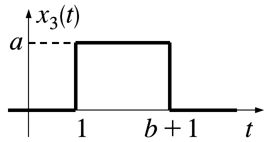
Controlli Automatici - Primo Compito
14 Novembre 2002 - Esercizi
Compito Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = a\,e^{-bt}\cos(10\,t), \qquad x_2(t) = a\,t^2\,e^{(a+b)\,t},$$



b) Date le seguenti funzioni di trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(a+b)s + 5a + b}{(s+1)(s+5)}, \qquad G_2(s) = \frac{a}{s^2(s+b)}, \qquad G_3(s) = \frac{16b}{s^2 + a^2}$$

b.1) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle funzioni di trasferimento $G_i(s)$;

b.2) Calcolare, in termini di ingresso $x(t)$ e di uscita $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla funzione $G_1(s)$;

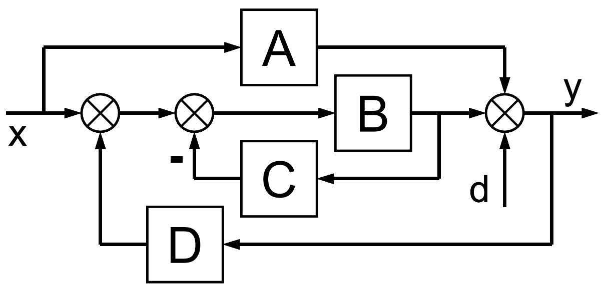
c) La dinamica di un sistema massa, molla e smorzatore sia descritta dalla seguente equazione differenziale: $\ddot{x} + b\,\dot{x} + K = F$ dove x è la posizione della massa ed F è la forza esterna applicata alla massa. Determinare il valore dei parametri b e K (rispettivamente coefficiente di attrito lineare e rigidità della molla) che permettano al sistema di avere una risposta al gradino di tipo oscillatorio smorzato con un tempo di assestamento di $T_a = 1$ s e un periodo dell'oscillazione $T = 2$ s;

$K =$, $b =$

d) Relativamente allo schema a blocchi riportato in figura, calcolare le funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{D(s)}$$

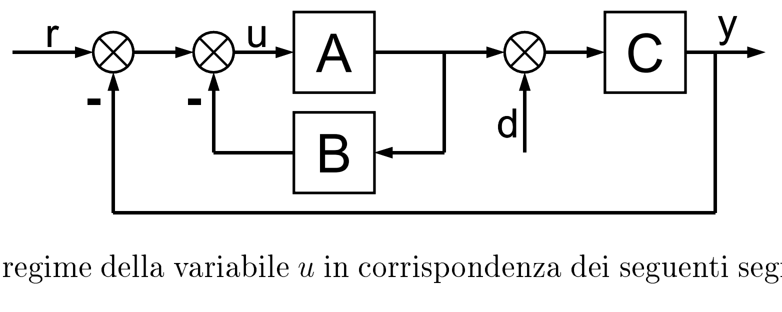


e) Relativamente allo schema a blocchi riportato in figura, posto

$$A = \frac{1}{s+1}$$

$$B = 1$$

$$C = \frac{1}{s+5}$$



calcolare il valore o l'andamento a regime della variabile u in corrispondenza dei seguenti segnali di ingresso:

e.1) $r = 3$ e $d = 5$;

e.2) $r = 0$ e $d = 2\,\sin(7t + \pi/4)$.

f) Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{30b^2(s+300)}{s(s-b)(s^2+3as+900)}$$

f.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$;

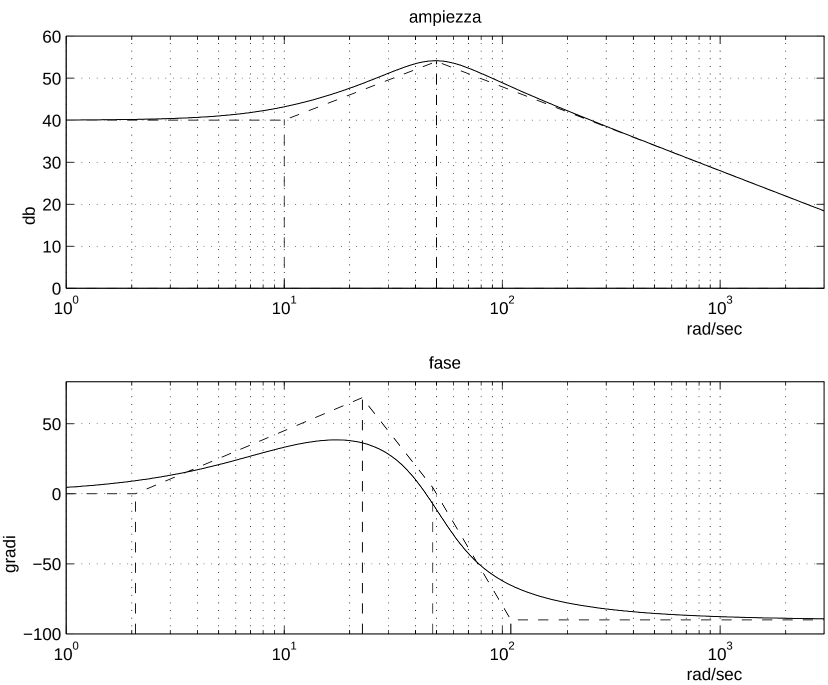
f.2) Leggere in modo approssimato dai diagrammi asintotici di Bode i valori del modulo e della fase della funzione $G(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 10a$: $|G(j\,10a)| = \ldots\ldots\ldots$ e $\arg[G(j\,10a)] = \ldots\ldots\ldots$

g) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

g.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = a + 5\cos(10b\,t + \pi/6)$;

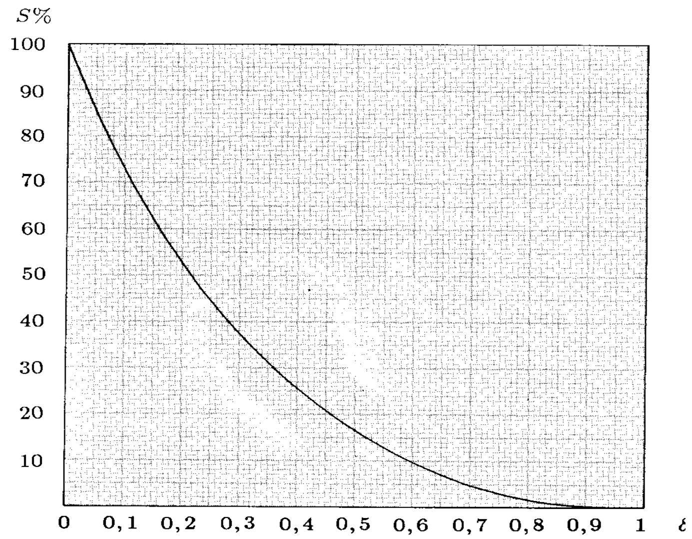
g.2) calcolare, sia per $\omega \to 0^+$ che per $\omega \to \infty$, $|G(j\omega)|$ e $\arg[G(j\omega)]$;

g.3) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente le la soluzione trovata.



h) Disegnare l'andamento qualitativo $y(t)$ della risposta al gradino unitario del sistema $G_1(s)$. Indicare la collocazione dei poli sul piano complesso, calcolare il guadagno statico K_0 e fornire una stima del tempo di assestamento T_a e del massimo valore dell'uscita y_M.

$$G_1(s) = \frac{5000}{(s+50)(s^2+3s+25)}$$



Controlli Automatici A - Primo Compito
14 Novembre 2002 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Per ciascuno dei seguenti test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono giuste. Alcuni test sono seguiti da più affermazioni giuste e si considerano superati quando "tutte" le affermazioni giuste sono contrassegnate.

1. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema lineare $G(s)$ asintoticamente stabile

   ⊗ è determinata univocamente dalla risposta all'impulso $g(t)$
   ⊗ determina univocamente la risposta all'impulso $g(t)$

2. Un sistema del 2^o ordine che ha un coefficiente di smorzamento $\delta > 1$ è caratterizzato da:

   ⊗ due poli reali distinti a parte reale negativa
   ○ due poli reali distinti a parte reale positiva
   ○ due poli complessi coniugati a parte reale negativa
   ○ due poli complessi coniugati a parte reale positiva

3. Per $\omega > 0$, il diagramma "reale" di Bode delle fasi della funzione $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode

   ○ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$ e $\omega_b = 4.81\omega_n$
   ⊗ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$
   ○ in nessun punto al finito

4. Se la pendenza del diagramma di Bode delle ampiezze di un sistema $G(s)$ è negativa per ogni valore della pulsazione, la corrispondente fase

   ○ è sempre negativa
   ⊗ può essere positiva
   ⊗ è negativa se il sistema è a fase minima

5. La stabilità di un sistema lineare a più ingressi e a più uscite

   ○ dipende dalla condizione iniziale del sistema
   ○ dipende da quale ingresso si considera
   ○ dipende da quale uscita si considera
   ⊗ nessuna delle precedenti

