Controlli Automatici A
Compito Completo
20 Dicembre 2007 - Esercizi

Compito A Nr. $a =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a il valore assegnato e si risponda alle domande.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = e^{-a\,t}\,(t^2 - 2)\ , \qquad\qquad x_2(t) = 3\,e^{a\,t}\,\sin(5\,t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2}{(s+a)^3} - \frac{2}{(s+a)}, \qquad\qquad X_2(s) = \frac{15}{(s-a)^2+25}$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

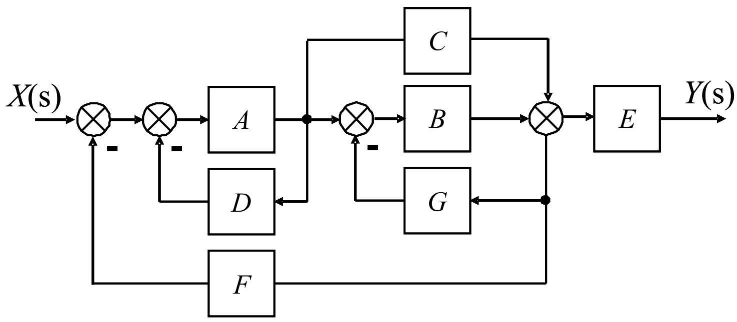
$$G_1(s) = \frac{a}{(4\,s+1)(s+2)^2}\ , \qquad\qquad G_2(s) = \frac{a}{(s^2+a^2)}\,e^{-10\,s}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{4\,a}{49}\,e^{-0.25\,t} - \frac{4\,a}{49}\,e^{-2\,t} - \frac{a}{7}\,t\,e^{-2\,t}, \qquad\qquad g_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad t \le 10 \\ \sin(a\,(t-10)) & \text{per} \quad t > 10 \end{cases}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi riportato in figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{ADE+ACE}{1+AD+BG+ABF+ACF+ADBG}$$

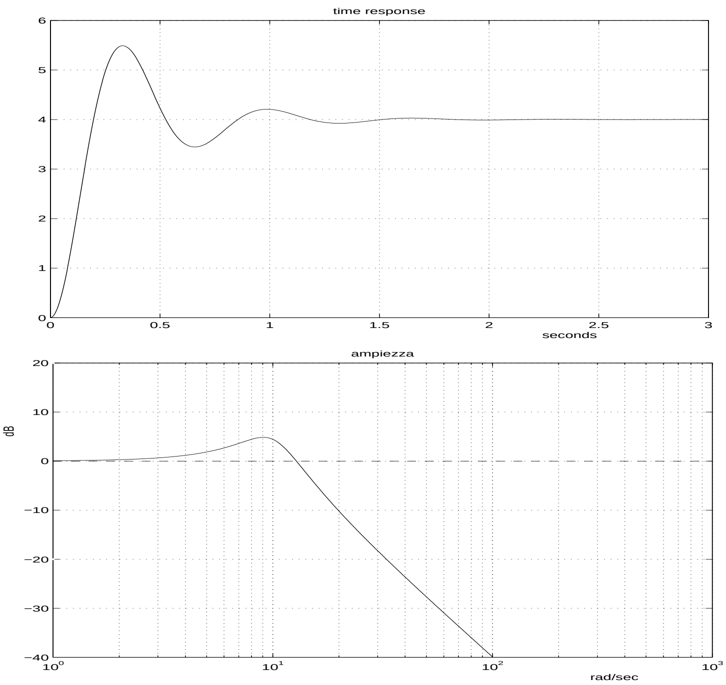


c) In figura è mostrata la risposta $y(t)$ di un sistema lineare $G(s)$ stabile del "secondo" ordine quando in ingresso è presente un gradino $x(t) = 4$. Nei limiti della precisione del grafico:

c.1) determinare la funzione di trasferimento del sistema $G(s)$ stimando anche qualitativamente il valore del coefficiente di smorzamento:

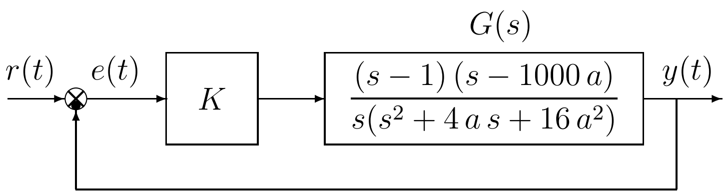
$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 6\,s + 100} = \frac{100}{(s+3)^2 + 91}$$

$$p_{1,2} = -3 \pm 9.54\,j, \qquad \delta = 0.3$$



c.2) nello schema riportato a lato tracciare il diagramma di Bode delle ampiezze della funzione $G(s)$.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$sono mostrati in Fig. 1. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le

