Controlli Automatici A
Compito Completo
10 Dicembre 2008 - Esercizi

Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = [a\,t^3 + \sin(2\,t)]\,e^{-b\,t}, \qquad\qquad x_2(t) = (b + e^{at})\cos(3\,a\,t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6\,a}{(s+b)^4} + \frac{2}{(s+b)^2+2^2}, \qquad\qquad X_2(s) = \frac{b\,s}{s^2+3^2\,a^2} + \frac{s-a}{(s-a)^2+3^2\,a^2}$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2\,b}{(s+a)(1+2\,s)}, \qquad\qquad G_2(s) = \left[\frac{3\,b}{(s+a)^2} + 4\right]\frac{1}{(s+a)^2}$$

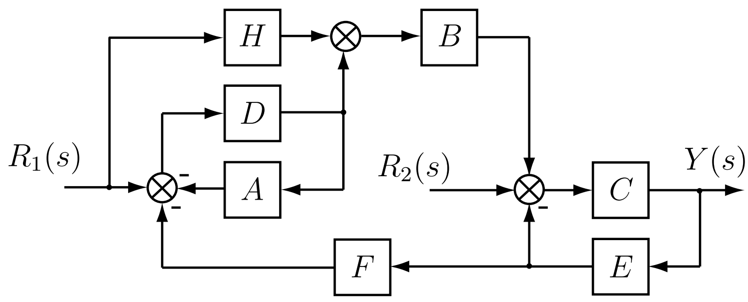
Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{2b}{2\,a-1}\left[e^{-0.5\,t} - e^{-a\,t}\right], \qquad\qquad g_2(t) = \frac{3b}{6}\,t^3\,e^{-a\,t} + 4\,t\,e^{-a\,t}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi riportato in figura, calcolare le funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{R_1(s)} = \frac{DBC+HBC(1+DA)}{1+AD+CE+DBCEF+ADCE}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{R_2(s)} = \frac{C(1+DA)}{1+AD+CE+DBCEF+ADCE}$$



c) In figura è mostrato il diagramma di Bode dei moduli di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione del grafico:

c.1) determinare la posizione dei poli dominanti del sistema:

$$p_{1,2} \simeq -5 \pm 8.66\, j$$

c.2) calcolare il guadagno statico $G(0)$ del sistema:

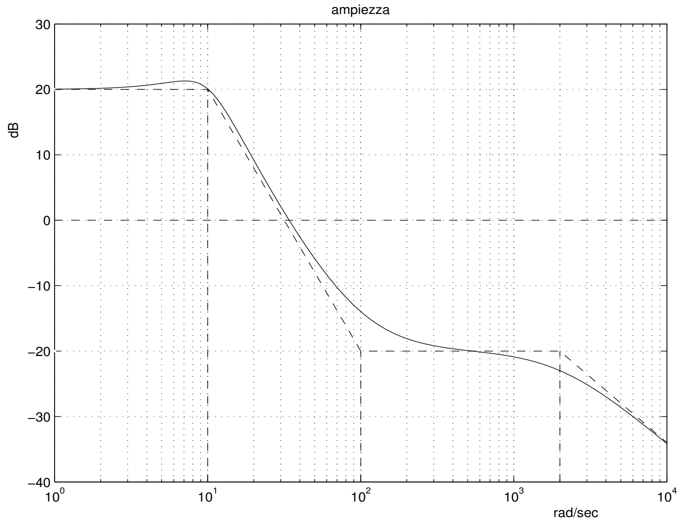
$$G(0) = 10$$

c.3) calcolare il tempo di assestamento T_a del sistema:

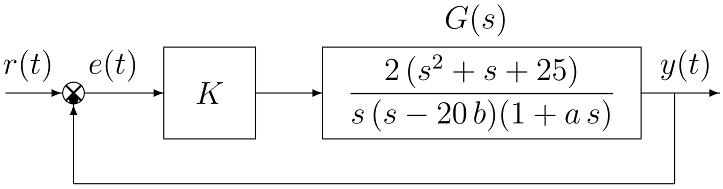
$$T_a \simeq 0.6 \ \ \text{s}$$

c.4) calcolare il periodo T dell'eventuale oscillazione smorzata:

$$T \simeq 0.725 \ \ \text{s}$$



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$ sono mostrati in Fig. 1. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$

