Controlli Automatici A
Compito Completo
27 Gennaio 2010 - Esercizi

Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 2\,t^{\mathbf{a}} + 5\,e^{-7\,t}\cos(\mathbf{b}\,t), \qquad\qquad x_2(t) = \mathbf{a}\,\delta(t) + 7\,t^2\,e^{-\mathbf{b}\,t}$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2\,\mathbf{a}!}{s^{\mathbf{a}+1}} + \frac{5\,(s+7)}{(s+7)^2+\mathbf{b}^2}, \qquad\qquad X_2(s) = \mathbf{a} + \frac{14}{(s+\mathbf{b})^3}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

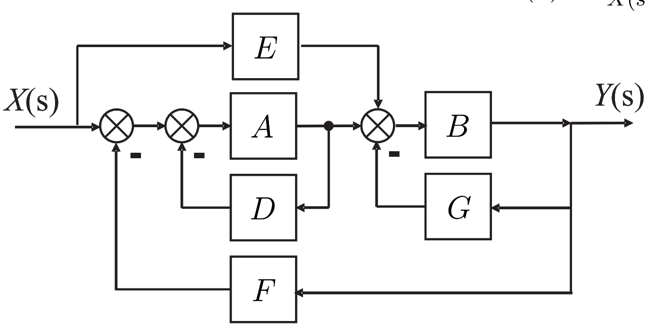
$$G_1(s) = \frac{2\,\mathbf{b}}{(s+\mathbf{a})(1+2\,s)}, \qquad\qquad G_2(s) = \frac{s+\mathbf{b}}{s^2+\mathbf{a}^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{2\mathbf{b}}{2\,\mathbf{a}-1}\left[e^{-0.5\,t} - e^{-\mathbf{a}\,t}\right], \qquad g_2(t) = \begin{cases} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\mathbf{a}^2} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\frac{\mathbf{a}}{s^2+\mathbf{a}^2}\right] \\ &= \cos(\mathbf{a}\,t) + \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\sin(\mathbf{a}\,t) \end{cases}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

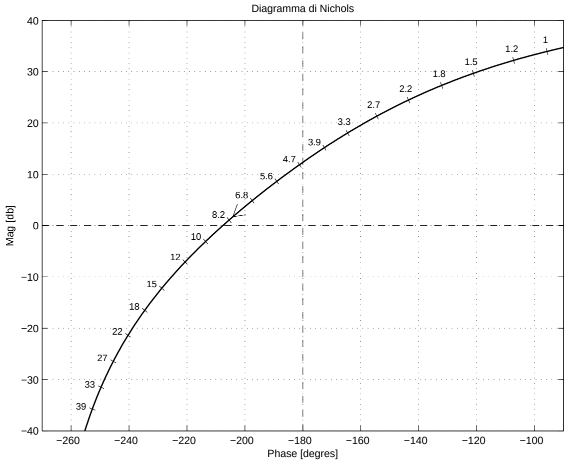
$$G_1(s) = \frac{AB + EB(1+AD)}{1 + AD + BG + ABF + ADBG}$$



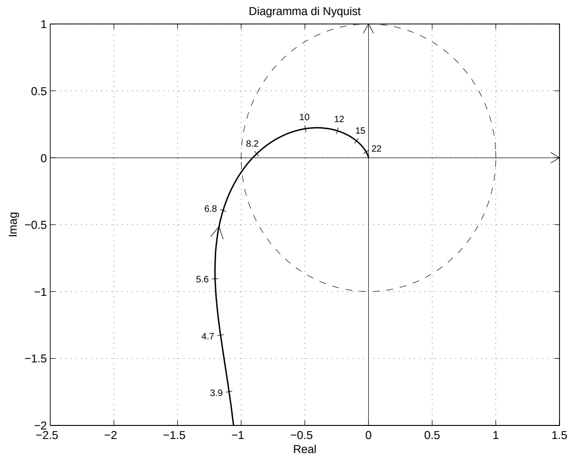
c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.
Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:
c.1) il margine di ampiezza M_a e il margine di fase M_φ del sistema;
c.2) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = (30 + 2\,\mathbf{a})$;
c.3) il guadagno K_a per cui il sistema $K_a\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_a = (2 + \mathbf{b})$;

