

Progetto delle reti corretttrici

Dati di specifica e loco compatibilità

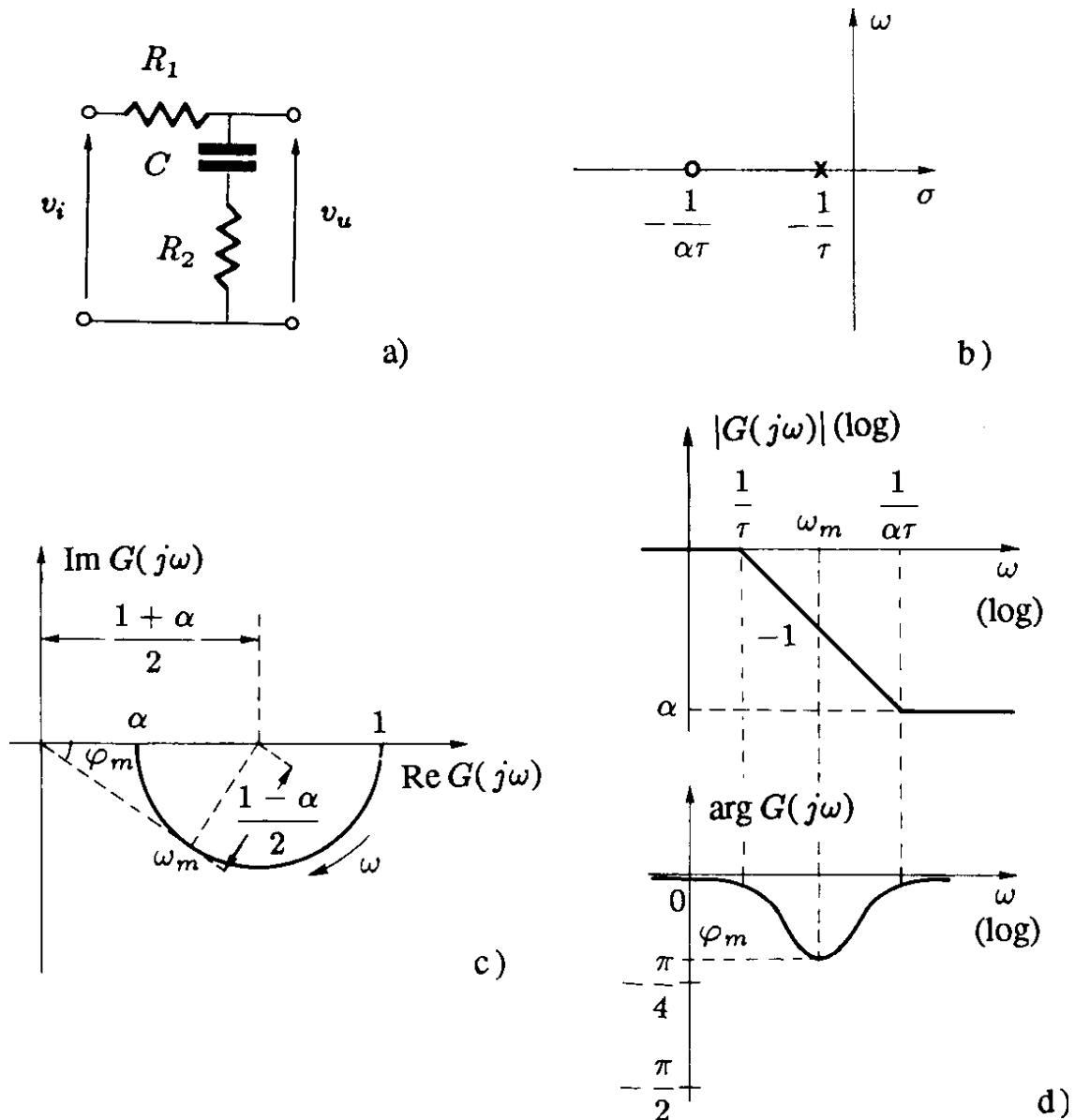
- I dati di specifica sui quali si basa il progetto di un sistema di controllo riguardano:
 - la **precisione**: gli errori a regime in risposta ai segnali tipici e il comportamento a regime in presenza di disturbi e di variazioni parametriche;
 - la **stabilità** (“comportamento dinamico soddisfacente”): massima sovraelongazione nella risposta al gradino, il picco di risonanza, i margini di ampiezza e di fase e il coefficiente di smorzamento dei poli dominanti;
 - **velocità di risposta**: il tempo di ritardo, il tempo di salita, il tempo di assestamento, la banda passante.
- Poiché il progetto del sistema di controllo si effettua normalmente considerando la risposta armonica, **occorre convertire i parametri “temporali” in parametri “frequenziali”**: tale operazione non è in generale possibile in modo rigoroso e tipicamente si basa sull’ipotesi che il sistema in retroazione si comporti approssimativamente come un sistema del secondo ordine a poli dominanti.
- **Il primo parametro che si determina in fase di progetto, è la costante di guadagno**: guadagno statico nei sistemi di tipo 0, costante di velocità nei sistemi di tipo 1.
- **Successivamente si analizza se il sistema in retroazione soddisfa le specifiche di stabilità e di velocità di risposta**. Se tali specifiche non sono soddisfatte, occorre progettare una opportuna rete **corretttrice** che modifichi le caratteristiche dinamiche del sistema.

Rete ritardatrice

La funzione di trasferimento di una rete ritardatrice è:

$$G(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} \quad \text{oppure} \quad G(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

dove $\alpha < 1$ oppure $\tau_1 < \tau_2$. Diagrammi frequenziali di Bode e Nyquist:



La rete attenua il modulo e ritarda la fase per tutte le pulsazioni finite. Il massimo ritardo di fase φ_m si ottiene in corrispondenza della pulsazione ω_m , media geometrica delle pulsazioni $1/\tau$ e $1/(\alpha\tau)$:

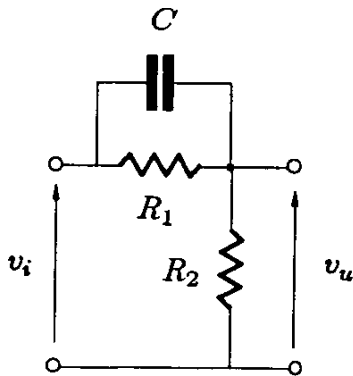
$$\varphi_m = -\arcsen \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad \omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$$

Rete anticipatrice

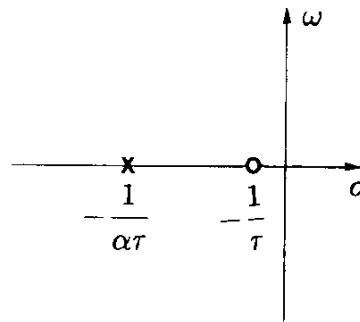
La funzione di trasferimento di una rete anticipatrice è:

$$G(s) = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad \text{oppure} \quad G(s) = \alpha \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

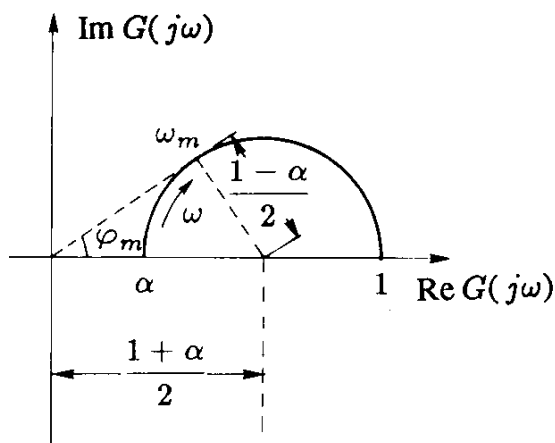
dove $\alpha < 1$ oppure $\tau_1 > \tau_2$. Diagrammi frequenziali di Bode e Nyquist:



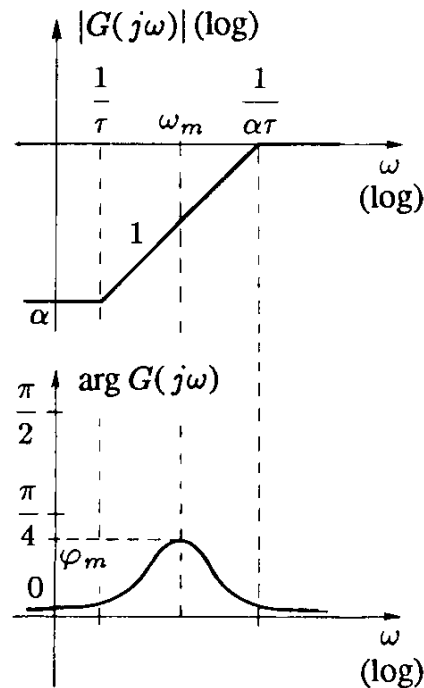
a)



b)



c)