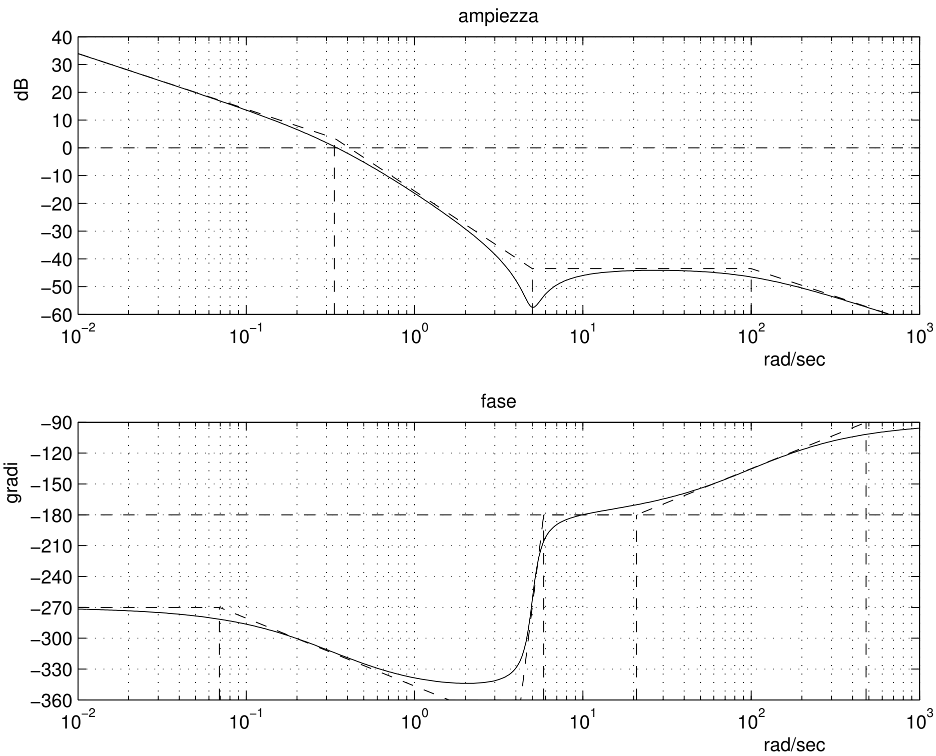


Figura 1: I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$

sono le seguenti:

$$G_0(s) = -\frac{5}{2\,b\,s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{2}{a\,s}$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ sono:

$$\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1/a$ e il guadagno γ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 20\,b$ hanno il seguente valore:

$$\beta = \frac{2.5\,a}{b}, \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{10\,a\,b}$$

d.2) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{2\,K\,(s^2+s+25)}{s\,(s-20\,b)(1+a\,s)} = 0 \qquad \to \qquad a\,s^3 + (1-20\,a\,b+2\,K)\,s^2 + (2\,K-20\,b)\,s + 50\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & a & (2\,K-20\,b) & \to & a > 0 \\
2 & (1-20\,a\,b+2\,K) & 50\,K & \to & K > \frac{20\,a\,b-1}{2} \\
1 & (1-20\,a\,b+2\,K)(2\,K-20\,b) - 50\,a\,K & & \to & \\
0 & 50\,K & & \to & K > 0
\end{array}$$

L'equazione del secondo ordine in K che si ottiene dalla riga 1 è la seguente:

$$4\,K^2 + [2\,(1-20\,a\,b) - 40\,b - 50\,a]\,K - 20\,b\,(1-20\,a\,b) > 0$$

Le soluzioni di questa equazione sono le seguenti:

$$K_{1,2} = \frac{-[2\,(1-20\,a\,b) - 40\,b - 50\,a] \pm \sqrt{[2\,(1-20\,a\,b) - 40\,b - 50\,a]^2 + 16 \cdot 20\,b\,(1-20\,a\,b)}}{8}$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per

$$K > K_2 = K^* \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad K^* = 199.54$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è

$$\omega^* = \sqrt{\frac{(2\,K^* - 20\,b)}{a}} \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad \omega^* = 9.98$$

