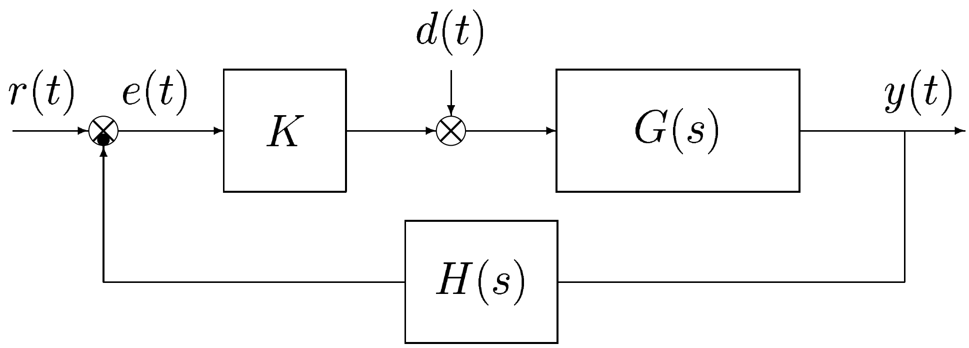
STABILITÀ E SISTEMI IN RETROAZIONE

Definizioni e teoremi relativi alla stabilità

- Si faccia riferimento al seguente sistema dinamico retroazionato:



- La funzione di trasferimento $G_0(s)$ del sistema retroazionato è:

$$G_0(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)H(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Equazione caratteristica del sistema retroazionato

$$1 + K\,G(s)H(s) = 0$$

- La stabilità del sistema retroazionato è univocamente determinata dalla posizione sul piano complesso dei poli della funzione $G_0(s)$, cioè dagli zeri dell'equazione caratteristica.

- Per determinare se $G_0(s)$ è stabile o meno, in realtà non è necessario sapere la posizione esatta dei poli, è sufficiente sapere se essi si trovano o meno tutti a sinistra dell'asse immaginario.

- Il criterio di Routh permette di determinare se un sistema retroazionato è stabile senza dover calcolare esattamente la posizione delle radici stesse.

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

con $a_n > 0$ e $a_0 \neq 0$

- *Condizione* __*necessaria*__ *affinchè le radici dell'equazione caratteristica abbiano tutte parte reale negativa è che tutti i coefficienti siano positivi*

$$a_n > 0, \quad a_{n-1} > 0, \quad \ldots, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$$

- Data l'equazione caratteristica

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

- La **Tabella di Routh** si costruisce nel modo seguente:

$$\begin{array}{r|cccc}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\
 & \downarrow \quad \nearrow & \downarrow \quad \nearrow & \downarrow \quad \nearrow & \downarrow \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\
 & & & & \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \ldots \\
 & & & & \\
n-3 & c_{n-3} & c_{n-5} & \ldots &
\end{array}$$

dove

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \qquad b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \quad \ldots$$

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}}, \qquad c_{n-5} = \frac{b_{n-2}a_{n-5} - a_{n-1}b_{n-6}}{b_{n-2}}, \quad \ldots$$

- **Criterio di Routh**: *ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella di Routh corrisponde una radice a parte reale positiva, ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa.*

- Esempio:

$$s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0 \qquad \rightarrow \qquad (s+1)(s-2)(s-3) = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{r|cc}
3 & 1 & 1 \\
2 & -4 & 6 \\
1 & \frac{-4-6}{-4} = 2.5 & 0 \\
0 & \frac{2.5 \cdot 6}{2.5} = 6 &
\end{array}$$

Vi sono due variazioni di segno per cui l'equazione ha due radici a parte reale positiva.

