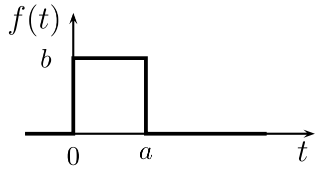
Controlli Automatici - Primo Compito
16 Novembre 2006 - Esercizi
Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [2\,t^2\,e^{a\,t} + 3\sin(b\,t)], \qquad x_2(t) = b\,\cos(a\,t)e^{-5\,t},$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{4}{(s-a)^3} + \frac{3\,b}{s^2+b^2}, \qquad X_2(s) = \frac{b\,(s+5)}{(s+5)^2+a^2}, \qquad X_3(s) = \frac{b}{s}[1 - e^{-a\,s}]$$

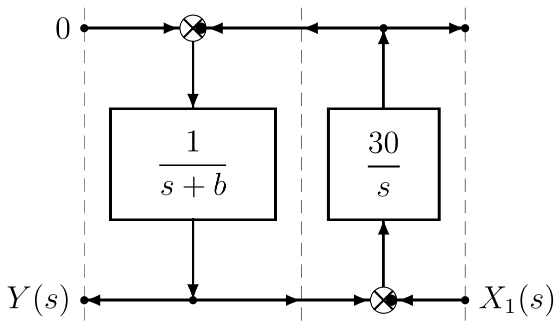
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2\,b}{(s-a)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{a}{s(s+b)}, \qquad G_3(s) = \frac{s+2\,a+b}{s+a}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{b}{3}\,t^3\,e^{a\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{a}{b}\,(1 - e^{-b\,t}), \qquad g_3(t) = \delta(t) + (a+b)e^{-a\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s)$ che lega l'ingresso $X_1(s)$ all'uscita $Y(s)$:

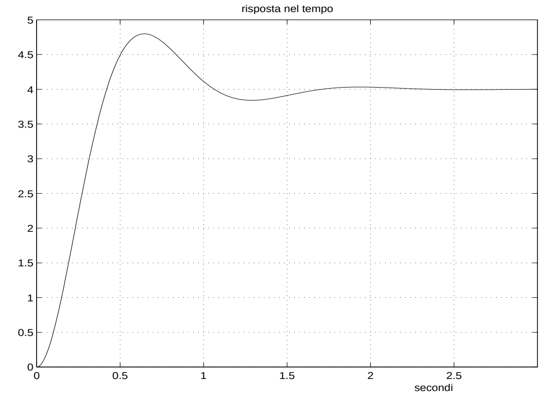
$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X_1(s)} = \frac{30}{s^2 + b\,s + 30}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G_1(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G_1(s)$ alla risposta al gradino:

1) $\sigma = -\dfrac{b}{2}$ 3) $\omega_n = \sqrt{30}$ 5) $K_0 = 1$

2) $\omega = \dfrac{\sqrt{120 - b^2}}{2}$ 4) $\delta = \dfrac{b}{2\sqrt{30}}$ 6) $T_a = \dfrac{6}{b}$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y_1(t)$ della funzione di trasferimento $G_1(s)$ al gradino in ingesso $x_1(t) = 4$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



L'andamento riportato a fianco è relativo ai parametri $a = 3$, $b = 5$.

d) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{2\,(1 + 5\,s)\,(s - 10\,a)}{s(s^2 + 4\,b\,s + 16)}$$

<u>Soluzione</u>. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$ sono mostrati in Fig. 1. Il guadagno β del diagramma asintotico di Bode delle ampiezze