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$, $b = 5$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 2. Il diagramma di Nyquist ha un asintoto verticale:

$$\sigma_a = -\frac{50}{20\,b}\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{20\,b} - a\right) \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad \sigma_a = 1.475$$

Vi è un'unica intersezione σ_1^* con il semiasse reale negativo. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.2:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} \qquad \xrightarrow{a=3,\,b=5} \qquad \sigma_1^* = -0.0050$$

Il corrispondente valore di ω_1^* è quello determinato al punto d.2: $\omega^* = 9.98$.

d.4) Calcolare per quali valori del parametro $K > 0$ l'errore a regime del sistema retroazionato per ingresso a rampa $r(t) = 5\,t$ soddisfa la relazione: $|e_v| < 0.1$.

Soluzione: l'errore a regime e_v per ingresso a rampa è il seguente:

$$e_v = \frac{R_0}{K_v} = \frac{5}{\frac{-5\,K}{2\,b}} = -\frac{2\,b}{K} \qquad \to \qquad K > 20\,b$$

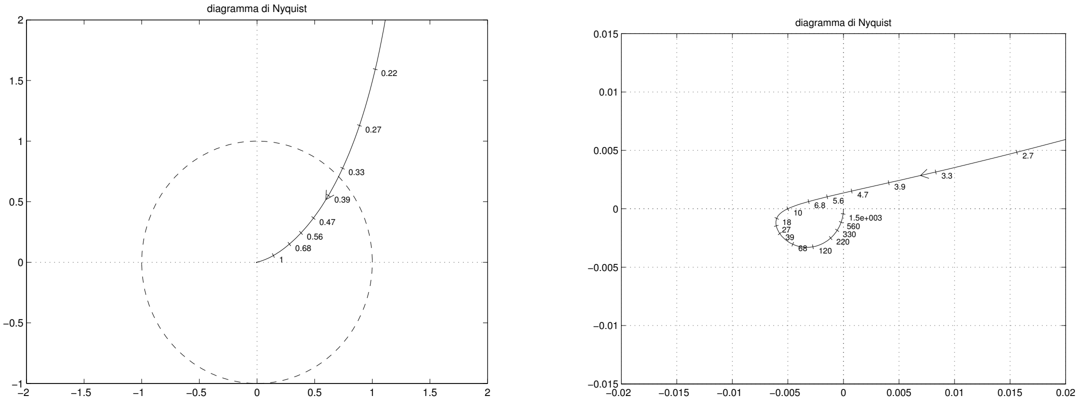
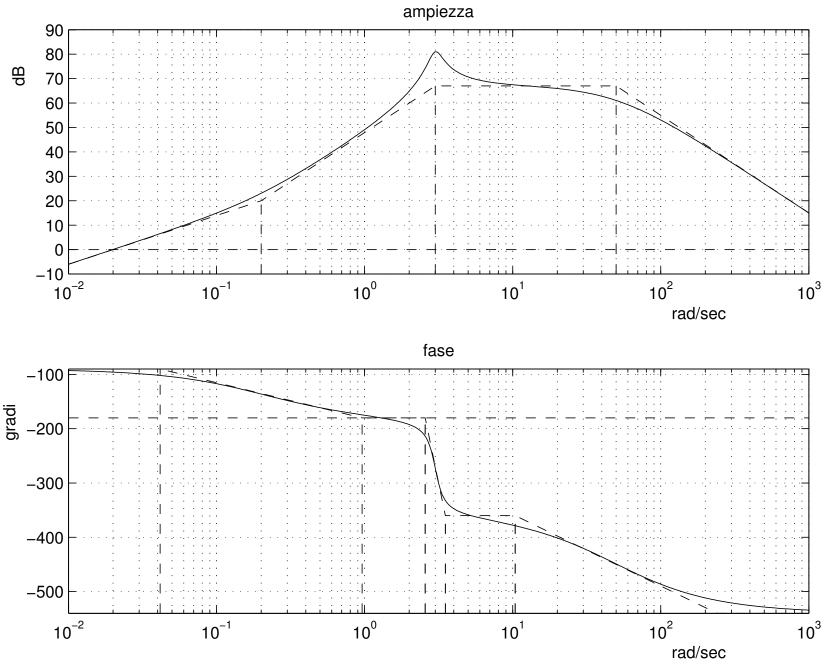