Per $\mathbf{a} = 3$ si ha $M_\varphi = 36^o$ e $M_a = 5$, per cui i parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



c.1) $M_a = -12.32$ db $= 0.242$

$M_\varphi = -27.63$ gradi

c.2) $K_\varphi = -24.1$ db $= 0.0621$

c.3) $K_a = -29.2$ db $= 0.0346$

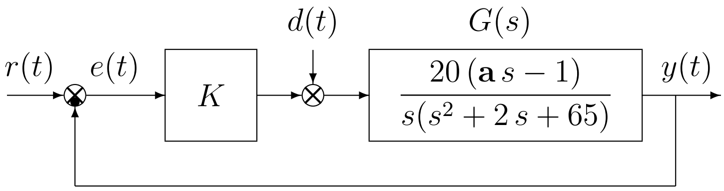
c.1) $M_a = 0.8279$ db $= 1.1$

$M_\varphi = 5.78$ gradi

c.2) $K_\varphi = -3.41$ db $= 0.675$

c.3) $K_a = -16.1$ db $= 0.157$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

<u>Soluzione</u>.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{20\,K\,(\mathbf{a}\,s-1)}{s(s^2+2s+65)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 2s^2 + (65 + 20\,\mathbf{a}\,K)s - 20\,K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccll}
3 & 1 & 65 + 20\,\mathbf{a}\,K & \rightarrow & 1 > 0 \\
2 & 2 & -20\,K & \rightarrow & 2 > 0 \\
1 & (130 + 40\,\mathbf{a}\,K) + 20\,K & & \rightarrow & K > K > -\frac{13}{2\,(2\,\mathbf{a}+1)} \\
0 & -20\,K & & \rightarrow & K < 0
\end{array}$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K^* = -\frac{13}{2\,(2\,\mathbf{a}+1)} < K < 0.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{-10\,K^*} = \sqrt{\frac{65}{(2\,\mathbf{a}+1)}}.$$

Per $\mathbf{a} = 3$ si ha $K^* = -0.9286$ e $\omega^* = 3.0472$.

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

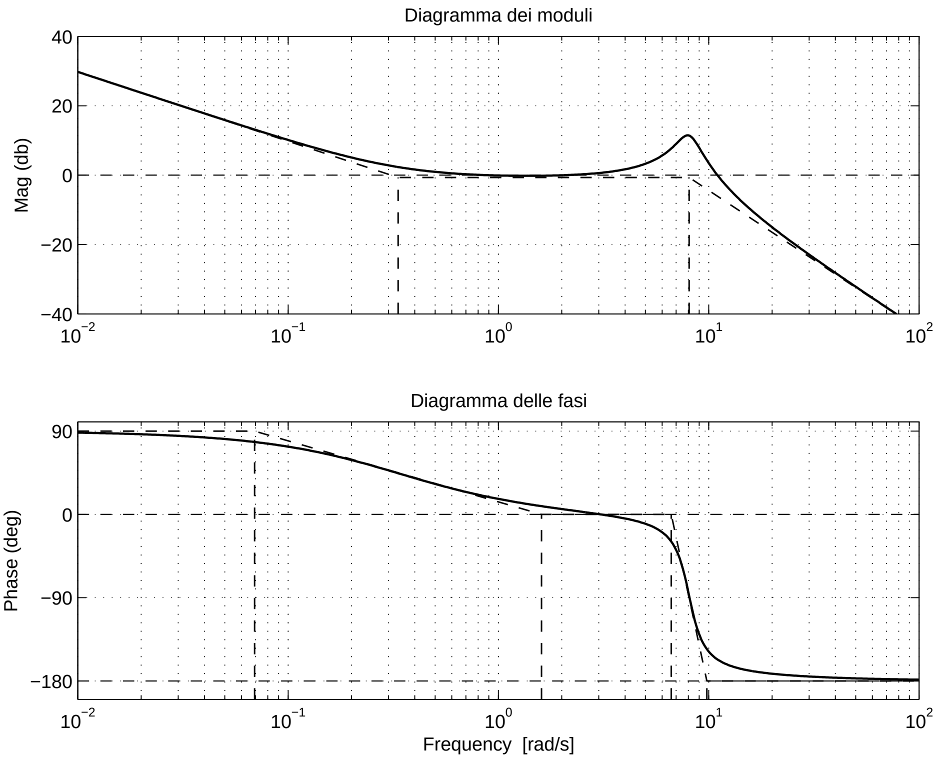


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ per $\mathbf{a} = 3$.