- Esempio:

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 2 & 3 & 10 \\
3 & 1 & 5 & 0 \\
2 & -7 & 10 & \\
1 & \frac{45}{7} & 0 & \\
0 & 10 & &
\end{array}$$

2 variazioni $\rightarrow$
2 radici a parte reale negativa

- Il criterio di Routh rimane valido anche se si moltiplica tutti i termini di una stessa riga per un coefficiente positivo

$$4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 4 & 5 & 1 \\
3 & 3 & 2 & 0 \\
2 & 7 & 3 & \\
1 & 5 & 0 & \\
0 & 3 & &
\end{array}$$

riga 2: $\leftarrow$ non si è diviso per 3
riga 1: $\leftarrow$ non si è diviso per 7

Tutte le radici sono a parte reale negativa.

- Casi Particolari: a) Se il primo termine di una riga è nullo:

$$s^3 + 3s - 2 = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 3 \\
2 & \epsilon & -2 \\
1 & 2 & \\
0 & -2 &
\end{array} \qquad (3\epsilon + 2)_{\epsilon \to 0}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 3 \\
2 & -\epsilon & -2 \\
1 & -2 & \\
0 & -2 &
\end{array} \qquad (\frac{-3\epsilon+2}{-\epsilon})_{\epsilon \to 0}$$

Lo zero viene sostituito con una quantità ϵ positiva (o negativa) che poi si fa tendere a zero.

- Casi Particolari: b) Tutti i termini di una riga sono nulli.

  Una situazione di questo tipo può accadere solamente in una riga dispari, per esempio la $(2m-1)$-esima riga:

$$\begin{array}{r|cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2m & b_{2m} & b_{2m-2} & \dots & b_0 \\ 2m-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}$$

  Le variazioni e le permanenze della tabella fino alla riga $2m$ determinano univocamente le prime $n-2m$ radici dell'equazione data.

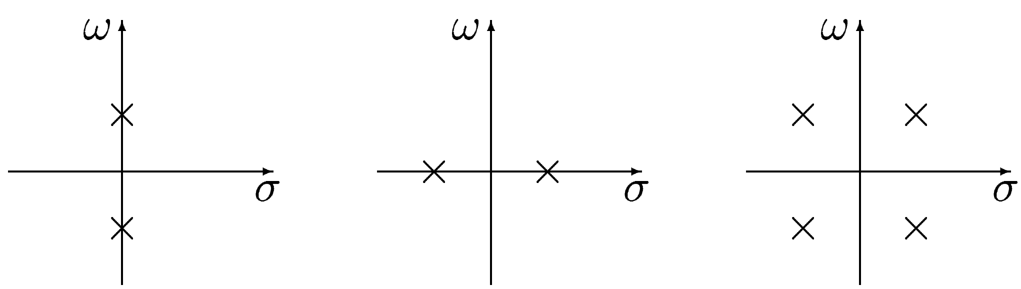
  Le altre $2m$ radici dell'equazioni di detreminano come soluzioni della seguente equazione ausiliaria:

$$b_{2m}s^{2m} + b_{2m-2}s^{2m-2} + \dots + b_2 s^2 + b_0 = 0$$

  Ponendo $z = s^2$ si ottiene una equazione di grado m.

- Le soluzioni dell'equazione ausiliaria sono un sottoinsieme delle soluzioni dell'equazione caratteristica di partenza.

- Le $2m$ radici dell'equazione ausiliaria sono sempre simmetriche rispetto all'origine del piano complesso:



  Quindi ad ogni radice a parte reale positiva corrisponde una redice a parte reale negativa.

- Se l'equazione caratteristica è di ordine > 4, l'equazione ausiliaria non è direttamente risolubile per cui si deriva l'equazione ausiliaria, i coefficienti del polinomio ottenuto si sostituiscono alla riga tutta nulla e si procede nella costruzione della tabella di Routh.

- Esempio:

$$s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|rrr} 4 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

Le prime due radici: 1 a parte reale negativa (permanenza) e 1 a parte reale positiva (variazione). L'equazione ausiliaria è

$$-2s^2 + 2 - 0 \qquad \to \qquad s_1 = 1, \;\; s_2 = -1$$

Derivando è possibile proseguire nella costruzione della tabella:

$$\begin{array}{c|rr} 2 & -2 & 2 \\ \hline 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & \end{array}$$

Una permanenza e una variazione di segno $\to$ una radice a parte reale negativa e una a parte reale positiva.