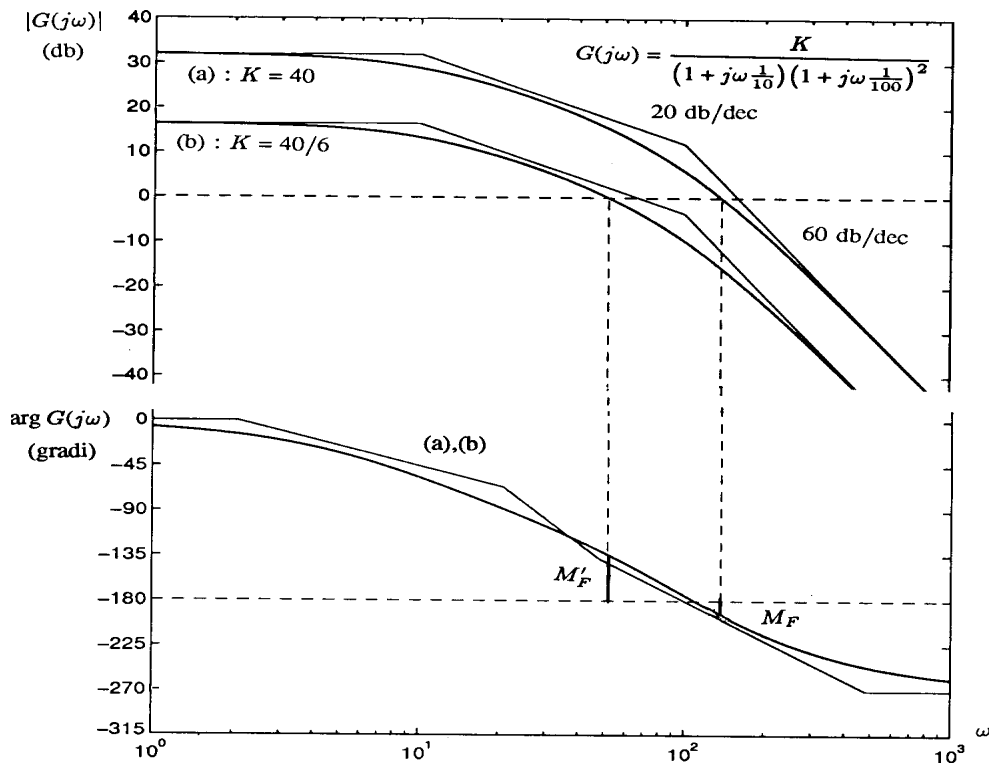
d)

Dopo aver compensato con un guadagno aggiuntivo $1/\alpha$ l'attenuazione α a basse frequenze, si ottiene una rete che **amplifica il modulo e anticipa la fase per tutte le pulsazioni finite**. Il massimo anticipo di fase φ_m si ottiene in corrispondenza della pulsazione ω_m :

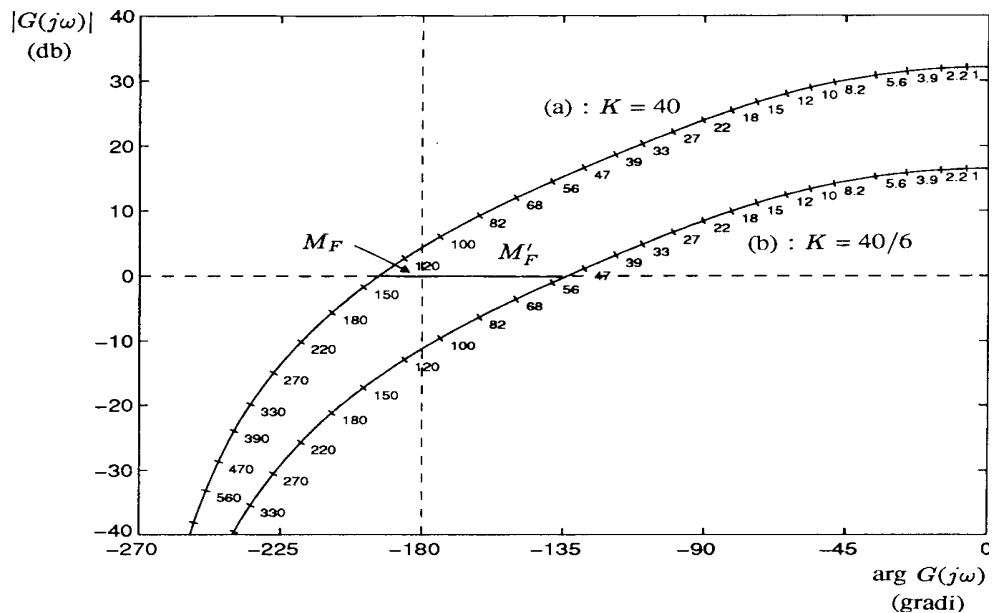
$$\varphi_m = \arcsen \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad \omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$$

Stabilizzazione mediante riduzione del guadagno

- Diagrammi di Bode:



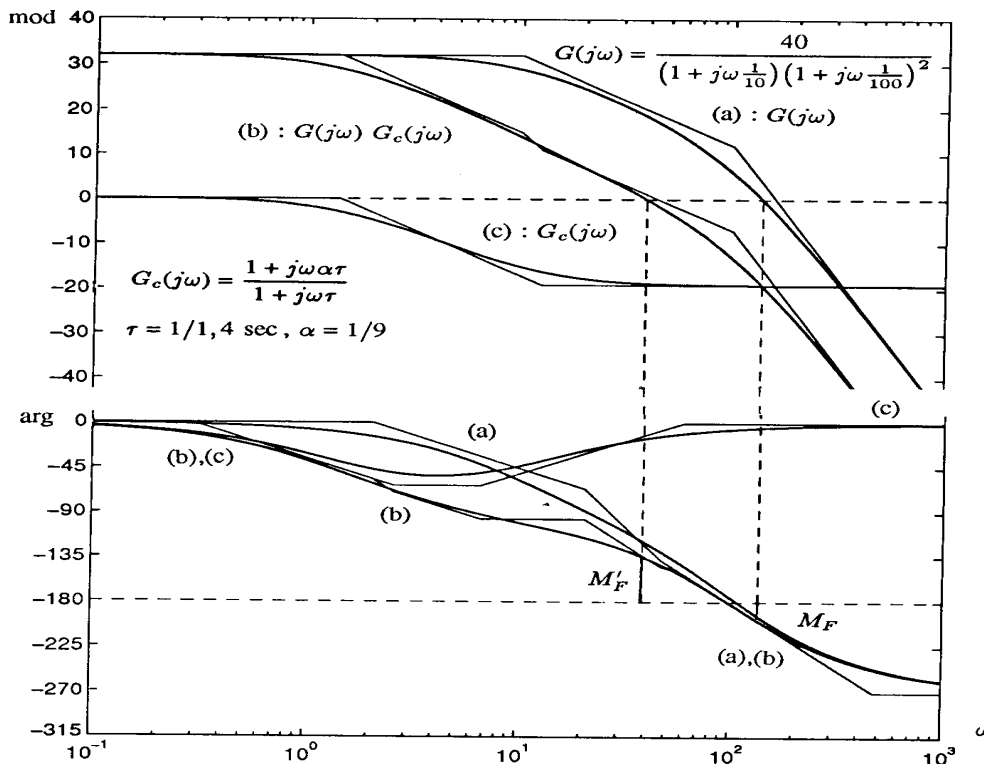
- Diagrammi di Nichols:



