Controlli Automatici A
Compito Completo
22 Dicembre 2008 - Esercizi

Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 2\,t^4 + e^{-b\,t}\cos(a\,t), \qquad x_2(t) = a\,t\,e^{bt} + b\,\sin(3\,t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{48}{s^5} + \frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}, \qquad X_2(s) = \frac{a}{(s-b)^2} + \frac{3\,b}{s^2+9}$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s+10}{s+a}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{s(1+b\,s)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \delta(t) + (10-a)\,e^{-a\,t}, \qquad g_2(t) = 2\left[1 - e^{-\frac{t}{b}}\right]$$

Infatti la funzione $G_1(s)$ ha grado relativo $r = 0$ per cui prima di essere antitrasformata deve essere scomposta nella somma di un termine costante G_c e di una funzione $\bar{G}_1(s)$ avente grado relativo $r \geq 1$:

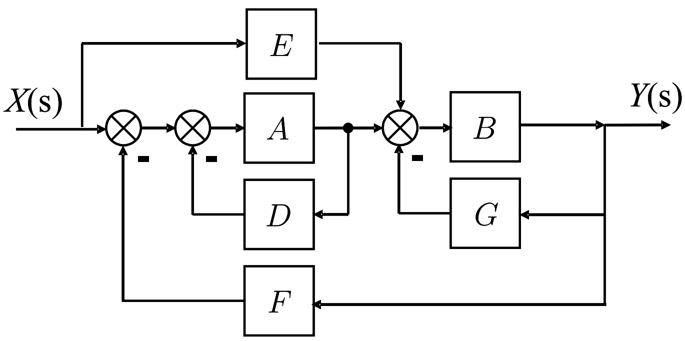
$$G_1(s) = 1 + \frac{(10-a)}{s+a} = G_c + \bar{G}_1(s) \qquad \text{dove} \qquad G_c = \lim_{s\to\infty} G(s) = 1$$

Per antitrasformare la $G_2(s)$ si deve prima portarla nella forma poli-zeri:

$$G_2(s) = \frac{2}{s(1+b\,s)} = \frac{2}{b}\frac{1}{s(s+\frac{1}{b})} = \frac{2}{b}\left[\frac{b}{s} - \frac{b}{(s+\frac{1}{b})}\right]$$

b) Relativamente allo schema a blocchi riportato in figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB+EB(1+AD)}{1+AD+BG+ABF+ADBG}$$



c) In figura è mostrato il diagramma di Bode dei moduli di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione del grafico, calcolare:

c.1) il guadagno statico del sistema $G(s)$:

$$G(0) = 40$$

c.2) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino del sistema $G(s)$:

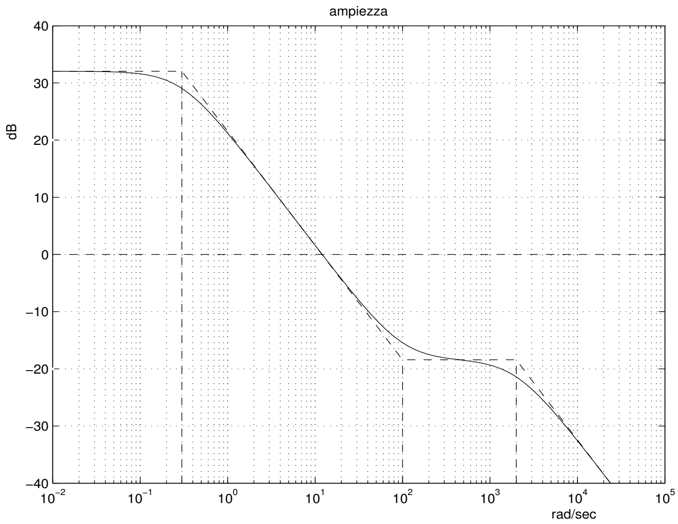
$$T_a \simeq 10 \ \text{ s}$$

c.3) la larghezza di banda ω_f del sistema $G(s)$:

$$\omega_f \simeq 0.3 \ \text{ rad/s}$$

c.4) la larghezza di banda ω_{f0} del sistema retroazionato $G_0(s) = G(s)/(1 + G(s))$:

$$\omega_{f0} \simeq 11 \ \text{ rad/s}$$



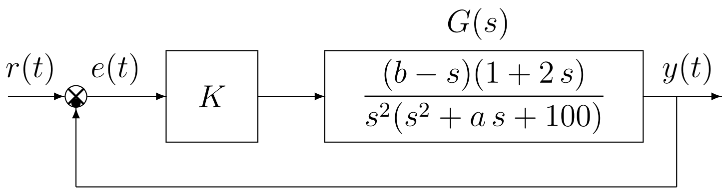
c.5) l'errore a regime e_p del sistema $G(s)$ retroazionato per ingresso a gradino unitario:

$$e_p \simeq \frac{R_0}{1 + G(0)} = \frac{1}{41} = 0.0244$$

c.6) la fase del sistema $G(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 8$:

$$\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$ sono mostrati in Fig. 1. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{b}{100\,s^2}, \qquad\qquad G_\infty(s) = -\frac{2}{s^2}$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ sono:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = -2\,\pi$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.5$ e il guadagno γ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 10$ hanno il seguente valore:

$$\beta = \frac{b}{25}, \qquad\qquad \gamma = \frac{2}{100}$$

d.2) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(b - s)(1 + 2\,s)}{s^2(s^2 + a\,s + 100)} = 0 \qquad \to \qquad s^4 + a\,s^3 + (100 - 2\,K)s^2 + K(2\,b - 1)s + K\,b = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

4	1	$100 - 2\,K$	$K\,b$
3	a	$K(2\,b - 1)$	
2	$K(1 - 2a - 2b) + 100a$	$K\,a\,b$	
1	$K(2\,b - 1)[K(1 - 2a - 2b) + 100a] - K\,a^2\,b$		
0	$K\,a\,b$		

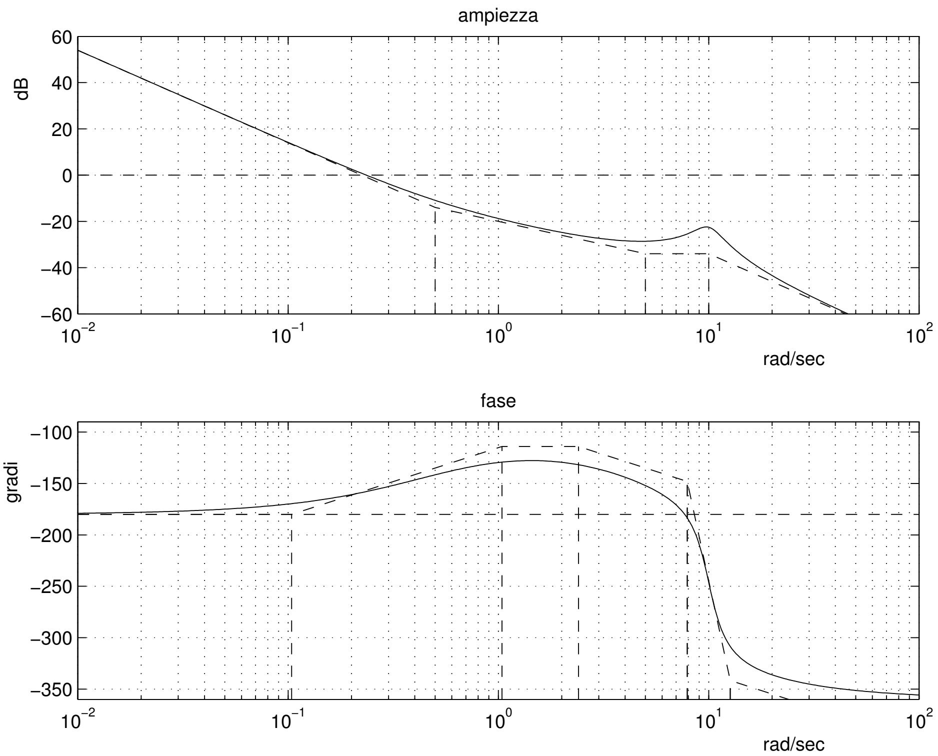


Figura 1: I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < \frac{100a}{(2a + 2b - 1)}, \qquad\qquad K > 0$$