- Esempio:

$$s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|rrrr} 6 & 1 & -2 & -7 & -4 \\ 5 & 1 & -3 & -4 & \\ 4 & 1 & -3 & -4 & \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Equazione ausiliaria:

$$s^4 - 3s^2 - 4 = 0 \quad \to \quad s^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases} \quad \to \quad s = \begin{cases} 2 \\ -2 \\ j \\ -j \end{cases}$$

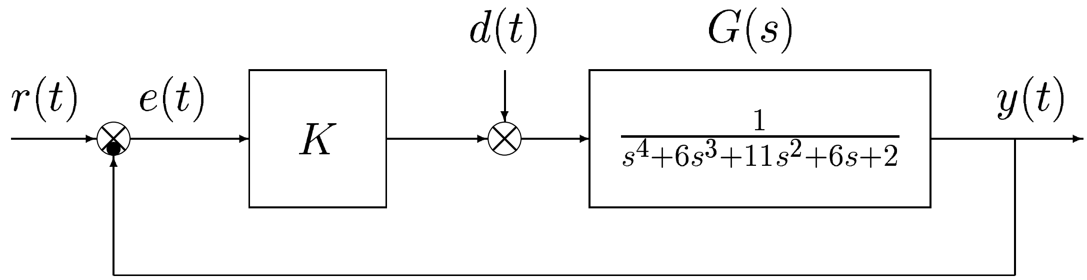
- Allo stesso risultato si giunge derivande l'equazione caratteristica:

$$\begin{array}{c|rrr}
4 & 1 & -3 & -4 \\
\hline
3 & 4 & -6 & \\
2 & -6 & -16 & \\
1 & -100 & 0 & \\
0 & -16 & &
\end{array}$$

  Avvertenza: dopo aver derivato l'equazione ausiliaria, le permanenze che non sono "bilanciate" da un uqual numero di variazioni debbono essere interpretate come radici appartenenti all'asse immaginario (per la simmetria delle radici dell'equazione ausiliaria).

- Il criterio di Routh, essendo un criterio necessario e sufficiente, è molto utile per determinare le condizioni di stabilità al variare di un parametro qualsiasi presente all'interno dell'equazione caratteristica.

- Esempio:



- Funzione di trasferimento del sistema retroazionato:

$$G_0(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)}$$

- Equazione caratteristica:

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K + 2 = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 11 & K+2 \\ 3 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & 10 & K-2 & \\ 1 & 48-6K & 0 & \\ 0 & K+2 & & \end{array}$$

Condizioni per la stabilità asintotica:

$$48 - 6K > 0, \qquad\qquad K + 2 > 0$$

Il sistema, quindi, risulta asintoticamente stabile per i seguenti valori di K:

$$-2 < K < 8$$

Per i valori limite si ha stabilità semplice: per $K = -2$ un polo è nell'origine; per $K = 8$ il sistema ha due poli complessi coniugati sull'asse immaginario.

Il criterio di Routh è lo strumento più semplice ed efficacie per calcolare "esattamente" le condizioni di stabilità di un sistema retroazionato al variare dei parametri del sistema stesso. È bene ricordare che:

- Il criterio di Routh *è un criterio necessario e sufficiente* per cui i risultati da esso forniti sono "esatti".
- L'analisi di stabilità può essere fatta rispetto ad un parametro qualsiasi del sistema e non solo al variare del guadagno K. È possibile eseguire l'analisi di stabilità anche al variare di più parametri contemporaneamente.
- Nella costruzione della tabella di Routh è possibile moltiplicare tutti gli elementi di una riga per lo stesso valore "positivo" senza modificare i risultati dell'analisi di stabilità.
- Se nella costruzione della tabella si ottiene una riga tutta nulla (può accadere solo per una riga dispari), gli zeri dell'equazione ausiliaria che si ottiene dalla riga precedente (riga pari) sono un sottoinsieme degli zeri dell'equazione caratteristica di partenza. Le soluzioni dell'equazione ausiliaria sono simmetriche rispetto all'origine cioè sono simmetriche sia rispetto all'asse reale che all'asse immaginario.
- L'utilizzo del criterio di Routh permette di determinare anche le pulsazioni ω delle oscillazioni periodiche che si instaurano nel sistema retroazionato in corrispondenza dei valori limite dei parametri per quanto riguarda la stabilità.