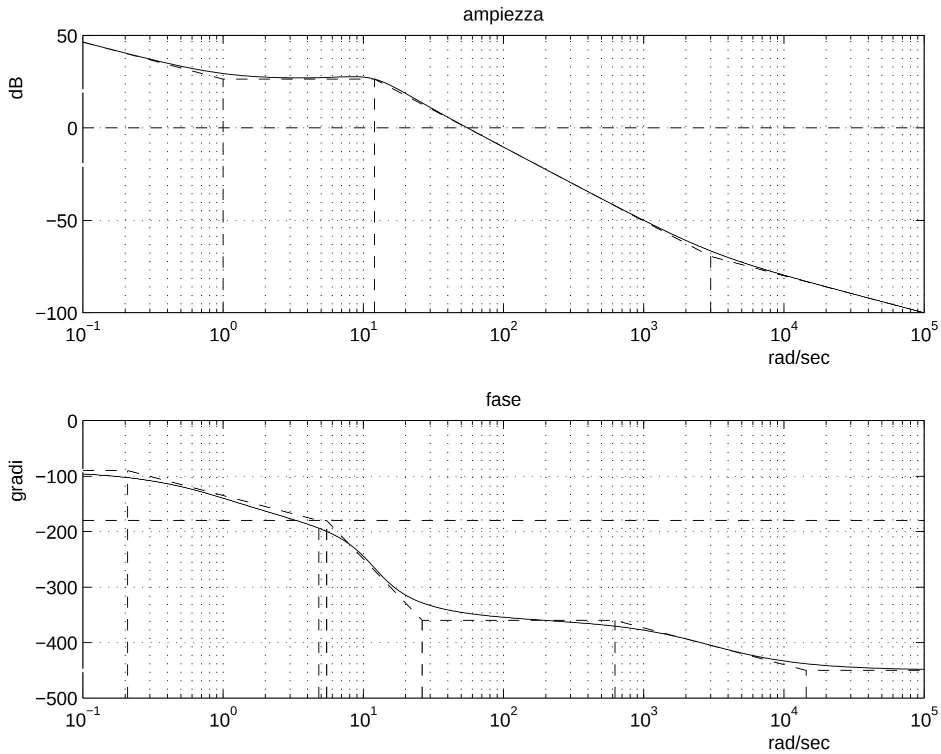


Figura 1: I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$.

seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1000}{16\,a\,s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{1}{s}$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ sono:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2} = -\frac{5\,\pi}{2}$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1000\,a$ hanno il seguente valore:

$$\beta = \frac{1000}{16\,a} \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{1000\,a} = -60\text{ dB} - a|_{\text{dB}}$$

d.2) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{K\,(s-1)\,(s-1000\,a)}{s(s^2+4\,a\,s+16\,a^2)} = 0 \quad\rightarrow\quad s^3+(K+4\,a)s^2+(16\,a^2-K-1000\,a\,K)\,s+1000\,a\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & (16\,a^2-K-1000\,a\,K) \\
2 & (K+4\,a) & 1000\,a\,K \\
1 & (K+4\,a)(16\,a^2-K-1000\,a\,K)-1000\,a\,K & \\
0 & 1000\,a\,K &
\end{array}$$

L'equazione corrispondente alla prima riga della tabella di Routh è:

$$-(1+1000\,a)K^2-(1004+3984\,a)\,a\,K+64\,a^3 = 0$$

Le radici di tale equazione sono:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \tfrac{2(-251\,a-996\,a^2+\sqrt{63001\,a^2+500008\,a^3+1008016\,a^4})}{1+1000\,a} = K^* \\
K_2 &= \tfrac{2(-251\,a-996\,a^2-\sqrt{63001\,a^2+500008\,a^3+1008016\,a^4})}{1+1000\,a}
\end{aligned}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$0 < K < K^*$$

Nel caso $a = 3$ si ha $K^* = 0.04431$ e $K_2 = -12.996$. La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è

$$\omega^* = \sqrt{\frac{1000\,a\,K^*}{(K^*+4\,a)}} = \sqrt{16\,a^2-K^*-1000\,a\,K^*}$$

Nel caso $a = 3$ si ha $\omega^* = 3.322$, $\omega_2 = 197.85$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 2. Il diagramma di Nyquist ha un asintoto verticale nella seguente posizione:

$$\sigma_a = \frac{1000}{16\,a}\left(-1-\frac{1}{1000\,a}-\frac{1}{4\,a}\right) \quad \xrightarrow{a=3} \quad \sigma_a = -22.5764$$