Dalla riga 1 si ottiene la disequazione seguente:

$$K[K(1 - 2a - 2b)(2\,b - 1) + 100a(2\,b - 1) - \ a^2\,b] > 0$$

da cui, essendo $K > 0$ si ricava:

$$K(1 - 2a - 2b)(2\,b - 1) + 100a(2\,b - 1) - \ a^2\,b > 0$$

Risolvendo rispetto a K si ottiene:

$$K < \frac{100a(2\,b - 1) - \ a^2\,b}{(2a + 2b - 1)(2\,b - 1)} = K^*$$

Tale relazione riscritta nel modo seguente

$$K < \frac{100a}{(2a + 2b - 1)} - \frac{a^2\,b}{(2a + 2b - 1)(2\,b - 1)} = K^*$$

mette in evidenza che si tratta si tratta di una relazione piú stringente di quella ottenuta dalla riga 2. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per

$$0 < K < K^*$$

Nel caso $a = 3$ e $b = 5$ si ha: $K^* = 19.67$. La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*(2b - 1)}{a}} = \sqrt{\frac{100(2\,b - 1) - \ a\,b}{(2a + 2b - 1)}}$$

Nel caso $a = 3$ e $b = 5$ si ha: $\omega^* = 7.6811$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

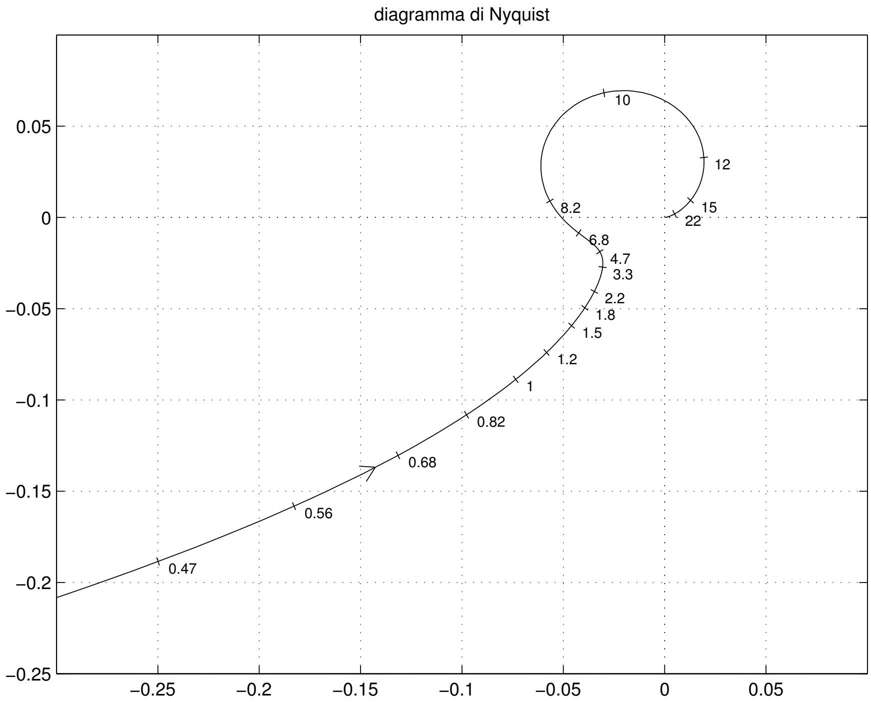


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$, $b = 5$ e $\omega \in [0,\ \infty]$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$, $b = 5$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 2.