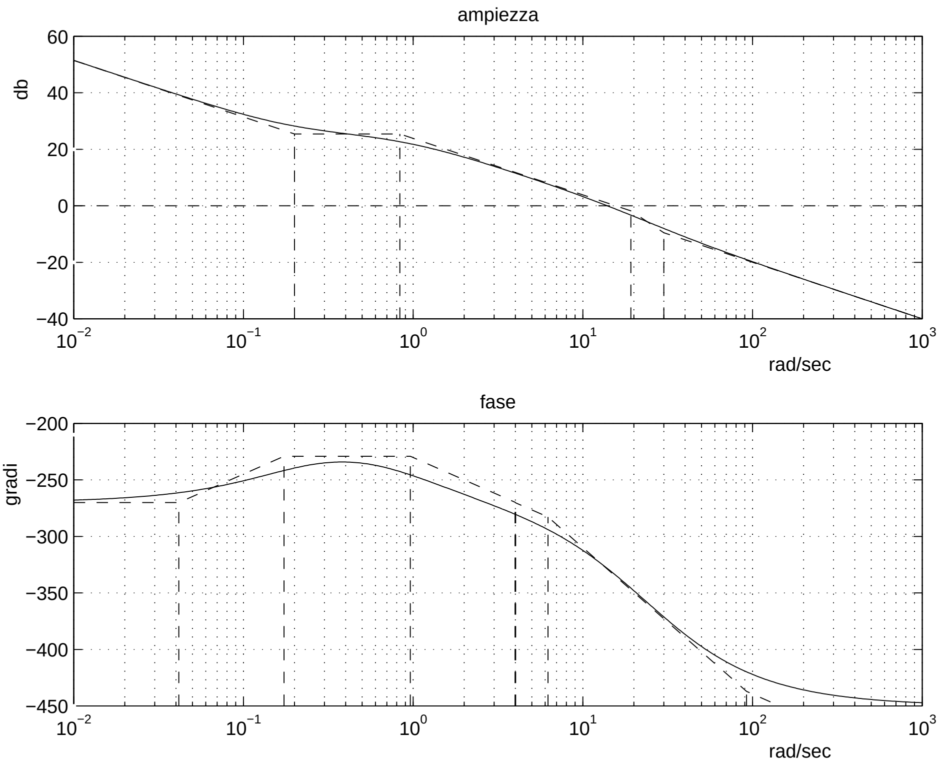


Figura 1: I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$

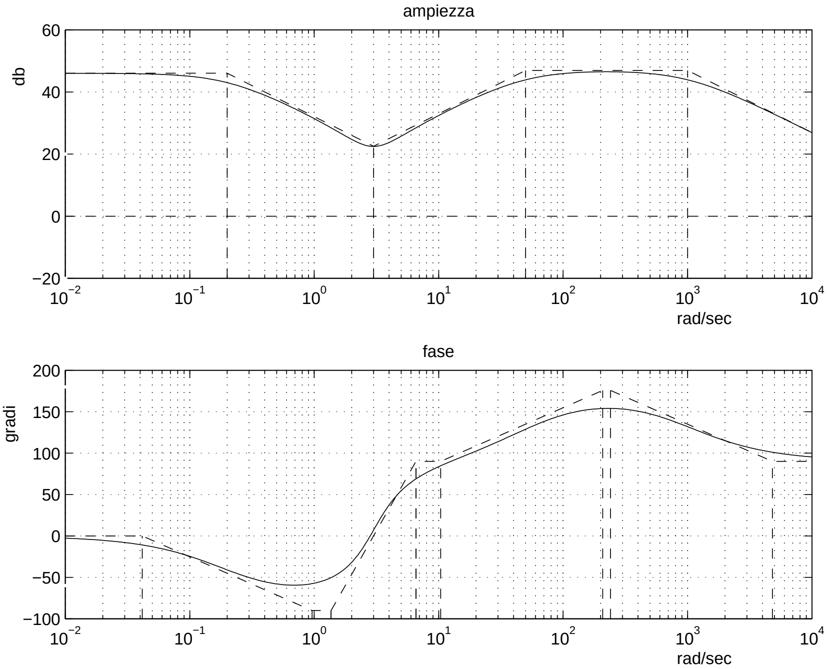
della funzione $G(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.2$ è il seguente:

$$\beta = \left|\frac{2\,(-10\,a)}{0.2 \cdot 16}\right| = \frac{25\,a}{4}$$

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

e.1) calcolare la risposta “a regime” $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:
$x(t) = 2\,a + 5\,\cos(3\,b\,t)$;

e.2) ricavare l’espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



$$G(s) = \frac{200(1+\frac{2\cdot 0.5\,s}{3}+\frac{s^2}{9})}{(1+\frac{s}{0.2})(1-\frac{s}{50})(1+\frac{s}{1000})}$$

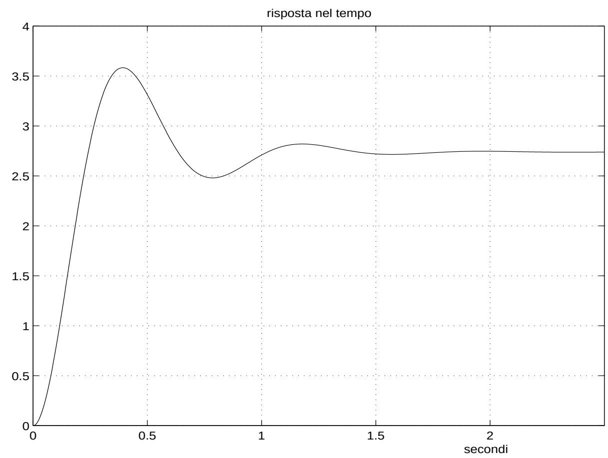
$$= \frac{-222222(s^2+3\,s+9)}{(s+0.2)(s-50)(s+100)}$$