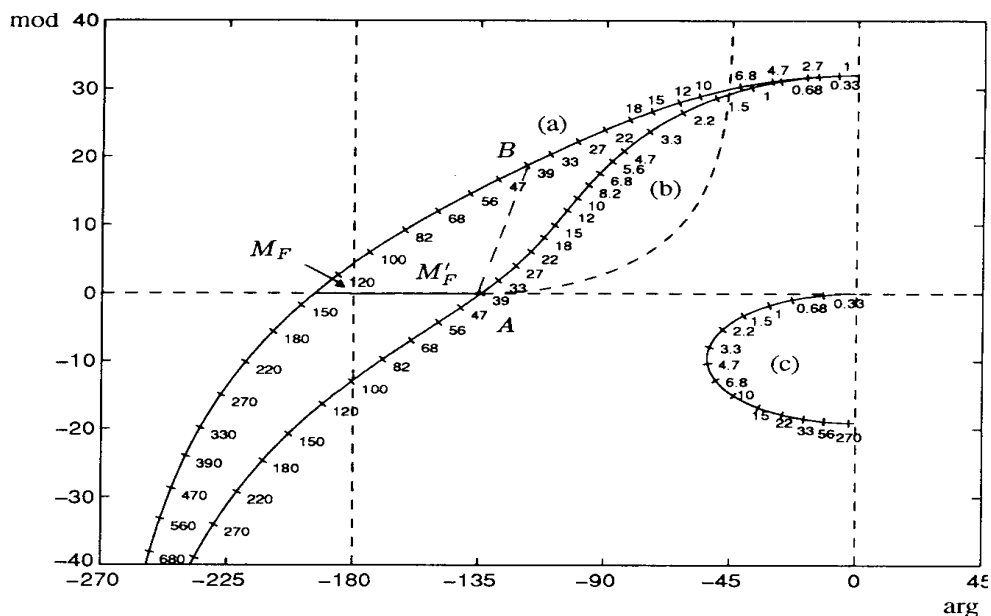
- Intervento sconsigliabile, in quanto i sistemi in retroazione funzionano tanto meglio, come prontezza e insensibilità ai disturbi, quanto più elevato è il guadagno di anello.

Stabilizzazione mediante rete ritardatrice

- Diagrammi di Bode:



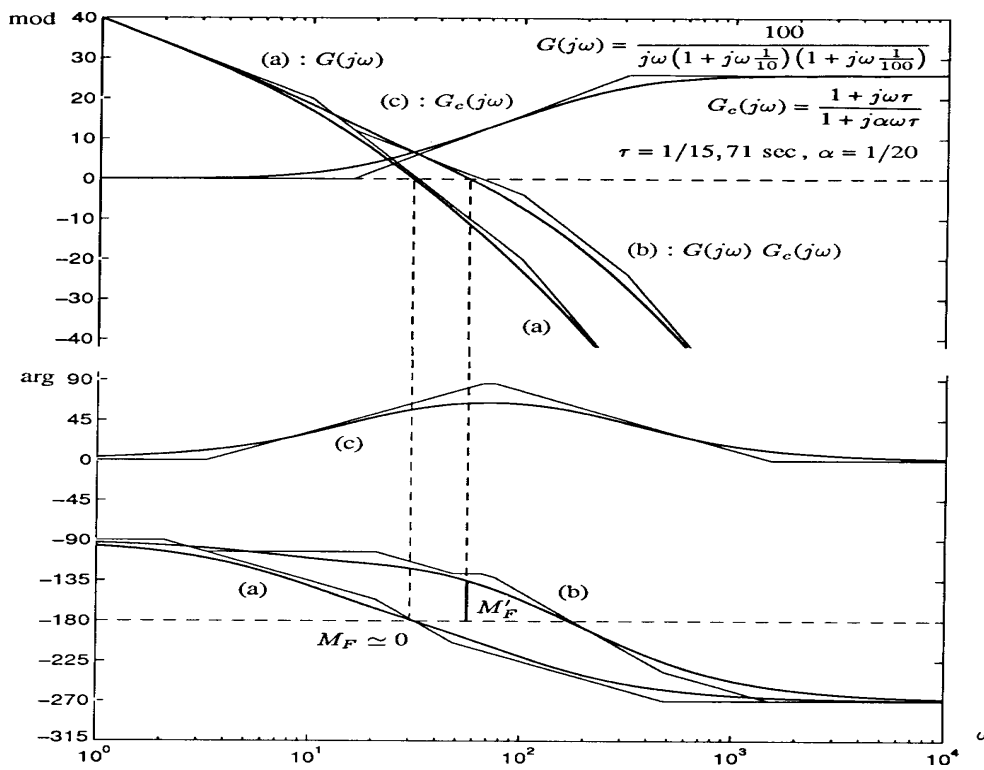
- Diagrammi di Nichols:



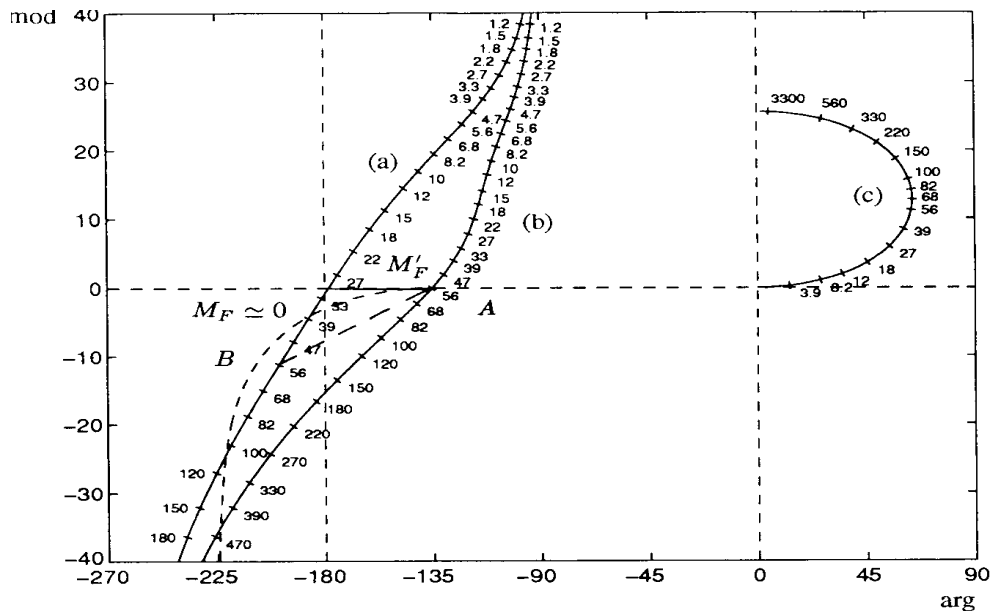
- Si usa per stabilizzare sistemi che abbiamo un margine di fase fortemente negativo (per esempio gli amplificatori operazionali). L'inconveniente principale è la riduzione della banda passante: risposta transitoria meno pronta e neutralizzazione meno efficace dei disturbi ad alta frequenza.

Stabilizzazione mediante rete anticipatrice

- Diagrammi di Bode:



- Diagrammi di Nichols:



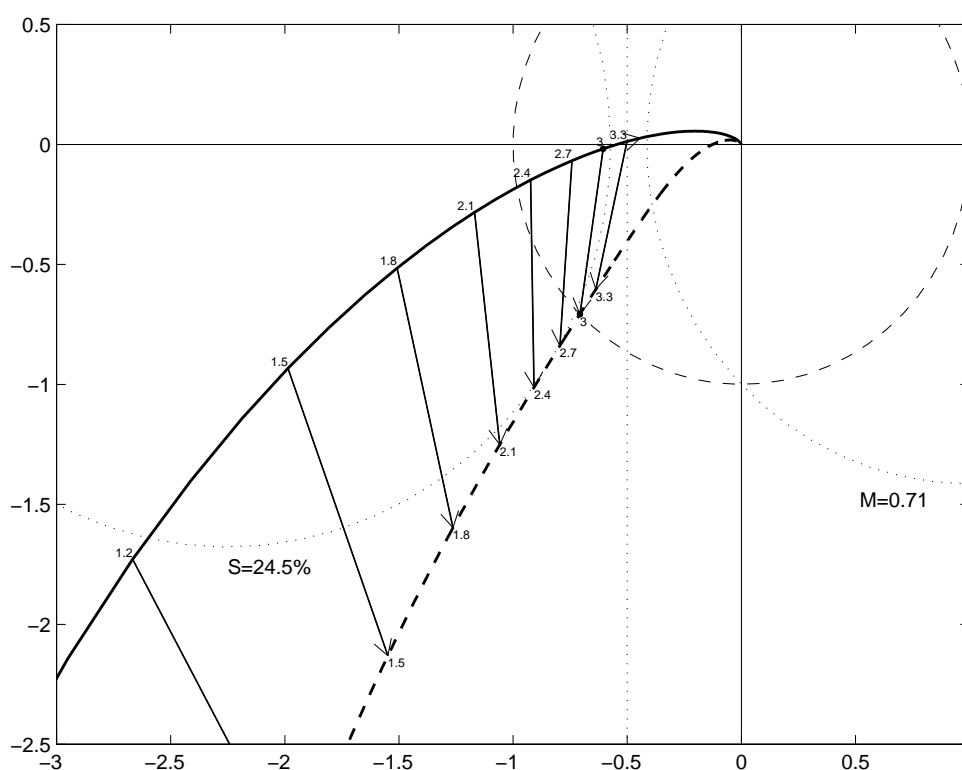
- La rete anticipatrice ha l'effetto di aumentare sia il margine di fase (diminuzione dell'overshoot) che il guadagno alle alte frequenze (la risposta più pronta perchè aumenta la banda passante).