<u>Soluzione</u>. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ per $\mathbf{a} = 3$ sono mostrati in Fig. 1. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = -\frac{20}{65\,s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{20\,\mathbf{a}}{s^2}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ sono:

$$\varphi_0 = -\frac{3\,\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, i guadagni β e γ in corrispondenza delle pulsazioni $\omega = \frac{1}{\mathbf{a}}$ e $\omega = \sqrt{65}$ hanno lo stesso valore:

$$\beta = \frac{20\,\mathbf{a}}{65}, \qquad\qquad \gamma = \frac{20\,\mathbf{a}}{65}.$$

Per $\mathbf{a} = 3$ si ha $\beta = \gamma = 0.9231 = -0.6952$ db.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

<u>Soluzione</u>. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\mathbf{a} = 3$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 2. La fase iniziale del sistema coincide con la vase φ_0 dell'approssimante $G_0(s)$. Per $\omega \to 0^+$ la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = -\mathbf{a} - \frac{2}{65} < 0,$$

per cui il diagramma parte sempre in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0. Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale la cui posizione è:

$$\sigma_a = K_\tau\,\Delta_\tau = \frac{-20}{65}\left(-\mathbf{a} - \frac{2}{65}\right) = \frac{20(65\,\mathbf{a} + 2)}{65^2}$$

Per $\mathbf{a} = 3$ si ha $\sigma_a = 0.9325$. La variazione di fase $\Delta\varphi$ della funzione $G(j\,\omega)$ quando $\omega \in [0^+, \infty]$ è $\Delta\varphi = -\frac{3\pi}{2}$. Vi è un'unica intersezione σ_1^* con il semiasse reale positivo. Tale intersezione si

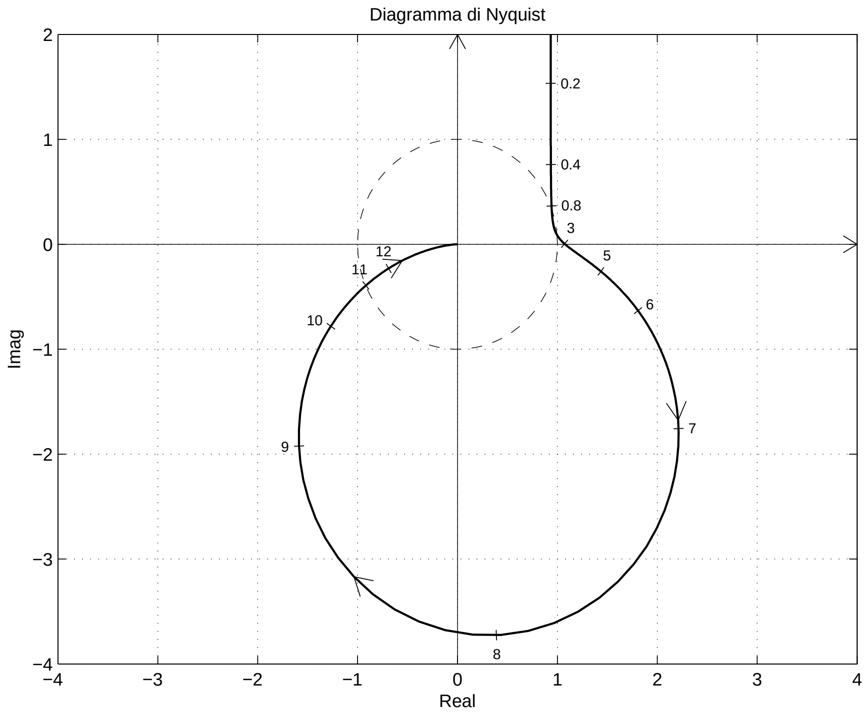


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\mathbf{a} = 3$ e $\omega \in [0, \infty]$.

ricava direttamente dalla precedente analisi di Routh:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} = \frac{2\,(2\,\mathbf{a}+1)}{13}.$$

Il corrispondente valore di ω_1^* è quello determinato con il criterio di Routh: $\omega_1^* = \omega^*$. Per $\mathbf{a} = 3$ si ha $\sigma_1^* = 1.0724$ e $\omega_1^* = 3.0472$.

d.4) Calcolare, in funzione di K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ in presenza del segnale di ingresso $r(t) = 2$ e del segnale di disturbo $d(t) = 3$.