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ quanto $a = 3$ e $b = 5$. Il secondo diagramma è uno zoom del primo nell'intorno dell'origine.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = a\,\cos(0.1\,b\,t + \frac{\pi}{6})$;

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

$$G(s) \simeq \frac{5625000\,s(s-0.2)}{(s^2+0.6\,s+3^2)(s+50)^2}$$

e.1) La risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = a\,\cos(0.1\,b\,t + \frac{\pi}{6})$ è la seguente:

$$y_\infty(t) = a\,|G(0.1\,b\,j)|\,\cos\left(0.1\,b\,t + \frac{\pi}{6} + \mathrm{Arg}\,G(0.1\,b\,j)\right)$$

Per $a = 3$ e $b = 5$ si ha:

$$y_\infty(t) = 3\,|G(0.5\,j)|\,\cos\left(0.5\,t + \frac{\pi}{6} + \mathrm{Arg}\,G(0.5\,j)\right) = 207.57\,\cos\left(0.5\,t + \frac{\pi}{6} - 161.3^o\right)$$

f) Si faccia riferimento alla risposta al gradino unitario mostrata in figura. Sapendo che il sistema $G(s)$ che genera il grafico ha 3 poli con la stessa parte reale, nei limiti della precisione del grafico:

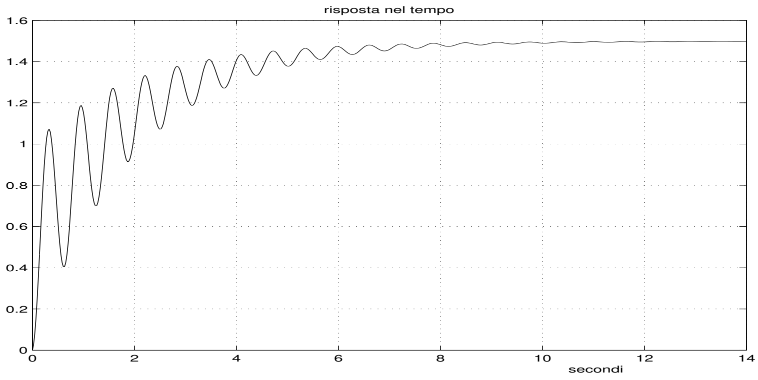
f.1) determinare la posizione dei 3 poli del sistema $G(s)$:

$$p_{1,2} \simeq -0.5 \pm 10\,j$$

$$p_3 \simeq -0.5$$

f.2) calcolare il guadagno statico del sistema $G(s)$:

$$G(0) = 1.499$$



Controlli Automatici - Primo Compito
10 Dicembre 2008 - Domande
Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad "a" e "b" i valori assegnati e si risponda alle domande.

1. Scrivere in ambito trasformato la soluzione $Y(s)$ della seguente equazione differenziale in funzione delle trasformate di Laplace $X_1(s)$ e $X_2(s)$ delle due funzioni di ingresso $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e considerando condizioni iniziali nulle:

$$\ddot{y}(t)+a\,\dot{y}(t)+2\,y(t) = 3\,\dot{x}_1(t)+b\,x_1(t)+4\,x_2(t) \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{3\,s+b}{s^2+a\,s+2}\,X_1(s)+\frac{4}{s^2+a\,s+2}\,X_2(s)$$