Azione stabilizzante di una rete rete anticipatrice

- Una rete anticipatrice amplifica e anticipa a tutte la pulsazioni

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} \quad \text{con} \quad \tau_1 > \tau_2$$

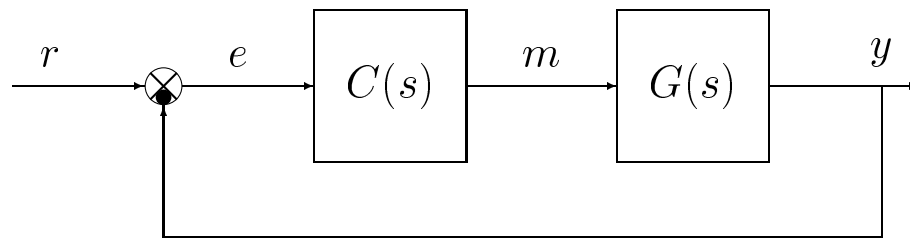
- Azione stabilizzante di una rete rete anticipatrice è essenzialmente data dall'anticipo di fase.
- Esempio di sintesi sul piano di Nyquist:



- L'azione amplificatrice ha come effetto positivo l'allargamento della banda passante.
- Nell'esempio riportato sopra, il sistema non retroazionato ha larghezza di banda $\omega_f = 2.3$, quello retroazionato $\omega_f = 3$.

Sintesi di reti correttrici: formule di inversione

- Si consideri il seguente sistema retroazionato:



dove $G(s)$ è il sistema da controllare e $C(s)$ è un'opportuna rete corretttrice aventi la seguente struttura:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

- Si ha una rete anticipatrice quando $\tau_1 > \tau_2$:

$$C(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad \text{dove} \quad \tau = \tau_1, \quad \alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1} < 1$$

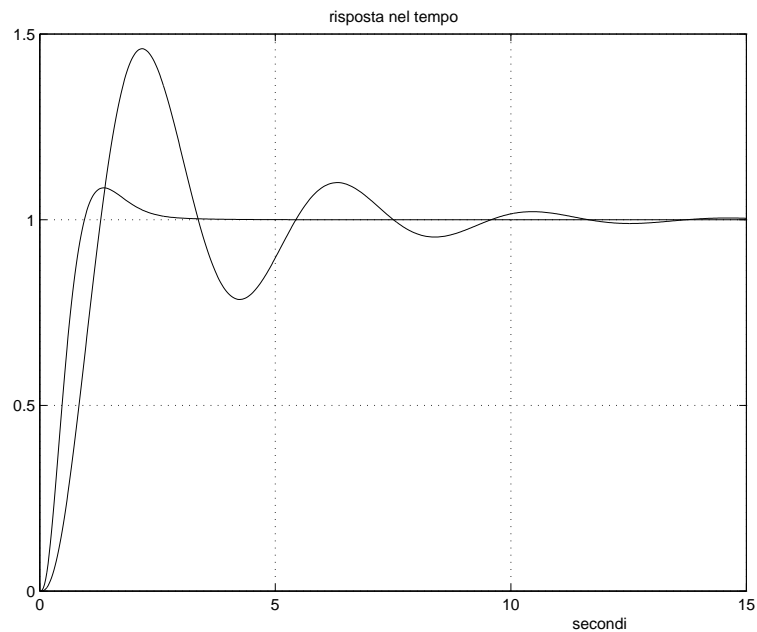
- Si ha una rete ritardatrice quando $\tau_1 < \tau_2$:

$$C(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} \quad \text{dove} \quad \tau = \tau_2, \quad \alpha = \frac{\tau_1}{\tau_2} < 1$$

- Le specifiche dinamiche relative ad un sistema retroazionato vengono date in termini di margine di fase M_φ e di margine di ampiezza M_α .
- I parametri τ_1 e τ_2 di una rete corretttrice che introduce una amplificazione M ed un anticipo di fase φ in corrispondenza della pulsazione ω si determinano utilizzando le seguenti formule di inversione:

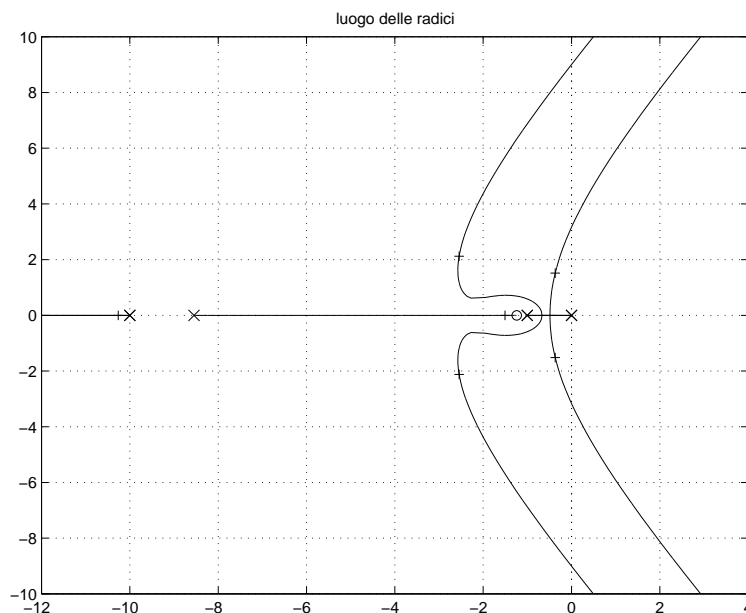
$$\tau_1 = \frac{M - \cos \varphi}{\omega \sin \varphi}, \quad \tau_2 = \frac{\cos \varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin \varphi}$$

- Risposte temporali dei sistemi $G(s)$ e $C(s)G(s)$ retroazionati:



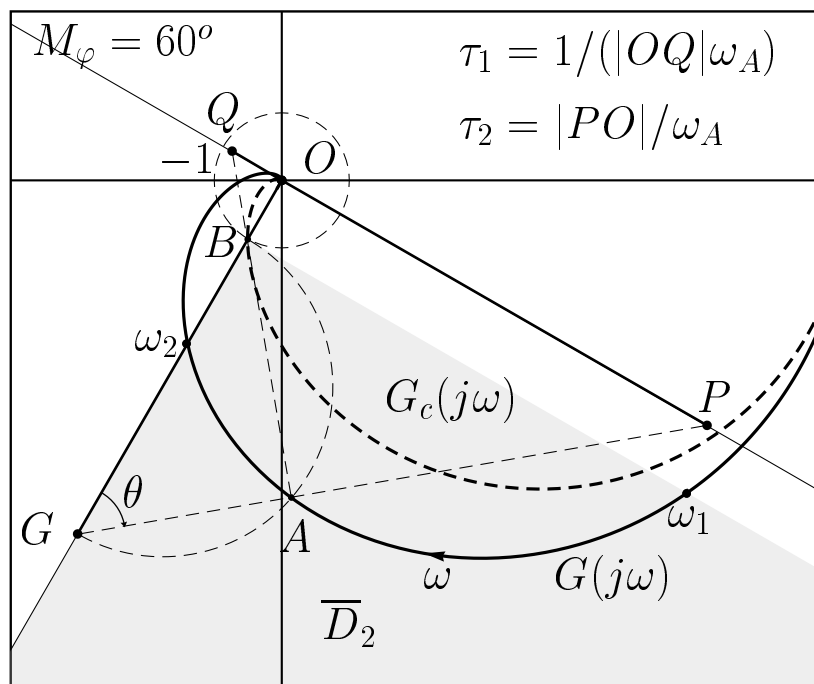
L'utilizzo di una rete anticipatrice ha migliorato sia il transitorio (diminuendo la sovraelongazione) che la prontezza del sistema (il tempo di salita è più basso).

- Il luogo delle radici dei due sistemi retroazionati:



La presenza della rete anticipatrice ha sensibilmente spostato verso il semipiano negativo i poli dominanti del sistema retroazionato.

b) Sintesi di una rete ritardatrice. Specifica: margine di fase: $M_\varphi = 60^\circ$.