Soluzione: Il sistema $G(s)$ è tipo 1 per cui segnale di ingresso $r(t) = 2$ non ha nessuna influenza sull'errore a regime $e(t)$. La funzione di trasferimento che lega il segnale di disturbo $d(t) = 3$ all'errore a regime $e(t)$ è la seguente:

$$G_d(s) = \frac{-G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{-20\,(\mathbf{a}\,s - 1)}{s(s^2 + 2\,s + 65) + 20\,K\,(\mathbf{a}\,s - 1)}.$$

L'errore a regime richiesto non è altro che il prodotto fra l'ampiezza $d(t) = 3$ del disturbo e il guadagno statico G_{d0} del sistema $G_d(s)$:

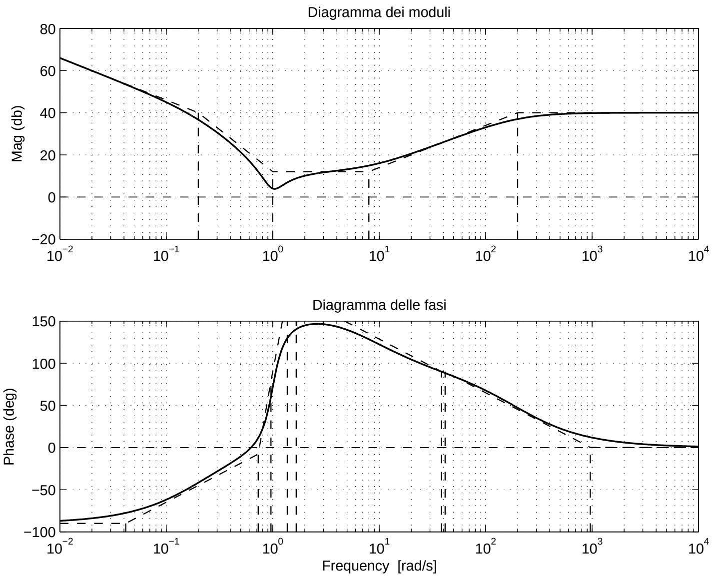
$$e(\infty) = -3\,G_{d0} = -\frac{3}{K}.$$

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

e.1) calcolare la risposta oscillatoria "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema quando in ingresso è presente il segnale:

$x(t) = 6\, \sin(0.1\, \mathbf{b}\, t + \frac{\pi}{4})$.

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.



$G(s) \simeq$

e.1)

1) *Sol.* La risposta a regime del sistema $G(s)$ al segnale $x(t)$ è la seguente:

$$y_\infty(t) = 6\,|G(j\,0.1\,\mathbf{b})|\,\sin(0.1\,\mathbf{b}\,t + \frac{\pi}{4} + \arg G(j\,0.1\,\mathbf{b}))$$

Per $\mathbf{b} = 5$ si ha:

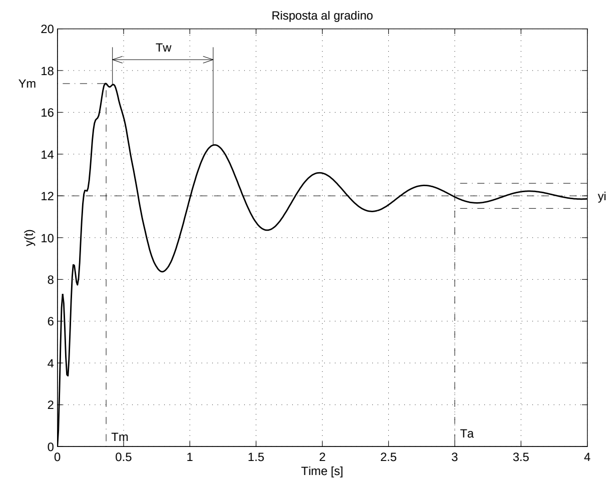
$$y_\infty(t) = 6\,|G(j\,0.5)|\,\sin(0.5\,t + \frac{\pi}{4} + \arg G(j\,0.5)) = 69.3\,\sin(0.5\,t + \frac{\pi}{4} - 10.59^o)$$

L'andamento temporale $y_\infty(t)$ è solo teorico perchè il sistema $G(s)$ non è stabile (vedi punto 2).