Vi sono due intersezioni σ^* e σ_2 con l'asse reale che si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.2):

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} \overset{a=3}{\equiv} -22.5683, \qquad\qquad \sigma_2 = -\frac{1}{K_2} \overset{a=3}{\equiv} 0.0769$$

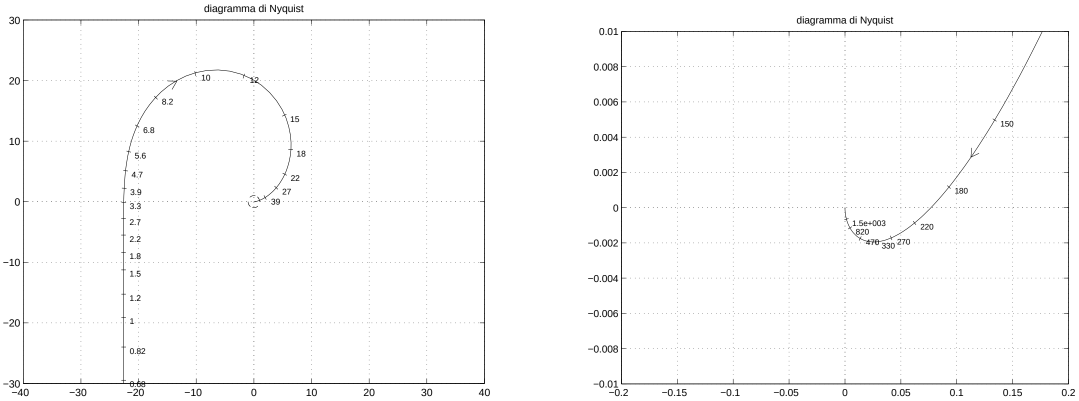


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$.

I corrispondenti valori di ω^* e ω_2 sono quelli determinati al punto d.2: $\omega^* = 3.322$, $\omega_2 = 197.85$.

d.4) Calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e(\infty)$ del sistema retroazionato nel caso in cui $r(t) = 5\,t^2$.

Soluzione: l'errore a regime richiesto è sicuramente infinito in quanto il sistema è di tipo 1 mentre l'ingresso è una parabola:

$$K_a = 0 \qquad\qquad \rightarrow \qquad\qquad e_a = \frac{R_0}{K_v} = \frac{10}{K_v} = \infty$$

e) I diagrammi di Bode riportati sotto sono relativi ad un sistema a fase minima $G(s)$. Nei limiti della precisione consentita dai grafici:

1) Indicare il margine di ampiezza M_α e il margine di fase M_φ.

2) Calcolare per quali valori del guadagno $K_p > 0$ il sistema $K_p\,G(s)$ posto in retroazione unitaria è stabile.

3) Determinare per quale valore K_φ del guadagno il sistema $K_\varphi\,G(s)$ presenta un margine di fase pari a $M_\varphi = (30 + 3a)$.

4) Determinare per quale valore K_α del guadagno il sistema $K_\alpha\,G(s)$ presenta un margine di ampiezza pari a $M_\alpha = (3 + a)$.

Per $a = 3$ si ha $M_\varphi = 39$ e $M_\alpha = 6$, per cui i valori richiesti sono i seguenti:

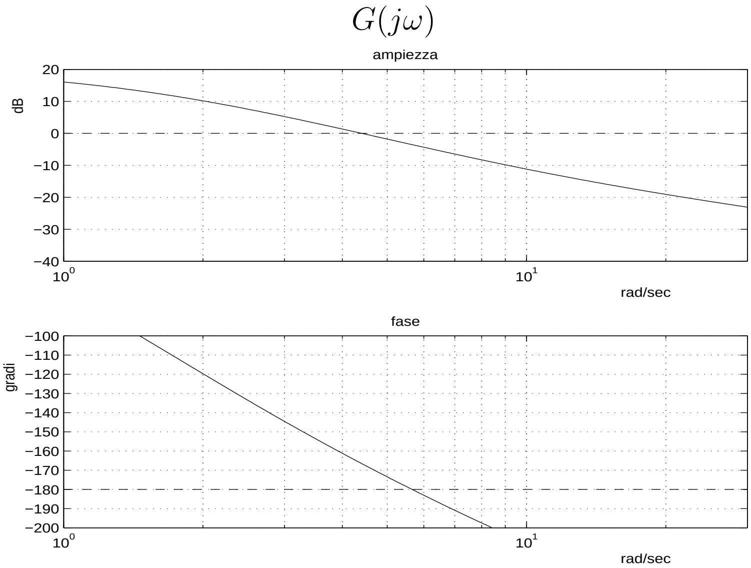
1) $M_\alpha = 3.522$ db $= 1.5$

$M_\varphi = 13.43$ gradi

2) $0 < K_1 < 1.5$

3) $K_\varphi = -5.92$ db $= 0.506$

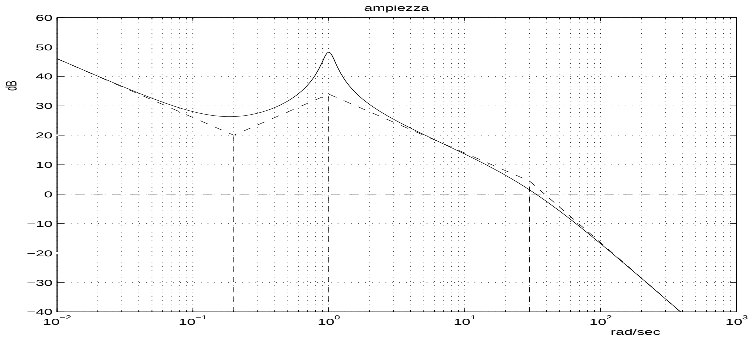
4) $K_\alpha = -12$ db $= 0.25$



f) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ a fase minima il cui diagramma di Bode delle ampiezze è mostrato in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$.

$$G(s) \simeq \frac{1500(s+0.2)^2}{s(s^2+0.2\,s+1)(s+30)}$$



Il guadagno K della funzione di trasferimento $G(s)$ si determina imponendo che il module l'approssimante $G_0(s)$ alla pulsazione $\omega = 0.2$ sia uguale al guadagno $\beta = 10 = 20$ dB:

$$|G_0(s)|_{s=j\,0.2} = \left|\frac{K\,0.2^2}{30\,s}\right|_{s=j\,0.2} = \frac{K\,0.2}{30} = 10 \qquad \rightarrow \qquad K = 1500$$

Controlli Automatici
20 Dicembre 2007 - Domande
Compito A Nr. $\boxed{a =\quad}$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad "a" il valore assegnato e si risponda alle domande.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$a\dddot{y}(t) + 3\,\ddot{y}(t) + 5\,\dot{y}(t) + y(t) = 3a\,\ddot{x}(t) + 7\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3\,a\,s^2 + 7}{a\,s^3 + 3\,s^2 + 5\,s + 1}$$

2. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{a\,(2\,s^2+3)}{s(s+1)(2\,s+100)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = a \qquad y_\infty = \frac{3\,a}{100}$$

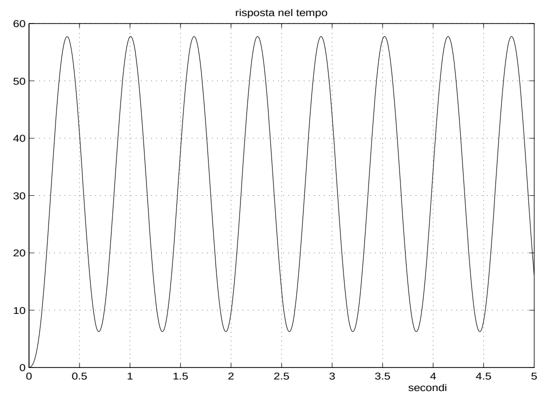
3. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace del segnale $f(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema dell'integrale":

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\,F(s)$$

4. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{(3+0.05\,s)(s^2+80\,s+6400)}{(6+0.3\,s)(1+0.05\,s)(s^2+100)}$$

Calcolare inoltre:
1) il guadagno statico K_0 del sistema;
2) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino;
3) il periodo T dell'eventuale oscillazione smorzata presente nella risposta al gradino:



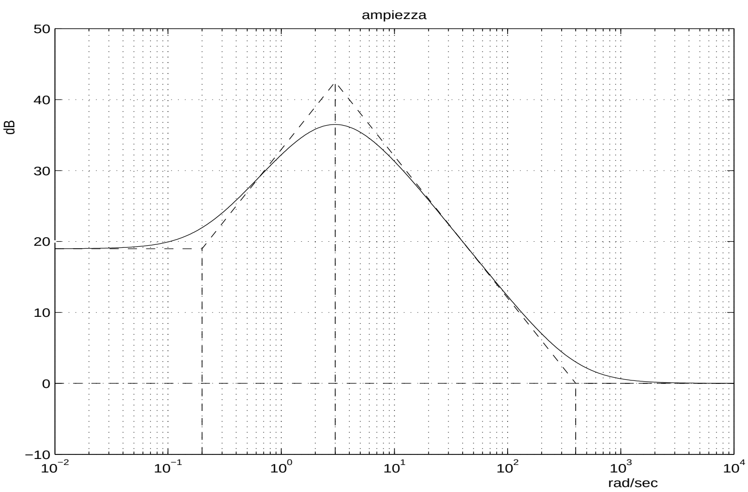
$$K_0 = 32, \qquad T_a \simeq \infty, \qquad T \simeq \frac{2\pi}{10} = 0.628\,\mathrm{s}$$

La coppia di poli dominanti del sistema è data dal termine:

$$(s^2+100) = (s+10\,j)(s-10\,j)$$

.