- Sistema $G(s)$ e rete corretttrice $C(s)$:

$$G(s) = \frac{5000}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+30)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1+1.04s)}{(1+6.25s)}$$

- Per portare il punto A

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A}, \quad \rightarrow \quad M_A = 4.672, \quad \varphi_A = 271.82^\circ$$

nel punto B

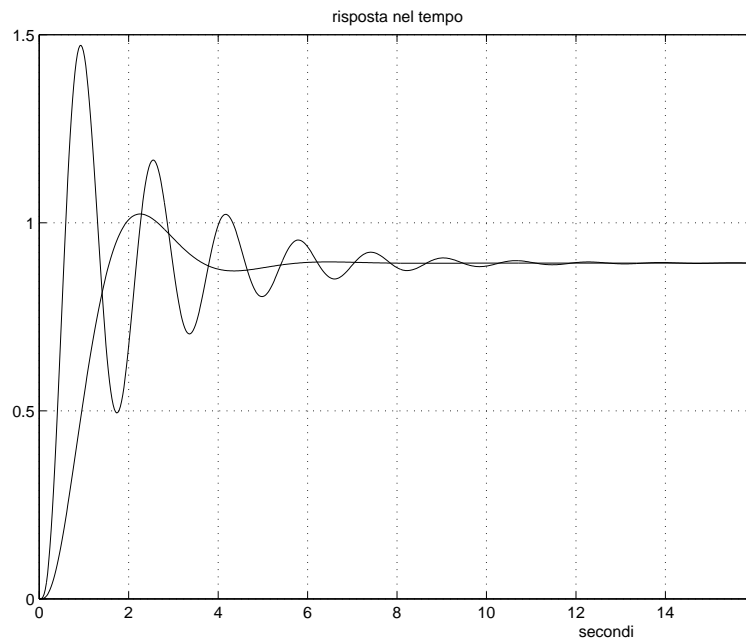
$$B = e^{j(\pi+M_\varphi)} \quad \rightarrow \quad M_B = 1, \quad \varphi_B = \pi + M_\varphi = 240^\circ$$

la rete corretttrice deve attenuare e ritardare di

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{4.672} = 0.214, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -31.82^\circ$$

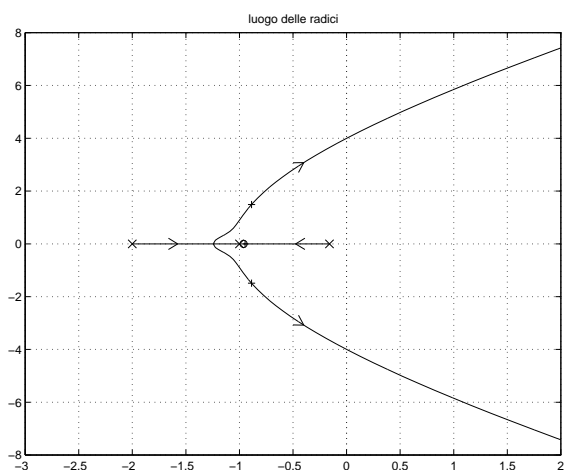
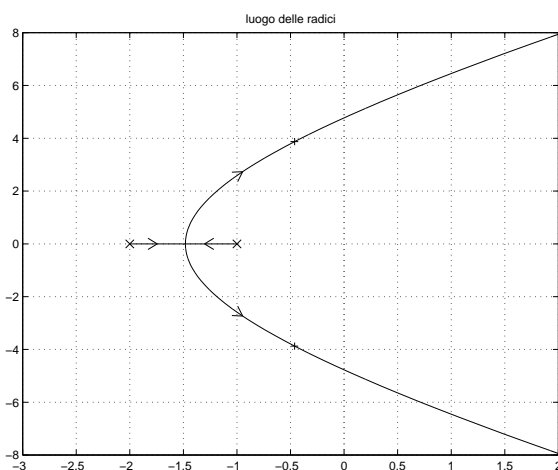
- Sostituendo i parametri M , φ e $\omega_A = 1.16$ nelle formule di inversione si ottengono i seguenti valori dei parametri cercati: $\tau_1 = 1.04$ e $\tau_2 = 6.25$.

- Risposte temporali dei sistemi $G(s)$ e $C(s)G(s)$ retroazionati:



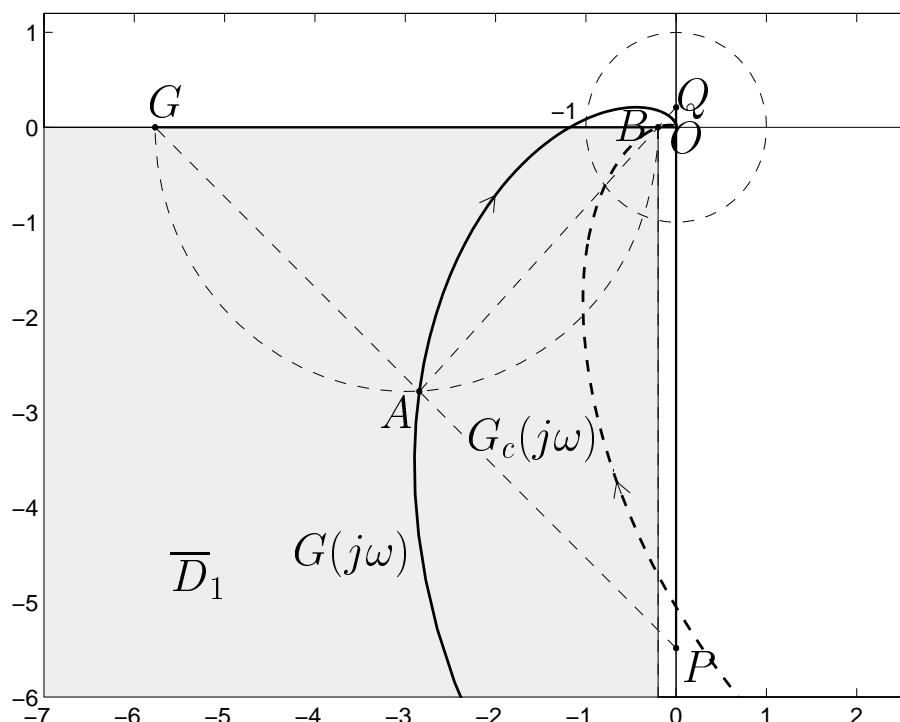
L'utilizzo di una rete ritardatrice ha migliorato il transitorio diminuendo la sovraelongazione, però ha reso il sistema meno pronto (tempo di salita più elevato).

- Il luogo delle radici dei due sistemi retroazionati:



La presenza della rete corretttrice ha spostato verso il semipiano negativo i poli dominanti del sistema retroazionato aumentando contemporaneamente il coefficiente di smorzamento δ .

c) Sintesi di una rete ritardatrice. Specifica: margine di ampiezza $M_\alpha = 5$.



- Sistema $G(s)$ e rete corretttrice $C(s)$:

$$G(s) = \frac{10000}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+30)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1+0.396s)}{(1+11.42s)}$$

- Per portare il punto A

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A} \quad \rightarrow \quad M_A = 3.978, \quad \varphi_A = 224.4^\circ$$

nel punto B

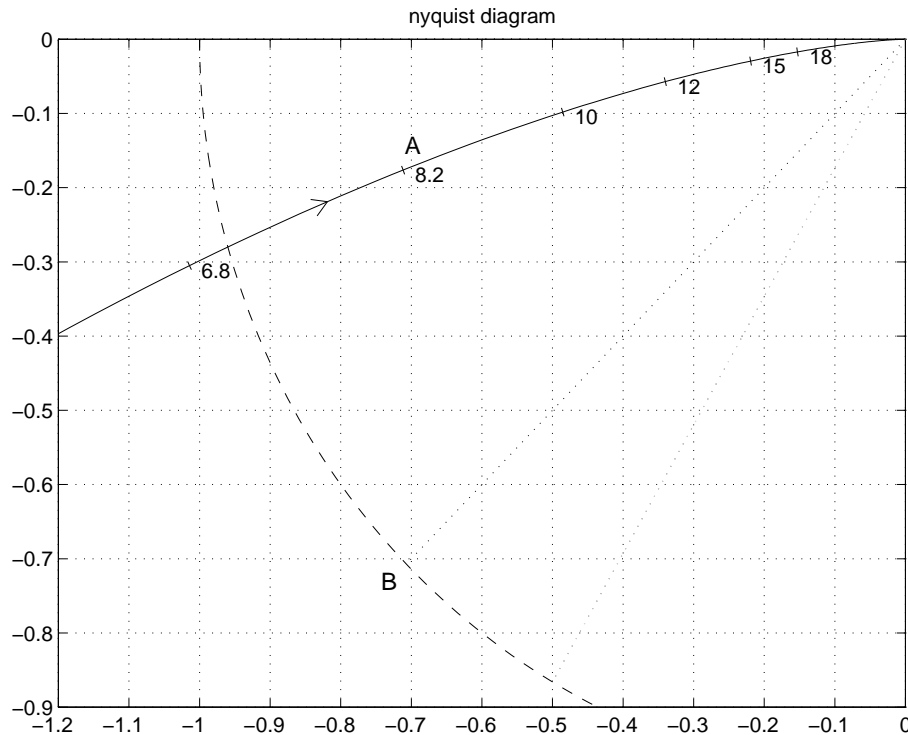
$$B = -\frac{1}{M_\alpha} \quad \rightarrow \quad M_B = \frac{1}{M_\alpha} = \frac{1}{5}, \quad \varphi_B = -\pi$$

la rete corretttrice deve attenuare e ritardare di

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{M_A M_\alpha} = 0.0503, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -44.4^\circ$$