2) *Sol.* La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) \simeq \frac{100\,(s^2 + 0.4\,s + 1)(s-8)}{s\,(s-0.2)(s+200)} = \frac{20\,(1 + 0.4\,s + s^2)(1 - 0.125\,s)}{s\,(1-5\,s)(1+0.005\,s)}.$$

f) In figura è mostrata la risposta $y(t)$ al gradino $x(t) = X_0 = 4$ di un sistema dinamico $G(s)$ caratterizzato solamente da 2 poli stabili. Determinare:



1) I poli dominanti del sistema:

$$\sigma = \frac{3}{T_a} \simeq 1, \qquad \omega = \frac{2\,\pi}{T_\omega} \simeq \frac{6.28}{0.81},$$

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\,\omega = -1 \pm 7.93\,j.$$

2) Il guadagno statico del sistema:

$$G_0 = \frac{y_\infty}{X_0} = 3.$$

3) La pulsazione naturale ω_n:

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \simeq 8.$$

4) La massima sovraelongazione $S\%$:

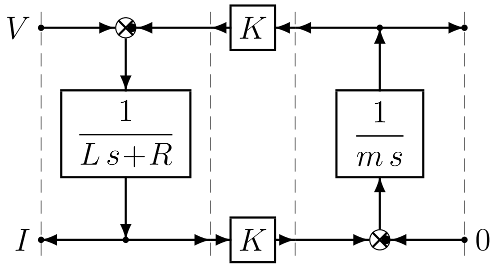
$$S\% \simeq 44.8\%$$

Controlli Automatici - Primo Compito
27 Gennaio 2010 - Domande
Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad "a" e "b" i valori assegnati e si risponda alle domande.

1. Dato il seguente schema a blocchi, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso V all'uscita I e scrivere la corrispondente equazione differenziale che lega i segnali $V(t)$ e $I(t)$:



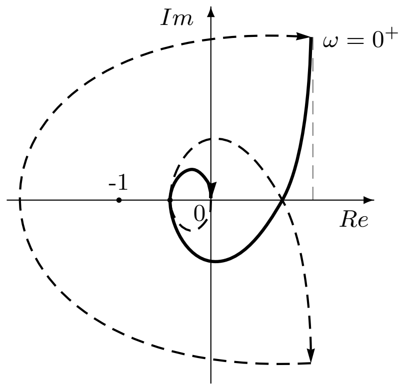
$$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{m\,s}{m\,L\,s^2 + m\,R\,s + K^2}$$

$$m\,L\,\ddot{I}(t) + m\,R\,\dot{I}(t) + K^2\,I(t) = m\,\dot{V}(t)$$

2. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con 1 polo nell'origine e tutti gli altri a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

○ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;
○ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
⊗ $(K < 0,\ |K| << 1)$;
○ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;



3. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{10\,(2\,s^2+3)}{s(s+1)(2\,s+\mathbf{a})} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = 10, \qquad y_\infty = \frac{30}{\mathbf{a}}$$

4. Sia $X(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $x(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della derivata":

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s\,X(s) - x(0)$$

5. Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli mostrato in figura.

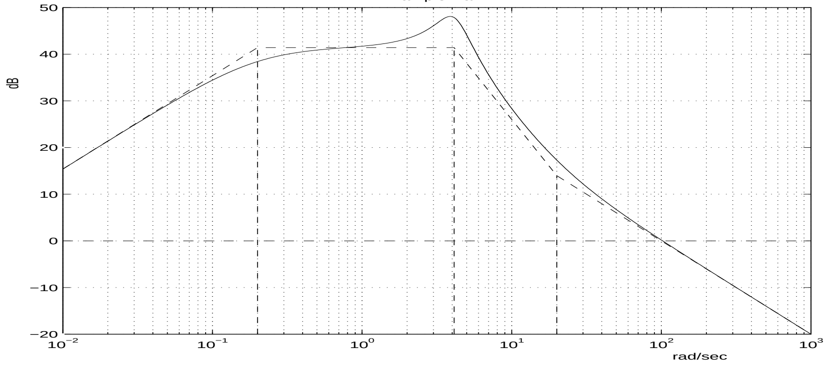
Sapendo che il sistema è a fase minime, stimare "indicativamente" la fase del sistema in corrispondenza delle seguenti pulsazioni:

$\omega_1 = 0.02 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 \simeq \frac{\pi}{2}$

$\omega_2 = 1 \quad \rightarrow \quad \varphi_2 \simeq 0$

$\omega_3 = 4 \quad \rightarrow \quad \varphi_3 \simeq -\frac{\pi}{2}$

$\omega_4 = 100 \quad \rightarrow \quad \varphi_4 \simeq -\frac{\pi}{2}$



6. Nella determinazione degli errori a regime, il *principio del modello interno* afferma che: *affinché sia neutralizzato (con errore a regime nullo) un modo $r(t)$ in ingresso corrispondente ad un polo nell'origine di ordine h, occorre che ...*