Il sistema é di tipo 2 per cui non esiste nessun asintoto verticale. La fase iniziale del sistema, calcolata al punto d.1, è $\varphi = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 2 - \frac{1}{b} - \frac{a}{100} > 0$$

La variazione di fase $\Delta\varphi = -\pi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\pi$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -2\pi$. Esiste quindi un'unica intersezione σ_1^* con il semiasse reale positivo. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.2:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} \qquad \xrightarrow{a=3,\, b=5} \qquad \sigma_1^* = -0.0508$$

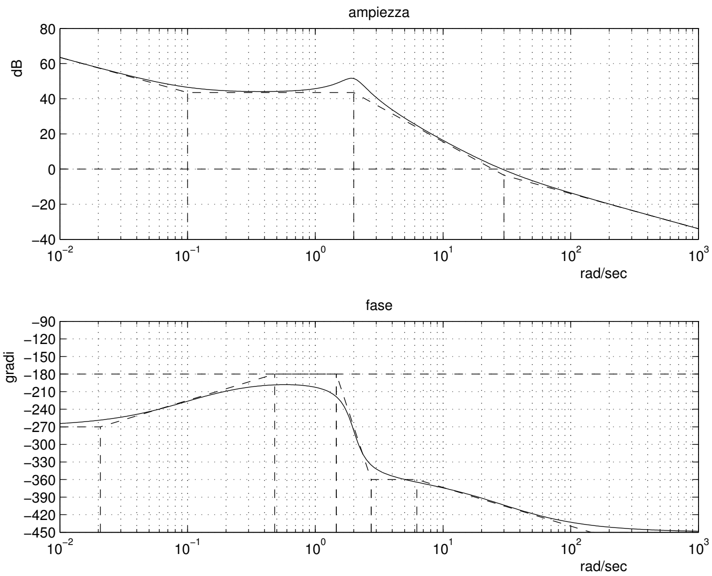
Il corrispondente valore di ω_1^* è quello determinato al punto a.1: $\omega_1^* = 7.6811$.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = a\,\sin(10\,b\,t + \frac{\pi}{3})$;

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

$$G(s) \simeq \frac{20(s+0.1)(s-30)}{s(s^2+0.8\,s+2^2)}$$



e.1) La risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = a\,\sin(10\,b\,t + \frac{\pi}{3})$ è la seguente:

$$y_\infty(t) = a\,|G(10\,b\,j)|\,\sin\left(10\,b\,t + \frac{\pi}{3} + \mathrm{Arg}\,G(10\,b\,j)\right)$$

Per $a = 3$ e $b = 5$ si ha:

$$y_\infty(t) = 3\,|G(50\,j)|\,\sin\left(50\,t + \frac{\pi}{3} + \mathrm{Arg}\,G(50\,j)\right) = 1.4016\,\sin\left(50\,t + \frac{\pi}{3} - 58.23^o\right)$$

f) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

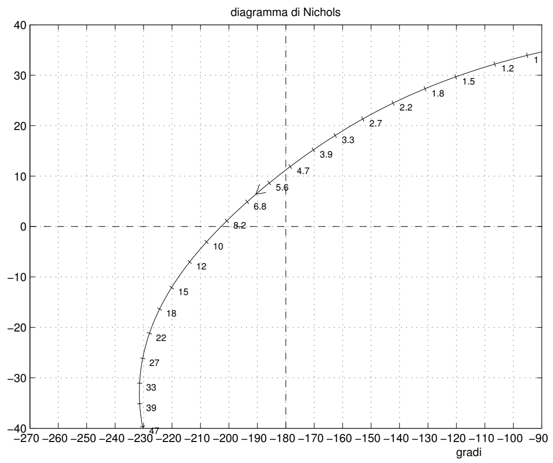
f.1) il margine di ampiezza M_a e il margine di fase M_φ del sistema;

f.2) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = (30 + 2\,a)$;

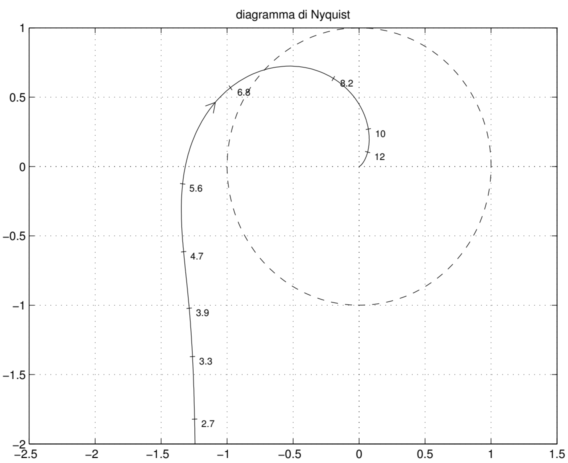
f.3) il guadagno K_a per cui il sistema $K_a\,G(s)$ ha un margine di ampiezza $M_a = (2 + a)$;