- Sostituendo i parametri M , φ e $\omega_A = 2.4$ nelle formule di inversione si ottengono i seguenti valori dei parametri cercati: $\tau_1 = 0.396$ e $\tau_2 = 11.42$.

- *Esempio.* Si consideri il seguente diagramma di Nyquist.



Calcolare i parametri τ_1 e τ_2 di una rete anticipatrice ($\tau_1 > \tau_2$)

$$T(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

in modo da portare il punto A in B , cioè in modo da imporre al sistema retroazionato il margine di fase $M_\varphi = 45^\circ$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 8.2$.

- L'ampiezza M_A e la fase φ_A del punto A si ottengono dal diagramma polare della funzione di risposta armonica $G(j\omega) = M_A e^{j\varphi_A}$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 8.2$:

$$M_A \simeq \sqrt{0.71^2 + 0.176^2} = 0.73$$

$$\varphi_A \simeq \arctan \frac{0.176}{0.71} - 180 = 14 - 180 = -166^\circ = 194^\circ$$

- Il guadagno M e l'anticipo φ che la rete anticipatrice deve introdurre alla pulsazione $\omega = 8.2$ per portare il punto A in B sono:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{0.73} = 1.37 \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 225^\circ - 194^\circ = 31^\circ$$

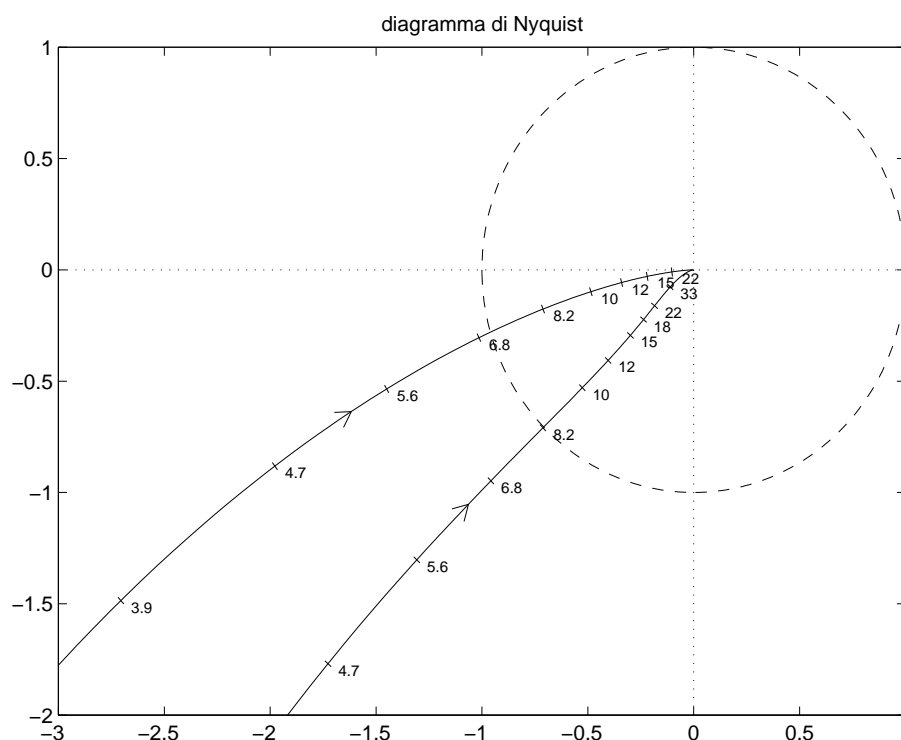
- Sostituendo questi valori nelle formule di inversione (??) si ricava

$$\tau_1 = \frac{1.37 - \cos 31^\circ}{8.2 \sin 31^\circ} = 0.1214, \quad \tau_2 = \frac{\cos 31^\circ - \frac{1}{1.37}}{8.2 \sin 31^\circ} = 0.0301$$

per cui la rete anticipatrice cercata è

$$T(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} = \frac{1 + 0.1214s}{1 + 0.0301s}$$

- L'andamento del diagramma di Nyquist del sistema originario $G(s)$ e del sistema compensato $T(s)G(s)$.

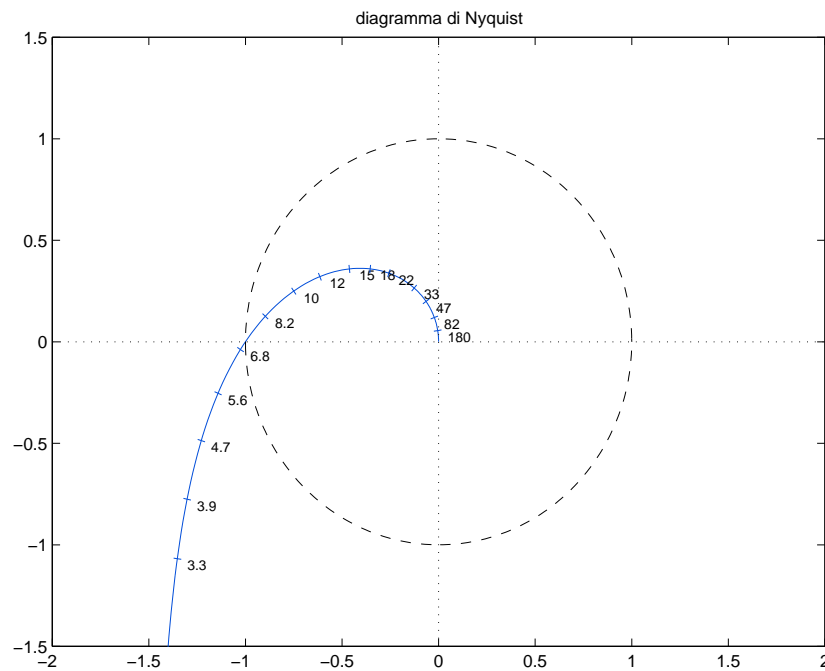


Progetto di reti ritardatrici: esempi.

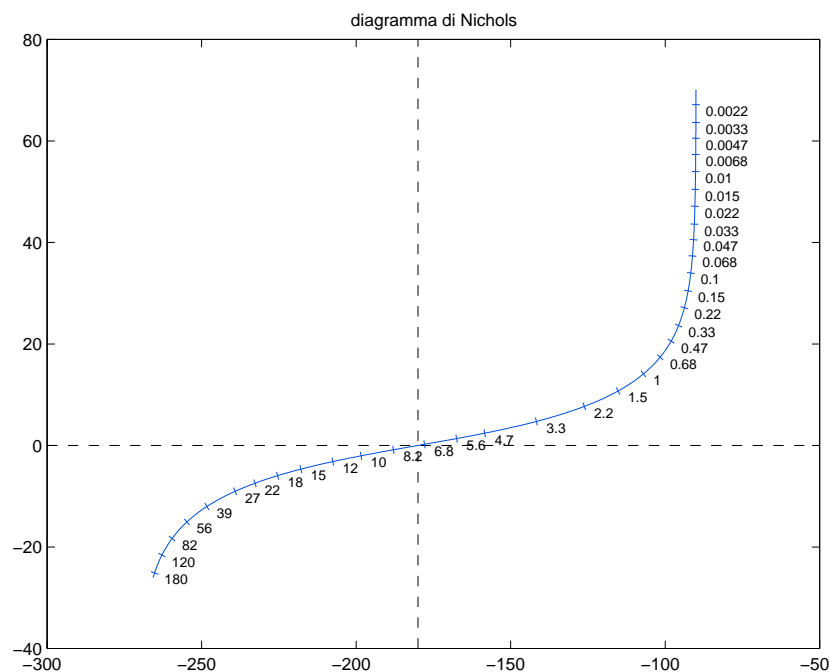
- Consideriamo la funzione di trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{10(5 - s)}{s(s + 10)}$$