5. Si faccia riferimento al diagramma di Bode dei moduli mostrato in figura. Sapendo che il sistema è a fase minime, stimare "indicativamente" la fase del sistema in corrispondenza delle seguenti pulsazioni:



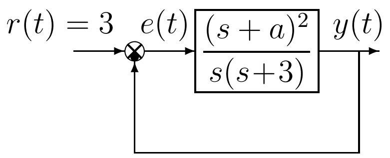
$\omega_1 = 0.2 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 \simeq \frac{\pi}{4}$

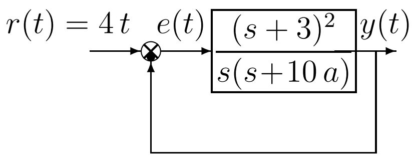
$\omega_2 = 3 \quad \rightarrow \quad \varphi_2 \simeq 0$

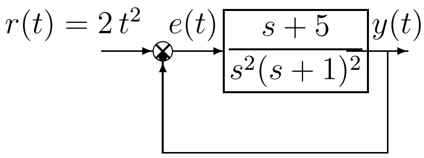
$\omega_3 = 40 \quad \rightarrow \quad \varphi_3 \simeq -\frac{\pi}{2}$

$\omega_4 = 10000 \quad \rightarrow \quad \varphi_4 \simeq 0$

6. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:







$e(\infty) = 0$ $\qquad e(\infty) = \dfrac{40\,a}{9}$ $\qquad e(\infty) = \dfrac{4}{5}$

7. Data la funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{K}{s^2+8s+20}$, il valore della pulsazione ω della risposta al gradino unitario del sistema $G(s)$ è pari a:

- ○ $\omega = \sqrt{2}$
- ○ $\omega = \sqrt{20}$
- ○ $\omega = 20$
- ⊗ $\omega = 2$

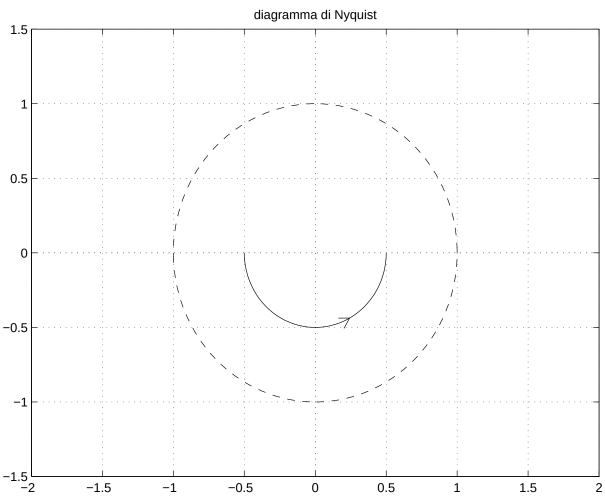
8. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = 0.5\dfrac{(s+1)}{(s-1)}$.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:

- ⊗ $(K < 0,\ |K| >> 1)$;
- ○ $(K < 0,\ |K| << 1)$;
- ○ $(K > 0,\ |K| << 1)$;
- ⊗ $(K > 0,\ |K| >> 1)$;

Calcolare i valori limite K_1^* e K_2^*:

$K > K_1^* = 2\,, \qquad\qquad K < K_2^* = -2$



9. Sia $y(t) = Y(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso sinusoidale $x(t) = X\sin(\omega t + \varphi_0)$. Fornire la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)}$$

10. Si faccia riferimento al diagramma di Nichols mostrato in figura relativo ad un sistema lineare $G(s)$ asintoticamente stabile .

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, calcolare la risposta a "regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 2\ \cos(a\,t)$$

Risposta a "regime":

$$y_\infty(t) \quad \simeq \quad 2\,|G(a\,j)|\,\cos(a\,t + \mathrm{Arg}G(a\,j))$$
$$\overset{a=3}{\simeq} \quad 0.9363\,\cos(3\,t - 163.7^o)$$