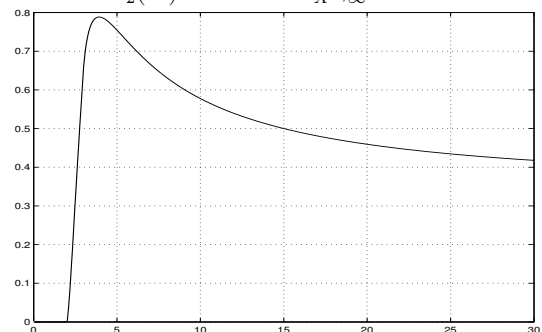
9. Date le seguenti caratteristiche non lineari simmetriche rispetto all'origine, determinare "qualitativamente" gli andamenti delle corrispondenti funzioni descrittive $F_1(X)$ ed $F_2(X)$:



$F_1(X)$ tale che $\lim_{X \rightarrow \infty} = 0$



$F_2(X)$ tale che $\lim_{X \rightarrow \infty} = 0.333$



10. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y(n) = -2y(n-1) - 3y(n-2) + 4x(n-1) + 6x(n-2) \quad \rightarrow \quad G(z) = \frac{4z^{-1} + 6z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}$$