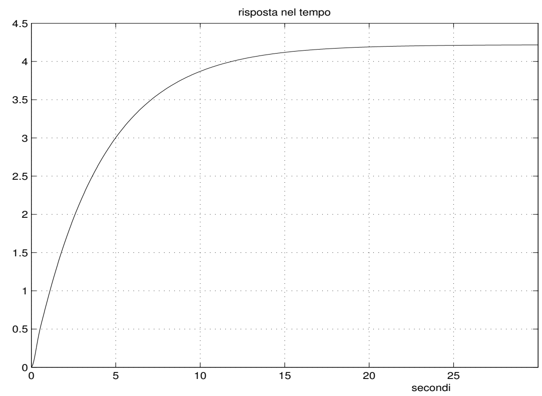
2. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace del segnate $f(t)$. Fornire l'enunciato del "Teorema della traslazione in s":

$$\mathcal{L}[e^{-a\,t}f(t)] = F(s+a)$$

3. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta impulsiva del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{(3+0.2\,s)(s^2+60\,s+1800)}{s(\mathbf{2}+\mathbf{8\,s})(8+0.2\,s)(s^2+8\,s+80)}$$

Calcolare inoltre:
1) il valore a regime y_∞ della risposta impulsiva per $t \to \infty$;
2) il tempo di assestamento T_a della risposta impulsiva $y_1(t)$;
3) il periodo T dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:



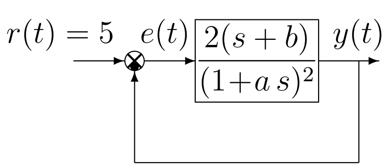
$$K_0 = 4.219, \qquad T_a \simeq 12\,\mathrm{s}, \qquad T \simeq \nexists$$

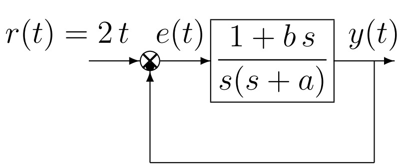
Il polo dominante del sistema è dato dal termine $(2+8\,s)$.

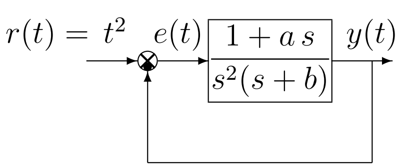
4. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $\ddot{y}(t)+2\,a\,\dot{y}(t)+a^2\,y(t) = 0$ partendo dalle condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = b$. Si ricorda che vale la regola: $\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2F(s) - f(0)\,s - \dot{f}(0)$.

$$Y(s) = \frac{b}{s^2+2\,a\,s+a^2} = \frac{b}{(s+a)^2} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = b\,t\,e^{-a\,t}$$

5. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:

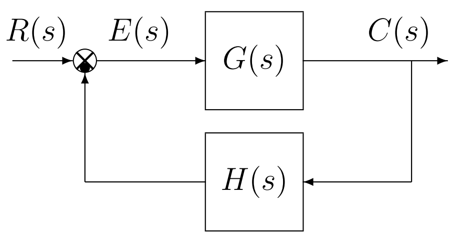






$$e(\infty) = \frac{5}{1+2\,b} \qquad e(\infty) = 2\,a \qquad e(\infty) = 2\,b$$

6. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro α interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}\,\frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

7. Sui piani di Nichols e di Nyquist riportati sotto disegnare l'andamento qualitativo della funzione di risposta armonica di una funzione $G(s)$ avente le seguenti caratteristiche:

Per $a = 3$ e $b = 5$ i valori richiesti sono i seguenti:

1) Un guadagno statico $G(0) = 2 + a/2$;
2) Un margine di fase pari a $M_\varphi = (40 + 3\,a)$;
3) Un margine di ampiezza pari a $M_\alpha = (1 + b)$;
4) Una fase finale per $\omega \to \infty$ pari a $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$;