Analisi di stabilità di alcuni semplici sistemi

1) Un sistema che si incontra molto frequentemente nello studio dei sistemi dinamici è il seguente:

$$G_1(s) = \frac{\alpha}{s(s+a)(s+b)}$$

L'equazione caratteristica del corrispondente sistema retroazionato è:

$$s^3 + (a+b)s^2 + a\,b\,s + \alpha K = 0$$

Dalla tabella di Routh

$$\begin{array}{c|ll} 3 & 1 & ab \\ 2 & a+b & \alpha K \\ 1 & (a+b)ab - \alpha K & \\ 0 & \alpha K & \end{array}$$

si determina immediatamente che il sistema retroazionato è stabile per $0 < K < K^*$. Il valore limite K^* e la corrispondente pulsazione ω^* sono i seguenti:

$$K^* = \frac{(a+b)ab}{\alpha}, \qquad \omega^* = \sqrt{ab} \tag{1}$$

In questo caso il valore limite K^* coincide con il margine di ampiezza $M_\alpha = K^*$ del sistema.

2) Per il sistema

$$G_2(s) = \frac{(s+c)}{s(s+a)(s+b)}$$

si ha invece l'equazione caratteristica

$$s^3 + (a+b)s^2 + (a\,b + K)\,s + K\,c = 0$$

da cui si ricava la tabella di Routh

$$\begin{array}{c|ll} 3 & 1 & ab+K \\ 2 & a+b & K\,c \\ 1 & (a+b)(ab+K) - K\,c & \\ 0 & K\,c & \end{array}$$

$c > a+b$, e per $K > 0$ se $c < a+b$. I valori di K^* ed ω^* corrispondenti alla stabilità critica sono:

$$K^* = \frac{(a+b)ab}{c-a-b}, \qquad \omega^* = \sqrt{\frac{abc}{c-a-b}}$$

Calcolo della pulsazione limite ω^*

Relativamente al calcolo della pulsazione limite ω^*, vale la seguente proprietà. *Sia data un'equazione caratteristica del terzo ordine*

$$a_3(K)s^3 + a_2(K)s^2 + a_1(K)s + a_0(K) = 0$$

dove i coefficienti $a_i(K)$ $(i = 0, \ldots, 3)$ *sono funzioni di un parametro variabile* K. *La pulsazione* ω^* *corrispondente al valore limite* K^* *può essere calcolata utilizzando la seguente formula:*

$$\omega^* = \sqrt{\frac{a_0(K^*)}{a_2(K^*)}} = \sqrt{\frac{a_1(K^*)}{a_3(K^*)}} \tag{2}$$

Nel caso invece in cui l'equazione caratteristica sia del quarto ordine:

$$a_4(K)s^4 + a_3(K)s^3 + a_2(K)s^2 + a_1(K)s + a_0(K) = 0$$

la pulsazione ω^* *si determina utilizzando la seguente formula:*

$$\omega^* = \sqrt{\frac{a_1(K^*)}{a_3(K^*)}} \tag{3}$$

Infatti, nel caso di equazione caratteristica del terzo ordine, la tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & a_3(K) & a_1(K) \\ 2 & a_2(K) & a_0(K) \\ 1 & a_2(K)a_1(K) - a_0(K)a_3(K) & \\ 0 & a_0(K) & \end{array}$$