6. Un sistema del secondo ordine privo di zeri e caratterizzato da una coppia di poli complessi coniugati con coefficiente di smorzamento nullo ($\delta = 0$):

   ⊗ ha un guadagno statico finito
   ⊗ ha un picco di risonanza infinito $M_R \to \infty$
   ○ ha un picco di risonanza unitario $M_R = 1$
   ⊗ ha una massima sovraelongazione $S = 100\,\%$

7. La posizione dei due poli di un sistema del 2^o ordine privo di zeri è univocamente determinata se sono note le seguenti informazioni:

   ⊗ il coefficiente di smorzamento δ e tempo di assestamento T_a
   ○ la massima sovraelongazione S e il picco di risonanza M_R
   ⊗ il picco di risonanza M_R e pulsazione di risonanza ω_R

8. La formula di Bode per il calcolo della fase di un sistema a partire dal diagramma delle ampiezze
   - ◯ è una formula approssimata
   - ⊗ è una formula esatta
   - ◯ è valida per tutti sistemi lineari stabili
   - ⊗ è valida per tutti i sistemi lineari a fase minima

9. Un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati e privo di zeri, ha un picco di risonanza maggiore di uno, $M_R > 1$,
   - ◯ se $0 < \delta < 1$
   - ⊗ se $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$
   - ◯ se $0 < \delta < \frac{1}{2}$

10. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema lineare tempo invariante può essere determinata sperimentalmente per punti
    - ◯ se e solo se il sistema è stabile
    - ⊗ se e solo se il sistema è asintoticamente stabile
    - ◯ se e solo se il sistema è a fase minima
    - ◯ anche se il sistema è instabile

11. Indicare quali dei seguenti sistemi $G(s)$ sono a fase minima
    - ◯ $G(s) = e^{-t_0 s}$
    - ⊗ $G(s) = \frac{s+2}{s+3}$
    - ◯ $G(s) = \frac{s-2}{s+3}$
    - ◯ $G(s) = \frac{s+2}{s-3}$
    - ◯ $G(s) = \frac{s-2}{s-3}$

12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $K > 0$:

$$G(s) = \frac{K\,e^{-t_0 s}}{s} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{K}{\omega} \\ \varphi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2} - t_0\,\omega \end{cases}$$

13. Determinare il valore iniziale $g(0^+)$ (per $t = 0^+$) e il valore finale $g(\infty)$ (per $t = \infty$)della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2s+3}{s^2+4}$:

$$g(0^+) = 2\ , \qquad\qquad g(\infty) = \text{ il criterio non si può applicare}$$

Infatti l'antitrasformata della risposta impulsiva è $g(t) = \frac{5}{2}\cos(2t - 0.6435)$

14. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $\dot{y} + 3y = x$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 5$.

$$y(t) = 5\,e^{-3\,t},\ t > 0$$

Controlli Automatici - Primo Compito
14 Novembre 2002 - Soluzione degli esercizi

a) Le trasformate di Laplace dei segnali temporali sono:

$$X_1(s) = \frac{a\,(s+b)}{(s+b)^2+100}, \qquad X_2(s) = \frac{2\,a}{(s-(a+b))^3}, \qquad X_3(s) = \frac{a}{b}\,e^{-s}\,(1-e^{-bs})$$

b.1) Le risposte impulsive delle funzioni di trasferimento proposte sono:

$$g_1(t) = a\,e^{-t} + b\,e^{-5\,t}, \qquad g_2(t) = -\frac{a}{b^2} + \frac{a}{b}\,t + \frac{a}{b^2}\,e^{-b\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{16\,b}{a}\,\sin(a\,t)$$

b.2) L'equazione differenziale corrispondente all'equazione $G_1(s)$ è:

$$\ddot{y}(t) + 6\,\dot{y}(t) + 5\,y(t) = (a+b)\,\dot{x}(t) + (5\,a+b)x(t)$$

c) Dalla formula che fornisce il tempo di assestamento si ha:

$$\sigma = \delta\,\omega_n = \frac{3}{T_a} = 3, \qquad \omega = \frac{2\,\pi}{T} = \pi$$

da cui applicando il teorema di pitagora nel piano complesso:

$$K = \omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2 = \pi^2 + 9$$

inoltre per confronto si ha:

$$b = 2\,\delta\,\omega_n = 6$$

d) Usando la formula di Mason si può ricavare che:

$$G_1(s) = \frac{A(1+C\,B)+B}{1+C\,B-D\,B}, \qquad G_2(s) = \frac{1+C\,B}{1+C\,B-D\,B}$$

e.1) Se si considera la variabile $U(s)$ come uscita, applicando la sovrapposizione degli effetti e la formula di Mason, la funzione di trasferimento che la lega ai due ingressi r e d è:

$$U(s) = \frac{R(s)}{1+A(B+C)} - \frac{C\,D(s)}{1+A(B+C)} = \frac{(s+1)(s+5)\,3}{s\,(s^2+7\,s+11)} - \frac{(s+1)\,5}{s\,(s^2+7\,s+11)}$$