Diagramma di Nichols

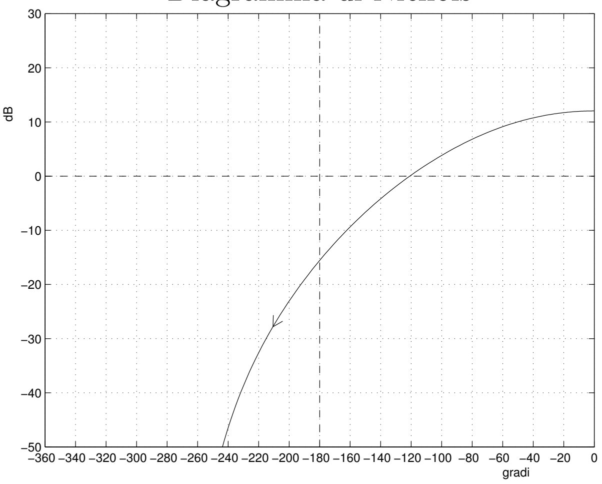
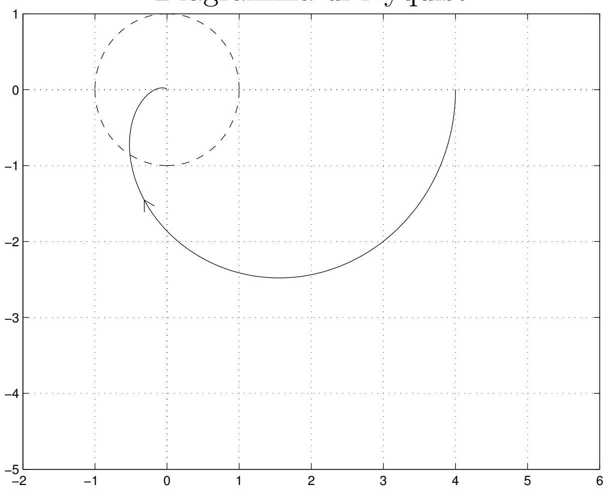


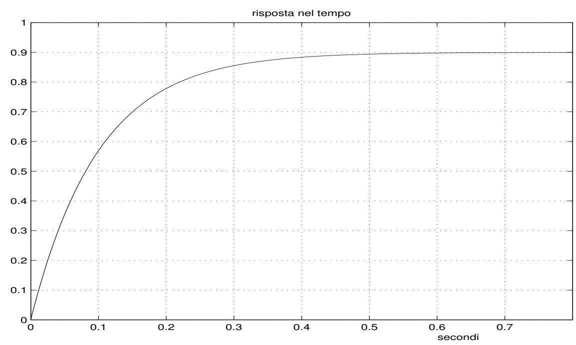
Diagramma di Nyquist



8. Quella riportata a fianco é la risposta $y(t)$ del sistema retroazionato $G_0(s)$:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

ad un gradino unitario posto in ingresso. Da tale risposta al gradino é possibile ricavare una stima dei seguenti parametri.



a) Guadagno statico del sistema $G(s)$:

○ $G(0) \simeq 0.09$
○ $G(0) \simeq 0.9$
⊗ $G(0) \simeq 9$
○ $G(0) \simeq 90$

b) Larghezza di banda del sistema $G_0(s)$:

○ $\omega_{f0} \simeq 0.5$
⊗ $\omega_{f0} \simeq 5$
○ $\omega_{f0} \simeq 50$
○ $\omega_{f0} \simeq 500$

9. Nella scomposizione in fratti semplici, quali sono gli andamento temporale $g_1(t)$ e $g_2(t)$ corrispondenti ad una coppia di poli complessi coniugati posizionati in $p_{1,2} = -$"b" $\pm\, j$"a" con grado di molteplicità $r = 2$ (indicare in modo simbolico i parametri non noti M_i e φ_i):

$$g_1(t) = M_1\, e^{-b\,t} \cos(a\,t + \varphi_1), \qquad g_2(t) = M_2\, t\, e^{-b\,t} \cos(a\,t + \varphi_2)$$

10. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema del secondo ordine caratterizzato da un guadagno statico pari ad "b", un coefficiente di smorzamento $\delta = 0.4$ e una pulsazione naturale ω_n pari a "a":

$$G(s) = \frac{b}{1 + \frac{0.8}{a}s + \frac{s^2}{a^2}} = \frac{b\,a^2}{a^2 + 0.8\,a\,s + s^2}$$

11. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{s\, e^{-3\,t_0 s}}{(s+1)^2} \qquad \to \qquad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{\omega}{\omega^2 + 1} \\ \varphi(\omega) = \dfrac{\pi}{2} - 3\,t_0\,\omega - 2\arctan\omega \end{cases}$$