In corrispondenza del valore limite K^* il coefficiente della riga 1 si annulla, per cui si ha

$$a_2(K*)a_1(K^*) - a_0(K^*)a_3(K^*) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{a_0(K^*)}{a_2(K*)} = \frac{a_1(K^*)}{a_3(K^*)} \tag{4}$$

relativa alla riga 2:

$$a_2(K^*)s^2 + a_0(K^*) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \omega^* = \sqrt{\frac{a_0(K^*)}{a_2(K^*)}} \tag{5}$$

La relazione (2) si ottiene combinando tra loro le relazioni (4) e (5). Nel caso invece in cui l'equazione caratteristica sia del 4 ordine, la tabella di Routh assume la seguente forma:

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & a_4(K) & a_2(K) & a_0(K) \\
3 & a_3(K) & a_1(K) & \\
2 & a_2(K)a_3(K) - a_4(K)a_1(K) & a_3(K)a_0(K) & \\
1 & (*) & & \\
0 & a_3(K)a_0(K) & &
\end{array}$$

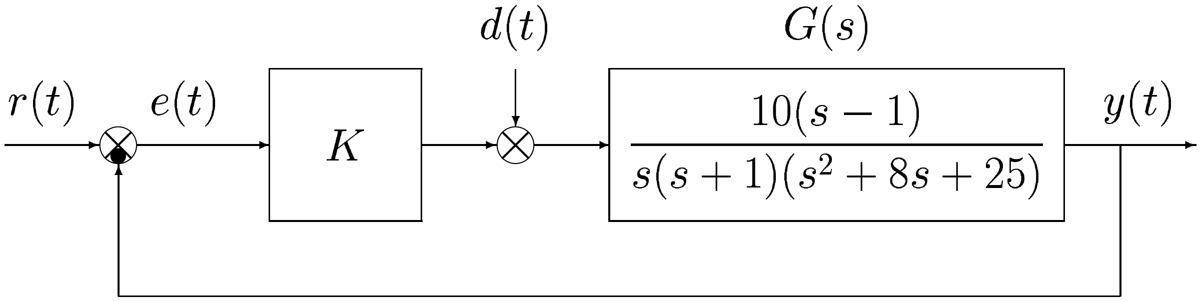
Il valore limite ω^* si ricava dall'equazione ausiliaria ottenuta dalla riga 2 in corrispondenza del valore di K^* che annulla la riga 1. Per tale valore le righe 2 e 3 della tabella di Routh sono proporzionali fra di loro, per cui si ha che

$$\omega^* = \sqrt{\frac{a_3(K^*)a_0(K^*)}{a_2(K^*)a_3(K^*) - a_4(K^*)a_1(K^*)}} \qquad \rightarrow \qquad \omega^* = \sqrt{\frac{a_1(K^*)}{a_3(K^*)}}$$

cioè vale la relazione (3).

Esempio

Determinare per quali valori di K il seguente sistema retroazionato



è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema è

$$1 + \frac{10K(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)} = 0$$

cioè

$$s^4 + 9s^3 + 33s^2 + (25+10K)s - 10K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 33 & -10K \\ 3 & 9 & 25+10K & \\ 2 & 272-10K & -90K & \\ 1 & (272-10K)(25+10K)+810K & & \\ 0 & -90K & & \end{array} \qquad (6)$$

Si noti che essendo richiesto solamente lo studio degli intervalli di stabilità al variare di K, nella costruzione della tabella vi può evitare di dividere gli elementi di una riga per il primo coefficiente della riga precedente in quanto tale elemento dovrà necessariamente essere positivo affinchè il sistema retroazionato sia stabile. Per esempio, nella costruzione della tabella (6) la riga 2 non è stata divisa per 9 e la riga 1 non è stata divisa per $272 - 10K$. In questo caso il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se tutti gli elementi della prima colonna sono positivi, cioè se gli ultimi tre elementi della prima colonna sono positivi:

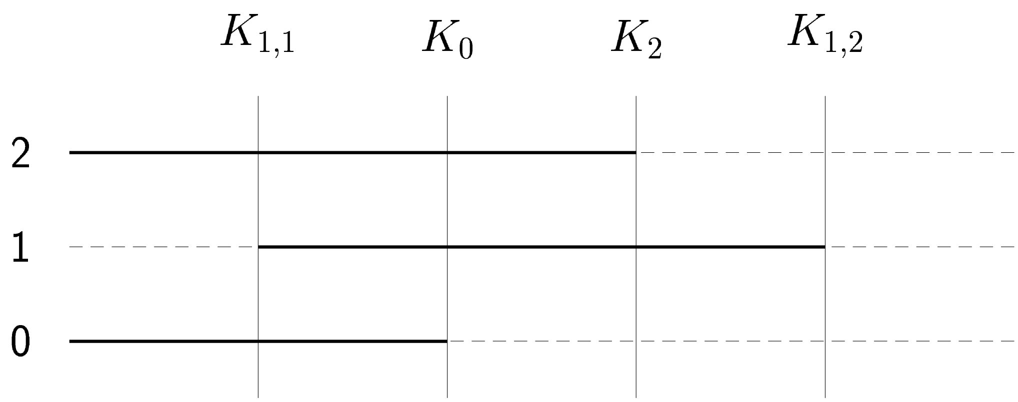
2) $272 - 10\,K > 0$ 1) $340 + 164K - 5K^2 > 0$ 0) $-\,90\,K > 0$

$$2)\ \ K_2 = 27.2, \quad 1)\ \ K_{1,*} = \begin{cases} K_{1,1} = \frac{164-\sqrt{33696}}{10} = -1.956 \\ K_{1,2} = \frac{164+\sqrt{33696}}{10} = 34.7565 \end{cases} \quad 0)\ \ K_0 = 0$$

Si ha quindi stabilità asintotica se valgono le seguenti tre disequazioni:

$$2)\ \ K < K_2 \qquad\qquad 1)\ \ K_{1,1} < K < K_{1,2} \qquad\qquad 0)\ \ K < K_0$$

La rappresentazione grafica di queste tre disequazioni è la seguente:



Da tale figura risulta chiaro che l'unico intervallo di stabilità al variare di K è:

$$K_{1,1} < K < K_0 \qquad\qquad \leftrightarrow \qquad\qquad -1.956 < K < 0$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K_{1,1}$ si determina utilizzando la relazione (3):

$$\omega^* = \sqrt{\frac{a_1(K_{1,1})}{a_3}} = \sqrt{\frac{25 + 10K_{1,1}}{9}} = 0.7771$$

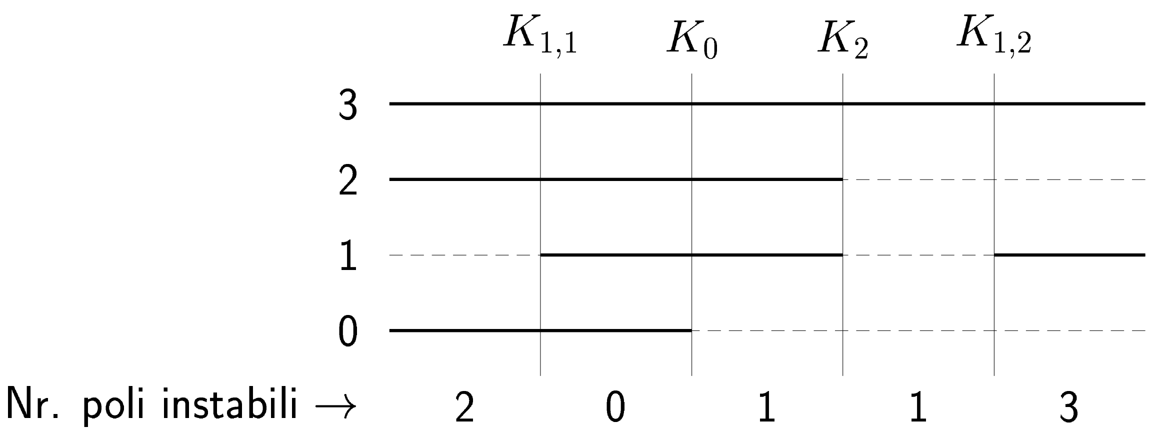
Se invece si volesse utilizzare il criterio di Routh per determinare, per ogni valore di K, il numero di poli a parte reale positiva, occorrerebbe fare riferimento alla seguente tabella di Routh