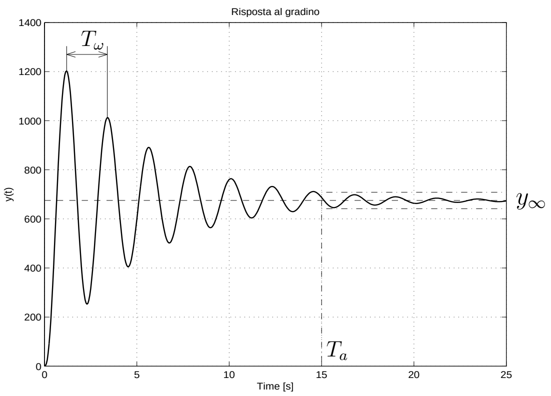
   lo stesso modo sia presente nel regolatore (o nel sistema controllato), che pertanto deve avere un polo nell'origine pure di ordine h o superiore, cioè contenere un modello del sistema elementare $1/s^h$ che genera quel modo.

7. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

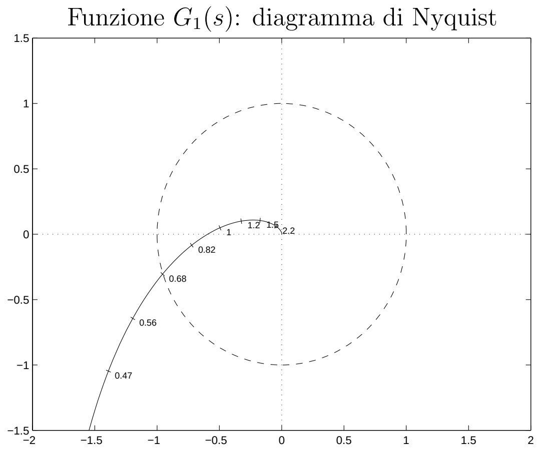
$$G(s) = \frac{(2 + 0.04\,s)(s^2 + 90\,s + 8100)}{(1 + 0.04\,s)(s^2 + 0.4\,s + 8)(3 + 0.2\,s)}$$

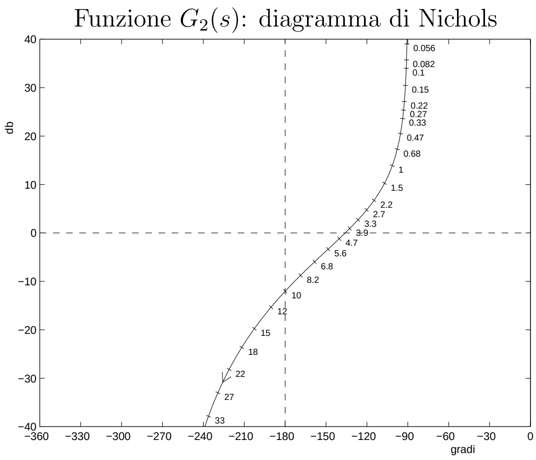
Calcolare inoltre:
1) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
2) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
3) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$y_\infty = 675, \qquad T_a \simeq 15\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq 2.22\,\text{s}.$



8. Fornire una stima della larghezza di banda ω_{f0} e del tempo di salita t_r dei due sistemi retroazionati corrispondenti ai seguenti diagrammi di Nyquist $G_1(s)$ e di Nichols $G_2(s)$:





$\omega_{f0,1} \simeq 0.68 \qquad t_{r1} \simeq 1.47$ s $\qquad \omega_{f0,2} \simeq 4.2 \qquad t_{r2} \simeq 0.24$ s

9. Un sistema del secondo ordine privo di zeri e caratterizzato da una coppia di poli complessi coniugati con coefficiente di smorzamento nullo ($\delta = 0$):

   ⊗ ha un guadagno statico finito
   ⊗ ha un picco di risonanza infinito $M_R \to \infty$
   ○ ha un picco di risonanza unitario $M_R = 1$
   ⊗ ha una massima sovraelongazione $S = 100\,\%$

10. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(\mathbf{a} - s)}{s(1 + \mathbf{b}\,s)^2}\, e^{-2\,t_0 s} \qquad \to \qquad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{\sqrt{\omega^2 + \mathbf{a}^2}}{\omega(1 + \omega^2\,\mathbf{b}^2)} \\ \varphi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2} - 2\,t_0\,\omega - \arctan\dfrac{\omega}{\mathbf{a}} - 2\,\arctan\mathbf{b}\,\omega \end{cases}$$