Per $a = 3$ si ha $M_\varphi = 36^o$ e $M_a = 5$, per cui i parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(j\omega)$



$G_2(j\omega)$



G_1:

f.1) $M_a = -11.21$ db $= 0.275$

$M_\varphi = -22.75$ gradi

f.2) $K_\varphi = -23.8$ db $= 0.0645$

f.3) $K_a = -25.2$ db $= 0.055$

G_2:

f.1) $M_a = -2.393$ db $= 0.7592$

$M_\varphi = -44.26$ gradi

f.2) $K_\varphi = -4.02$ db $= 0.629$

f.3) $K_a = -16.4$ db $= 0.152$

Controlli Automatici - Primo Compito
22 Dicembre 2008 - Domande
Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad "a" e "b" i valori assegnati e si risponda alle domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente l'equazione differenziale:

$$\dddot{y} + \ddot{y} + a\,\dot{y} + 4\,y = \ddot{x} + 3\,\dot{x} + 5\,x \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 3\,s + 5}{s^3 + s^2 + a\,s + 4} X_1(s)$$

Dire se il sistema dinamico $G(s)$ è: ⊗ stabile se $a \geq 4$; ○ instabile.

2. Calcolare la posizione σ_a dell'asintoto verticale del diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(s+2)(a\,s+3)}{s(2\,s^2 + 3\,s + 6)} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_a = \frac{a}{3}$$

3. Completare la seguente formulazione del criterio di Nyquist (quella valida anche per sistemi instabili ad anello aperto).

Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $F(s)$...

non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio,

condizione ○ *solo necessaria* ○ *solo sufficiente* ⊗ *necessaria e sufficiente*

affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che: ...

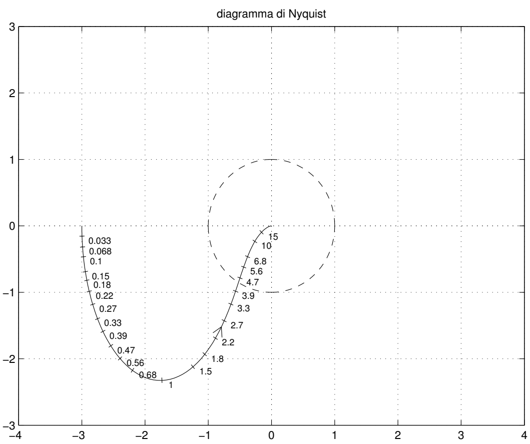
il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.

4. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{50(s+0.6)}{(s-1)(s+1)(s+10)}$.
Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

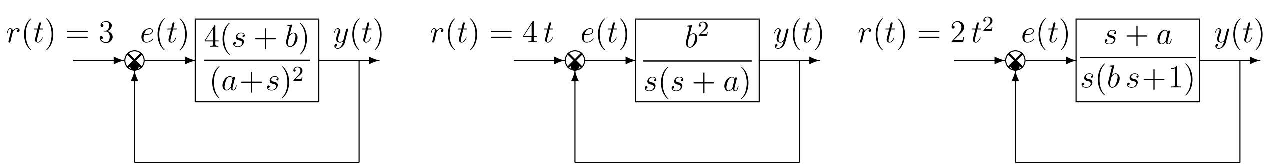
○ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;
○ $(K < 0,\ |K| << 1)$;
○ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
⊗ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;

Calcolare il valore limite K^*:

$$K > K^* = 0.333$$



5. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{3\,a^2}{a^2 + 4\,b} \qquad e(\infty) = \frac{4\,a}{b^2} \qquad e(\infty) = \infty$$

6. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $\ddot{y}(t) + a^2\, y(t) = 0$ partendo dalle condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = a$. Si ricorda che vale la regola: $\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2 F(s) - f(0)\, s - \dot{f}(0)$.