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 33 & -10K \\ 3 & 9 & 25+10K & \\ 2 & 272-10K & -90K & \\ 1 & \dfrac{(272-10K)(25+10K)+810K}{272-10K} & & \\ 0 & -90K & & \end{array} \tag{7}$$

elementi della prima colonna è essenziale, nella costruzione della tabella, dividere sempre gli elementi di una riga per il primo elemento della riga precedente a meno che questo sia sempre positivo per ogni valore di K. In questo caso, gli ultimi tre elementi della prima colonna della tabella (7) sono positivi all'interno dei seguenti intervalli

$$2)\;\; K < K_2 \qquad 1)\;\; K_{1,1} < K < K_2 \text{ e } K > K_{1,2} \qquad 0)\;\; K < K_0 \tag{8}$$

Questi intervalli di positività al variare di K sono i seguenti:



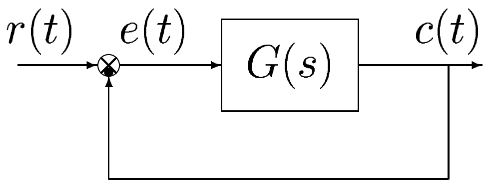
Contando le variazioni, da tale figura si ricava direttamente il numero di poli a parte reale positiva del sistema retroazionato al variare del parametro K:

per	$K < K_{1,1}$	$\rightarrow$	il sistema ha 2 poli instabili
per	$K_{1,1} < K < K_0$	$\rightarrow$	il sistema ha 0 poli instabili (stabilità)
per	$K_0 < K < K_{1,2}$	$\rightarrow$	il sistema ha 1 polo instabile
per	$K > K_{1,2}$	$\rightarrow$	il sistema ha 3 poli instabili

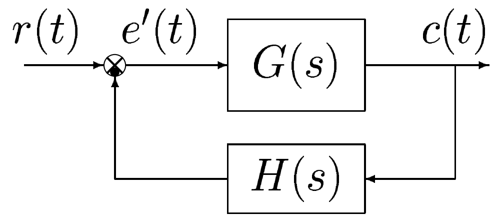
Errori a regime

Si faccia riferimento agli schemi retroazionati seguenti:

a) Retroazione unitaria



b) Retroazione non unitaria



Nel calcolo degli errori a regime per sistemi a retroazione unitaria, vedi Fig. ??.a, si utilizzano le seguenti formule

$$e_p = \frac{R_0}{1+K_p}, \qquad e_v = \frac{R_0}{K_v}, \qquad e_a = \frac{R_0}{K_a} \tag{9}$$

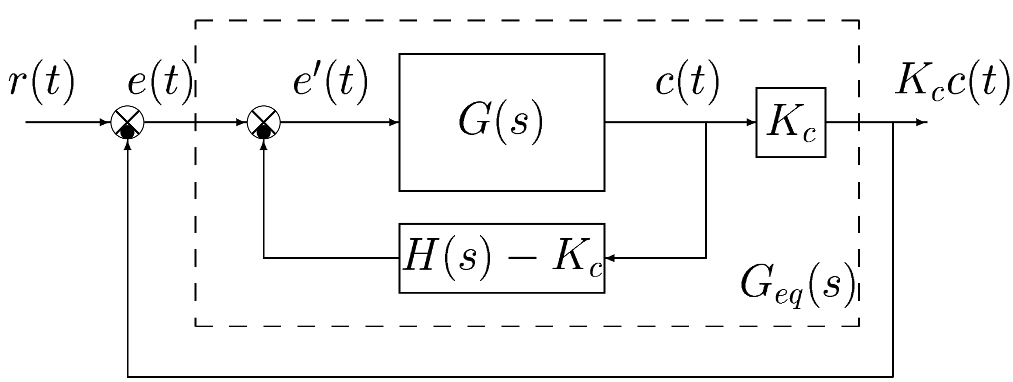
relative, rispettivamente, a segnali di ingresso a gradino $r(t) = R_0 u(t)$, a rampa $r(t) = R_0 t$ e a parabola $r(t) = \frac{R_0}{2} t^2$. Le costanti di posizione, di velocità e di accelerazione sono definite come segue