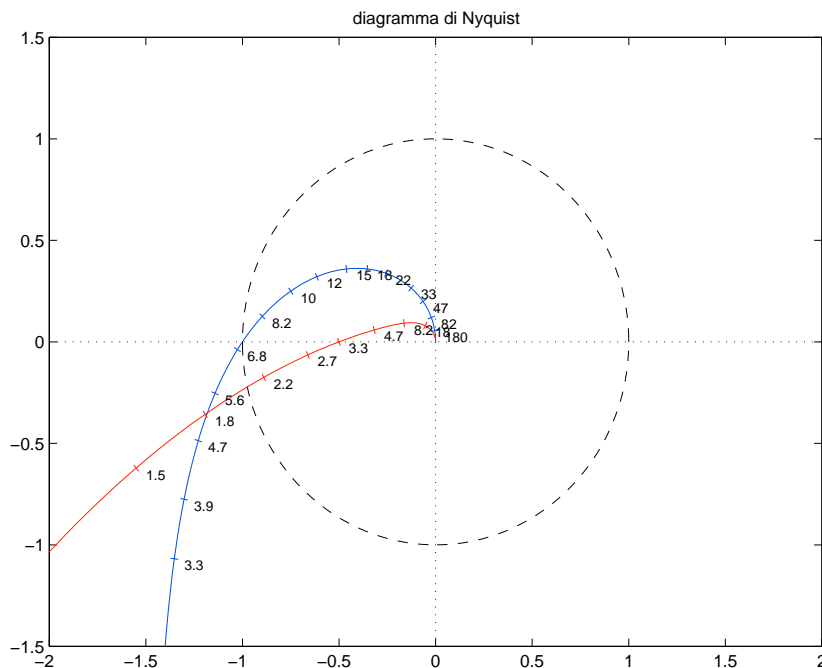
- Diagramma di Nyquist:



- Diagramma di Nichols:



- Progetto con specifica sul margine di ampiezza (piano di Nyquist):



- Determinazione del punto B :

$$M_a = 2 \quad \rightarrow \quad B : M_B = \frac{1}{M_a} = 0.5 \quad \varphi_B = -180^\circ$$

- Rete ritardatrice: scelta del punto A :

$$\omega = 3.3 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -1.353 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = -1.069$$

$$M_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 1.724 = 4.731 \text{db}$$

$$\varphi_A = \operatorname{atan2} \left(\frac{y_A}{x_A} \right) = -141.7^\circ$$

- La rete ritardatrice che “porta” il punto A nel punto B richiesto è caratterizzata quindi da:

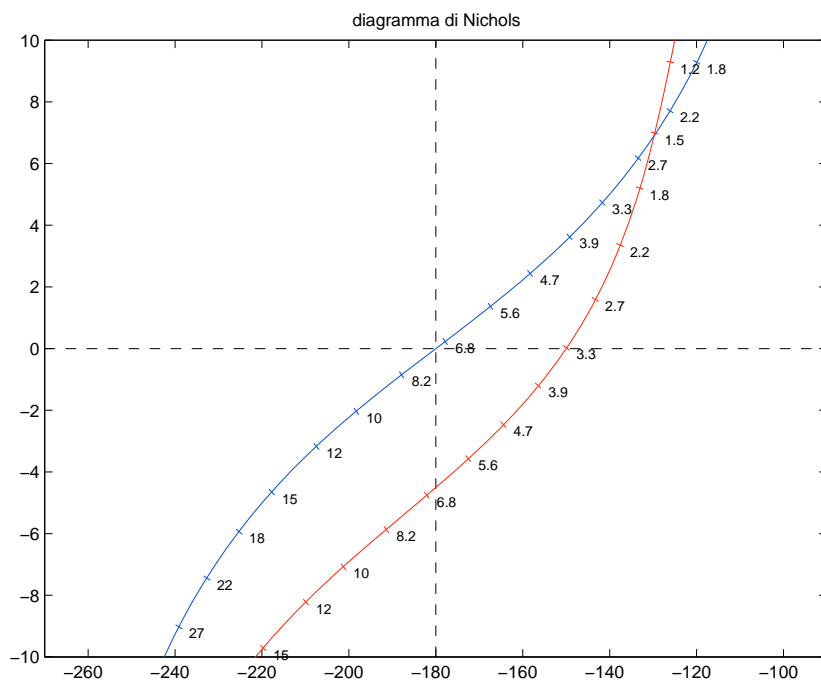
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.29$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -38.3^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.2418$$

$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 1.3022$$

- Progetto con specifica sul margine di fase (piano di Nichols):



- Determinazione del punto B :

$$M_f = 30^\circ \quad \rightarrow \quad B : M_B = 1 \quad \varphi_B = -150^\circ$$

- Rete ritardatrice: scelta del punto A :

$$\omega = 3.3 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -1.353 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = -1.069$$

$$M_A = 4.731 \text{db} = 1.724$$

$$\varphi_A = -141.7^\circ$$

- La rete ritardatrice che “porta” il punto A nel punto B richiesto è caratterizzata quindi da:

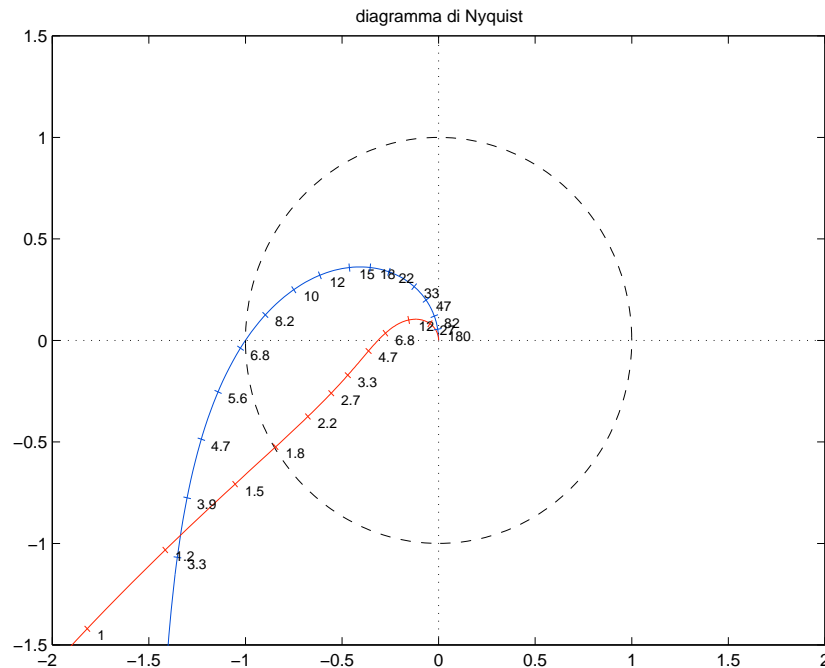
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.58$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -8.31^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.8585$$

$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 1.5404$$

- Progetto con specifica “mista” (piano di Nyquist):



- Determinazione del punto B :

$$B : M_B = 0.5 \quad \varphi_B = -160^\circ$$

- Rete ritardatrice: scelta del punto A :

$$\omega = 3.3 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -1.353 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = -1.069$$

$$M_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 1.724 = 4.731 \text{ db}$$

$$\varphi_A = \operatorname{atan2} \left(\frac{y_A}{x_A} \right) = -141.7^\circ$$

- La rete ritardatrice che “porta” il punto A nel punto B richiesto è caratterizzata quindi da:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.29$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -18.3^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.636$$

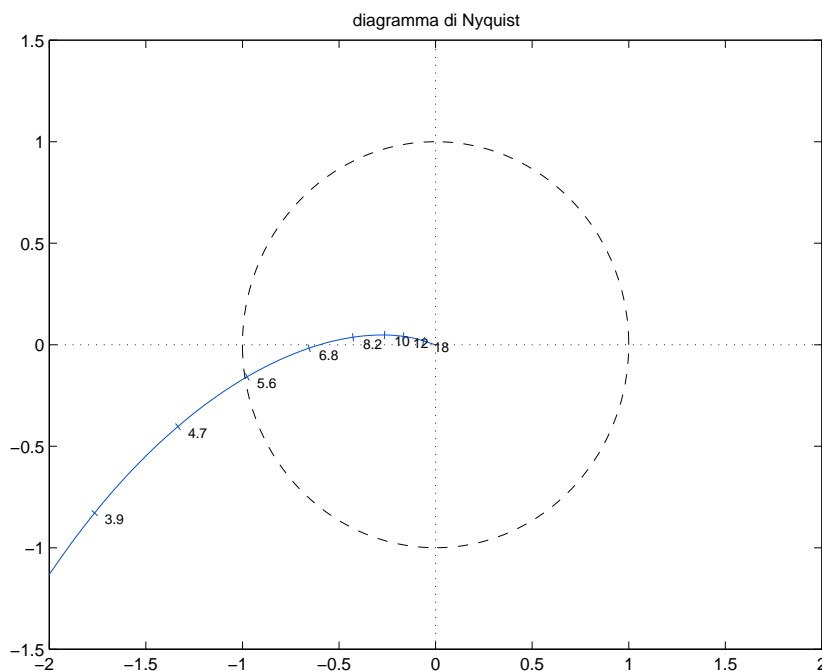
$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 2.41$$

Progetto di reti anticipatrici: esempi.