Applicando il teorema del valore finale risulta che:

$$u_\infty(t) = \lim_{s\to 0} s\,U(s) = \frac{10}{11}$$

e.2) Considerando agente il solo disturbo sinusoidale d, la funzione di trasferimento $G_D(s)$ è:

$$G_D(s) = \frac{U(s)}{D(s)} = -\frac{s+1}{s^2+7\,s+11}$$

Calcolando il modulo $|G_D(j\,7)| = 0.141$ e la fase $\arg(G_D(j\,7)) = 3.2$ rad della funzione di risposta armonica corrispondente si ha che:

$$u_\infty(t) = 0.283\,\sin(7\,t + \frac{\pi}{4} + 3.2)$$

f.1) In Fig. 3 sono mostrati i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della $G(s)$ per i valori dei parametri a=5 e b=7.

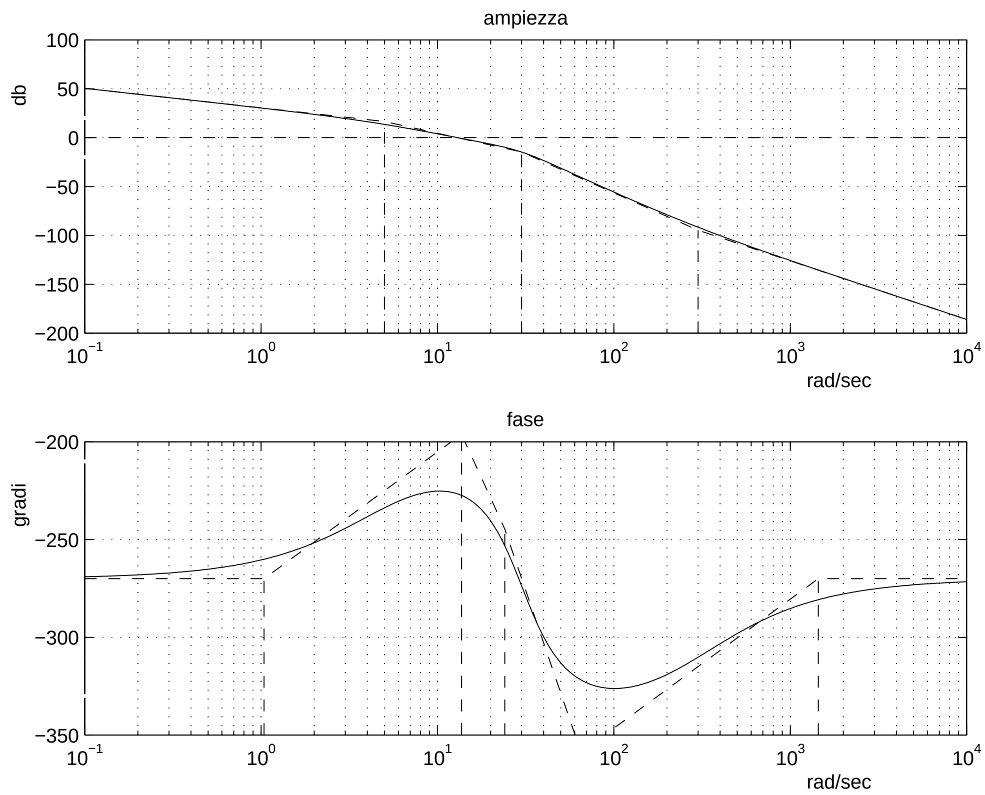


Figura 1: Diagrammi di Bode delle Ampiezze e delle Fasi per a=5 e b=7.