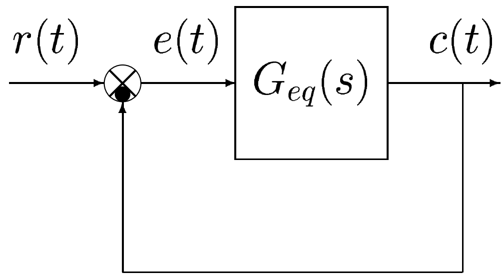
$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s), \qquad K_v = \lim_{s\to 0} sG(s), \qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento che lega l'errore $e(t)$ alla variabile controllata $c(t)$. Nel caso di sistemi a retroazione non unitaria, vedi Fig. ??.b, per poter calcolare gli errori a regime occorre prima di tutto definire qual è la variabile errore a cui si fa riferimento. Nel caso in cui l'errore sia

$$e(t) = r(t) - K_c c(t)$$

per poter utilizzare di nuovo le relazioni (9), occorre procedere ad una trasformazione dello schema a blocchi di Fig. ??.b che metta in evidenza l'errore desiderato e che abbia retroazione unitaria. Questo può essere ottenuto mediante la costruzione grafica seguente:





Tale costruzione grafica si ottiene aggiungendo e sottraendo allo schema di Fig. ??.b un ramo di retroazione con costante di proporzionalità K_c. In questo modo si crea un punto nello schema dove è presente l'errore desiderato $e(t) = r(t) - K_c c(t)$, ed inoltre si individua facilmente l'espressione della funzione di trasferimento $G_{eq}(s)$ del corrispondente sistema a retroazione unitaria

$$G_{eq}(s) = \frac{K_c G(s)}{1 + G(s)[H(s) - K_c]}$$

Sarà ora di nuovo possibile utilizzare le relazioni (9) per il calcolo degli errori a regime. Un altro valido ausilio per il calcolo degli errori a regime è il seguente:

Principio del modello interno. Si consideri lo schema a blocchi di Fig. ??.a e si faccia l'ipotesi che il sistema retroazionato sia stabile. Condizione necessaria e sufficiente affinchè la variabile controllata $c(t)$ possa inseguire con errore a regime nullo il segnale di ingresso $r(t)$ è che il sistema $G(s)$ abbia al proprio interno tutti i poli che caratterizzano il segnale di ingresso.

L'applicazione di tale principio al caso di segnali di ingresso a gradino, a rampa e a parabola

$$r(t) = R_0 u(t) \;\rightarrow\; R(s) = \frac{R_0}{s}, \qquad r(t) = R_0 t \;\rightarrow\; R(s) = \frac{R_0}{s^2}, \qquad r(t) = \frac{R_0}{2} t^2 \;\rightarrow$$

posta immediatamente alle note condizioni per cui, per questi segnali, l'errore a regime è nullo se il sistema $G(s)$ è, rispettivamente, di tipo 1, di tipo 2 e di tipo 3. La validità del principio del modello interno è più estesa e si applica, per esempio, anche al caso di segnali sinusoidali:

$$r(t) = A\ \sin(\omega t) \;\rightarrow\; R(s) = \frac{A\,\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$r(t) = A\cos(\omega t) \rightarrow R(s) = \frac{\quad}{s^2 + \omega^2}$$

In questo caso si avrà errore a regime nullo solamente se tra i poli del sistema $G(s)$ saranno presenti i due poli complessi coniugati $s_{1,2} = \pm j\omega$ che caratterizzano i segnali sinusoidali di ingresso.