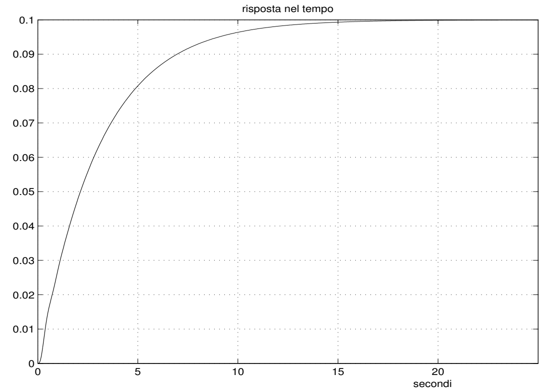
$$Y(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = \sin(a\, t)$$

7. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{30(5 + 0.1\, s)(s^2 + 50\, s + 2000)}{(10 + 0.2\, s)(\mathbf{3 + 9\, s})(s^2 + 6\, s + 100)(s^2 + 20\, s + 1000)}$$

Calcolare inoltre:
1) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
2) il tempo di assestamento T_a della risposta impulsiva $y_1(t)$;
3) il periodo T dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

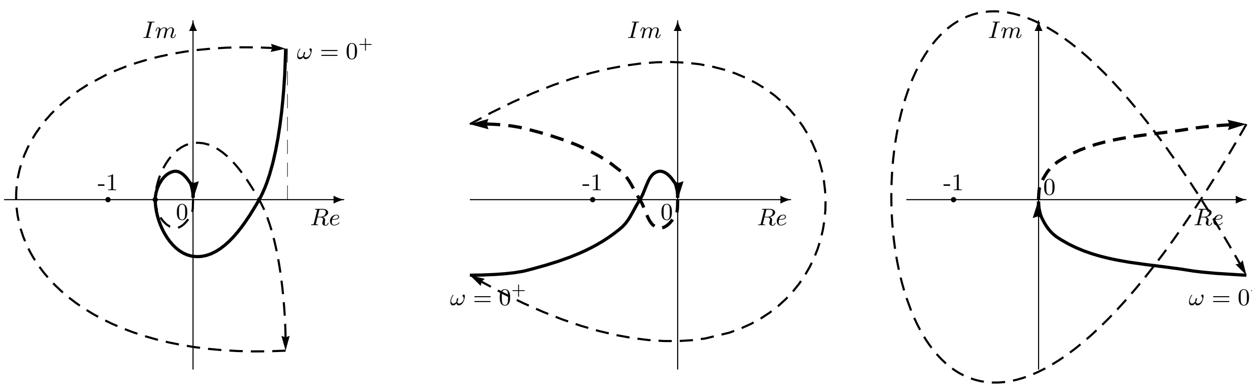
$$y_\infty = 0.1, \qquad T_a \simeq 9\,\mathrm{s}, \qquad T \simeq \nexists$$



8. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{5\,(b\, s - a)(s + 1)}{s(s + 2)(3\, s + 50)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = \frac{5\, b}{3} \qquad y_\infty = -\frac{a}{20}$$

9. Chiudere all'infinito i seguenti diagrammi di Nyquist. Nota: tutti i diagrammi di Nyquist fanno riferimento a sistemi con tutti i poli a parte reale negativa eccezion fatta per un polo semplice o doppio nell'origine.



10. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione della coppia di poli complessi coniugati $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ corrispondente all'andamento temporale $g_1(t) = 2\, e^{-3\, t} \sin(6\, t + 0.7)$:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -3 \pm j\, 6$$

11. Sia $y(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso sinusoidale $x(t) = X \sin(\omega t + \varphi_0)$. Fornire la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)}$$

12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(s + a)}{s^3}\, e^{-2\, t_0 s} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{\omega^3} \\ \varphi(\omega) = -\dfrac{3\,\pi}{2} - 2\, t_0\, \omega + \arctan \dfrac{\omega}{a} \end{cases}$$