f.1) I valori del modulo e della fase della funzione di risposta armonica possono essere letti dai diagrammi di Bode (calcolati per a=5 e b=7):

$$|G(j\,50)| = -25\text{dB} = 17.78, \qquad \arg(G(j\,50)) = -330^o$$

f.2) Oppure possono essere calcolati analiticamente una volto fissati i valori dei parametri a e b:

$$|G(j\,10\,a)| = \frac{10\,b\left|1+j\dfrac{10a}{300}\right|}{\left|1-j\dfrac{10a}{b}\right|\left|1+j\dfrac{10a^2}{300}-\dfrac{100a^2}{900}\right|}$$

$$\arg(G(j\,10\,a)) = -\frac{3}{2}\pi + \arctan(\frac{a}{30}) + \arctan(\frac{10a}{b}) - \arctan(\frac{3a^2}{90-10a^2})$$

g.1) La risposta a regime del sistema è deducibile dal grafico leggendo i valori dei parametri $|G(0)|$, $|G(j\,10\,b)|$ e la fase $\arg(G(j\,10\,b))$ da cui:

$$y(t) = 100\,a + 5\,|G(j\,10\,b)|\,\cos\left[10\,b\,t + \frac{\pi}{6} + \arg(G(j\,10\,b))\right]$$

g.2) I risultati dei limiti sono i seguenti:

$$\lim_{\omega\to 0^+} |G(j\,\omega)| = 100, \qquad \lim_{\omega\to 0^+} \arg(G(j\,\omega)) = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} |G(j\,\omega)| = 0, \qquad \lim_{\omega\to\infty} \arg(G(j,\omega)) = -\frac{\pi}{2}$$

g.3) La funzione di trasferimento nella forma a *costanti di tempo* la si scrive guardando l'ordine di intervento dei poli e degli zeri:

– il guadagno statico: 40dB=100;
– uno zero per ω=10 rad/s;
– una coppia di poli complessi coniugati per ω_n=50 rad/s;
– per calcolare il parametro δ, si fa riferimento al diagramma delle fasi:22=50/4.81$^\delta$, da cui:

$$\delta = \frac{\ln \frac{50}{22}}{4.81} = 0.52$$

Complessivamente la funzione d trasferimento diventa:

$$G(s) = \frac{100\left(1 + \frac{s}{10}\right)}{\frac{s^2}{2500} + 2\frac{0.52}{50}s + 1}$$

h) la risposta al gradino del sistema $G_1(s)$ è mostrata in Fig. 4, nella stessa figura sono mostrate le posizioni dei poli nel piano complesso. I due poli complessi coniugati ($\delta = 0.3, \omega_n = 5 \Rightarrow \sigma = 1.5, \omega = 4.77$) risultano essere dominanti rispetto al polo semplice in -50.

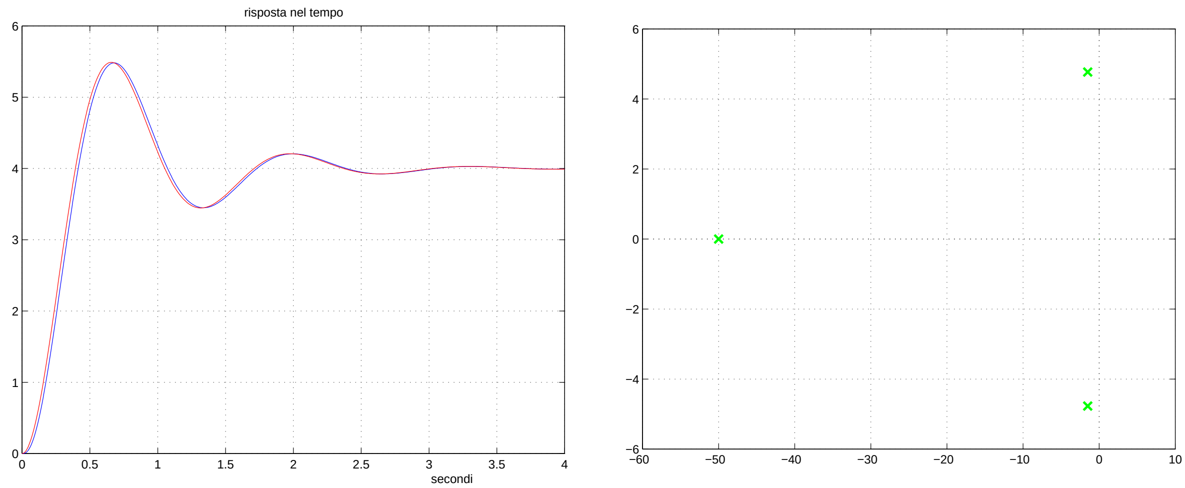


Figura 2: Andamento temporale della risposta al gradino e posizione dei poli nel sistema $G_1(s)$.

Calcolando il valore del guadagno statico K_0 e del tempo di assestamento T_a:

$$K_0 = G_1(0) = 4, \qquad T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = 2\,\mathrm{s}$$

Dal valore di δ e dal grafico del testo mi ricavo la massima sovraelongazione S%=37%, da cui il valore massimo dell'uscita y_M:

$$y_M = K_0\left(1 + \frac{S\%}{100}\right) = 5.48$$