La risposta “a regime” $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = 2\,a + 5\,\cos(3\,b\,t)$ è la seguente:

$$y_\infty(t) = 2\,a\,G(0) + 5\,|G(j\,3\,b)|\,\cos[3\,b\,t + \mathrm{Arg}G(j\,3\,b)]$$

f) L’andamento temporale riportato a fianco è la risposta al gradino del sistema:

$$G(s) = \frac{K_0}{1+\frac{2\delta\,s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$



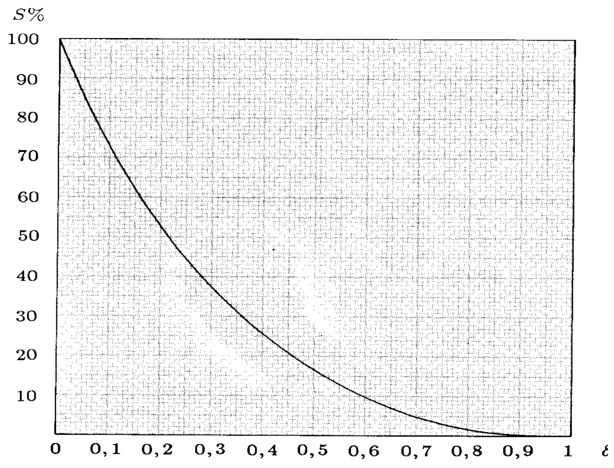
Nei limiti della precisione grafica del disegno, determinare:
f.1) la parte reale σ e la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
f.2) la pulsazione naturale ω_n e il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
f.3) il guadagno statico K_0 e la massima sovraelongazione $S\%$ del sistema $G_1(s)$ alla risposta al gradino:

f.1) $\sigma = -3$ $\qquad\omega = 8$

f.2) $\omega_n = \sqrt{73} \simeq 8.544$ $\qquad\delta = \frac{3}{\sqrt{73}} \simeq 0.351$

f.3) $K_0 = \frac{200}{73} \simeq 2.74$ $\qquad S\% = 30.8\,\%$

Per il calcolo dei parametri avvalersi, eventualmente, del diagramma $S\% = S\%(\delta)$ riportato a fianco.



Controlli Automatici - Primo Compito
16 Novembre 2006 - Domande
Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad "a" e "b" i valori assegnati e si risponda alle domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t) + 4\,\ddot{y}(t) + a\,\dot{y}(t) + y(t) = b\,\dot{x}(t) + 5\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b\,s + 5}{s^3 + 4\,s^2 + a\,s + 1}$$

2. Sia $y(t) = Y(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica del sistema lineare $G(s)$ all'ingresso $x(t) = X\sin(\omega t + \varphi_0)$. Dare la definizione di funzione di risposta armonica $F(\omega)$ del sistema:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)}$$

3. Nella scomposizione in fratti semplici, quali sono i "modi" $g_1(t)$, $g_2(t)$ e $g_3(t)$ corrispondenti ad un polo reale in $p_1 =$ "$-b$" con grado di molteplicità $r = 3$ (indicare in modo simbolico i coefficienti K_i non noti):

$$g_1(t) = K_1\,e^{-b\,t} \qquad\qquad g_2(t) = K_2\,t\,e^{-b\,t} \qquad\qquad g_3(t) = K_3\,t^2\,e^{-b\,t}$$

4. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{a\,s + 1}{(s^2 + b^2)(s + 1)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = 0 \qquad\qquad y_\infty = \nexists$$

5. Sia $X(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $x(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della traslazione in s":

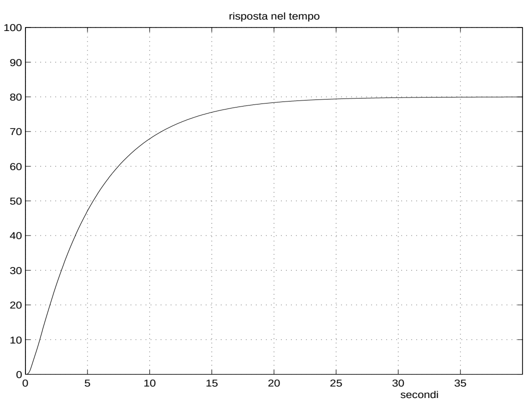
$$\mathcal{L}[x(t)\,e^{\alpha\,t}] = X(s - \alpha)$$

6. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{(1 + 0.01\,s)(s^2 + 80\,s + 6400)}{(1 + 5\,s)(1 + 0.5\,s)(s^2 + 4\,s + 80)}$$

Calcolare inoltre:
1) il guadagno statico K_0 del sistema;
2) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino:

$$K_0 = 80 \qquad\qquad T_a = 15\,\mathrm{s}$$



7. Relativamente ad un sistema $G(s)$ del secondo ordine privo di zeri, fornire il legame teorico che esiste tra la massima sovaelongazione $S\%$ e il coefficiente di smorzamento δ:

$$S\% = 100\,e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$