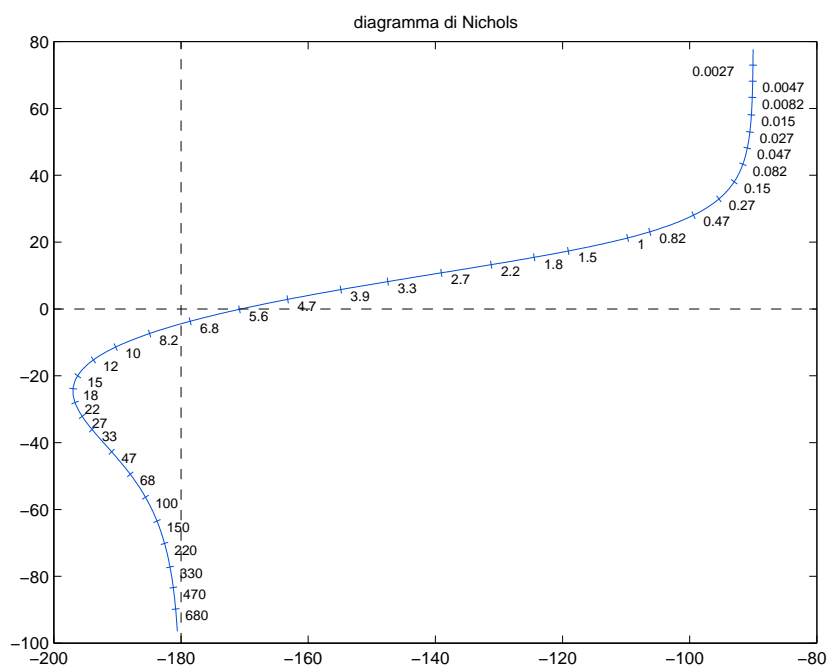
- Consideriamo la funzione di trasferimento:

$$G_2(s) = \frac{15(s + 20)}{s(s + 5)^2}$$

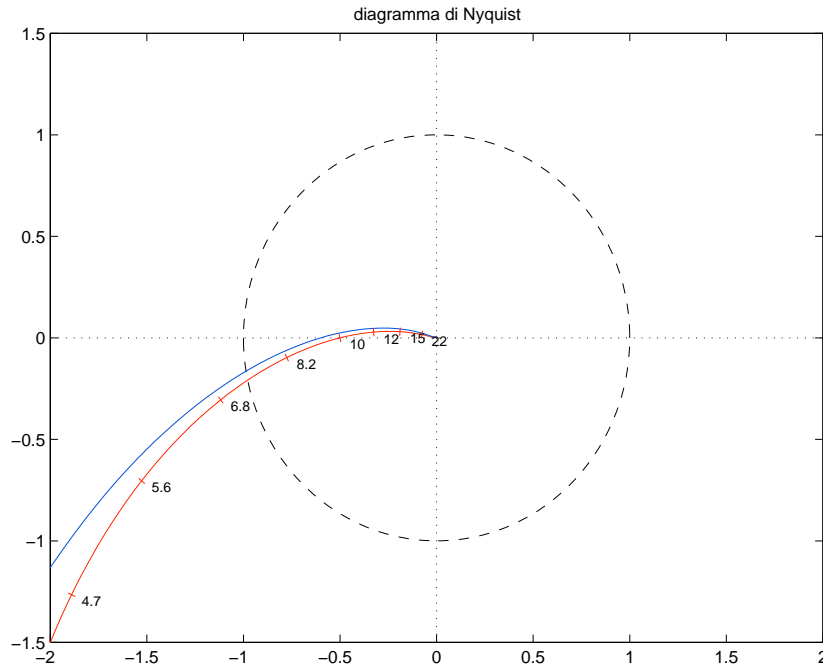
- Diagramma di Nyquist:



- Diagramma di Nichols:



- Progetto con specifica sul margine di ampiezza (piano di Nyquist):



- Determinazione del punto B :

$$M_a = 2 \quad \rightarrow \quad B : M_B = \frac{1}{M_a} = 0.5 \quad \varphi_B = -180^\circ$$

- Rete anticipatrice: scelta del punto A :

$$\omega = 10 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -0.264 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = 0.048$$

$$M_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 0.2683 = -11.43 \text{db}$$

$$\varphi_A = \operatorname{atan2} \left(\frac{y_A}{x_A} \right) = 169.7^\circ$$

- La rete anticipatrice che “porta” il punto A nel punto B richiesto è caratterizzata quindi da:

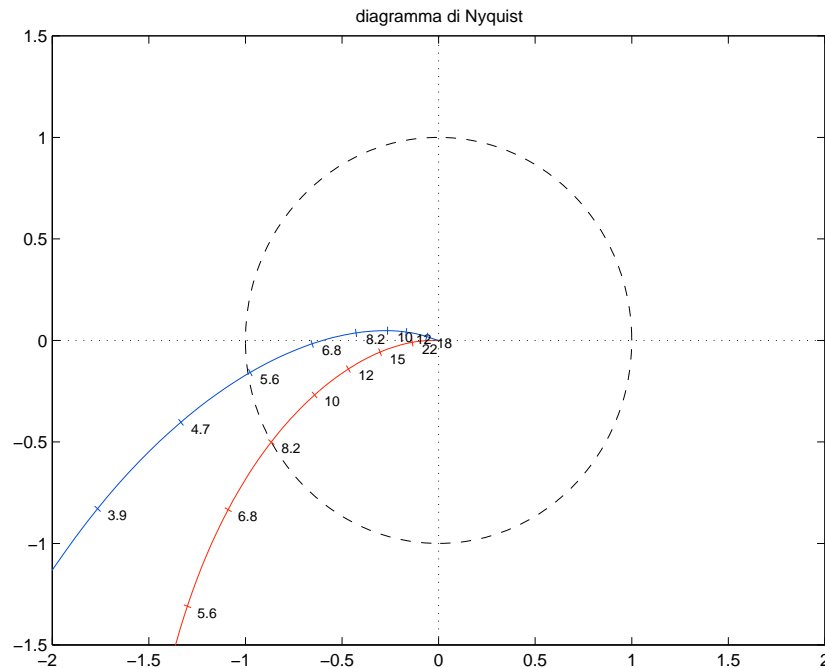
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 1.8634$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = 10.3^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.4917$$

$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 0.25$$

- Progetto con specifica sul margine di fase (piano di Nichols):



- Determinazione del punto B :

$$M_f = 30^\circ \quad \rightarrow \quad B : M_B = 1 \quad \varphi_B = -150^\circ$$

- Rete anticipatrice: scelta del punto A :

$$\omega = 8.2 \quad x_A = \operatorname{Re}(A) = -0.4271 \quad y_A = \operatorname{Im}(A) = 0.037$$

$$M_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 0.4287 = -7.357 \text{db}$$

$$\varphi_A = \operatorname{atan2} \left(\frac{y_A}{x_A} \right) = 175^\circ$$

- La rete anticipatrice che “porta” il punto A nel punto B richiesto è caratterizzata quindi da:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.58$$

$$\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -8.31^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{M - \cos(\varphi)}{\omega \sin(\varphi)} = 0.8585$$

$$\tau_2 = \frac{\cos(\varphi) - 1/M}{\omega \sin(\varphi)} = 1.5404$$