Controlli Automatici A
Compito Completo
9 Novembre 2009 - Esercizi

Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad a e b i valori assegnati e si risponda alle domande.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 2\,\delta(t) + 3\,e^{(b\,t-2)}\sin(a\,t), \qquad x_2(t) = a\,t^3\,e^{-bt} + b\,\cos(3\,a\,t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = 2 + \frac{3\,a\,e^{-2}}{(s-b)^2 + a^2}, \qquad X_2(s) = \frac{6\,a}{(s+b)^4} + \frac{b\,s}{s^2 + 9\,a^2}.$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{2\,s^2 + 10}{s(s+a)}, \qquad G_2(s) = \frac{3}{s}\,e^{-a\,s} + \frac{2\,a}{(s+b)^2 + 2^2}$$

Soluzione:

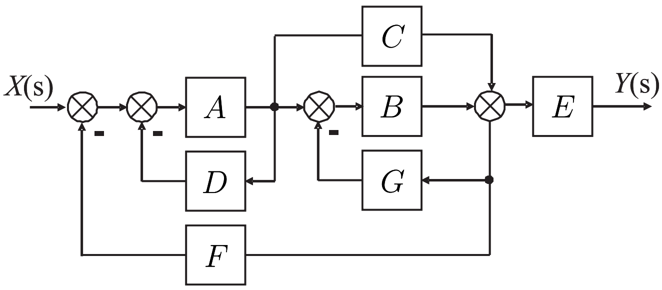
$$g_1(t) = 2\,\delta(t) + \frac{10}{a} - \frac{10 + 2\,a^2}{a}\,e^{-a\,t}, \qquad g_2(t) = \begin{cases} a\,e^{-b\,t}\sin(2\,t) & \text{per} \quad t < a \\ 3 + a\,e^{-b\,t}\sin(2\,t) & \text{per} \quad t \geq a \end{cases}$$

La funzione $G_1(s)$ ha grado relativo $r = 0$ per cui prima di essere antitrasformata deve essere scomposta nella somma di un termine costante $G_c = \lim_{s\to\infty} G(s) = 2$ e di una funzione $\bar{G}_1(s)$ avente grado relativo $r \geq 1$:

$$G_1(s) = 2 + \frac{10 - 2\,a\,s}{s(s+a)} = 2 + \frac{10}{a\,s} - \frac{10 + 2\,a^2}{a\,(s+a)}.$$

b) Relativamente allo schema a blocchi riportato in figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G_1(s) = \frac{ABE + ACE}{1 + AD + BG + ABF + ACF + ADBG}$$



c) In figura è mostrato il diagramma di Bode dei moduli di un sistema lineare $G(s)$ a fase minima. Nei limiti della precisione del grafico, calcolare:

c.1) il guadagno statico del sistema $G(s)$:

$$G(0) = 200.$$

c.2) la posizione $p_{1,2}$ dei poli dominanti del sistema $G(s)$:

$$p_{1,2} \simeq -1 \pm j\,2\sqrt{1-0.5^2} = -1 \pm j\,1.732.$$

c.3) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino del sistema $G(s)$:

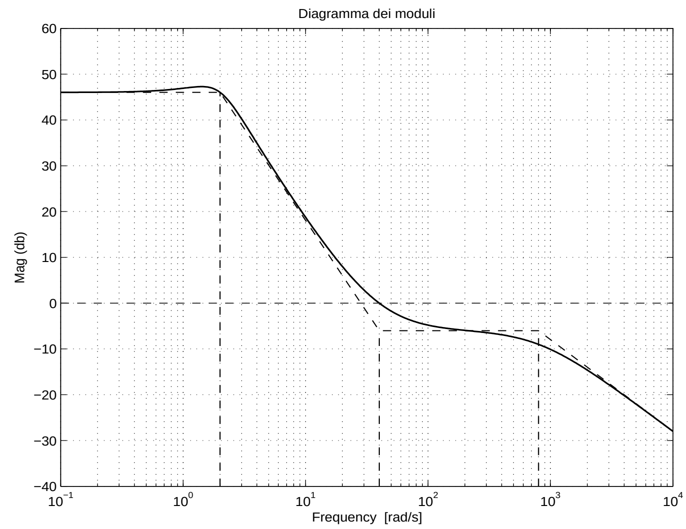
$$T_a \simeq 3 \;\; \text{s}.$$

c.4) la larghezza di banda ω_f del sistema $G(s)$:

$$\omega_f \simeq 2.3 \;\; \text{rad/s}.$$

c.5) la larghezza di banda ω_{f0} del sistema retroazionato $G_0(s) = G(s)/(1+G(s))$:

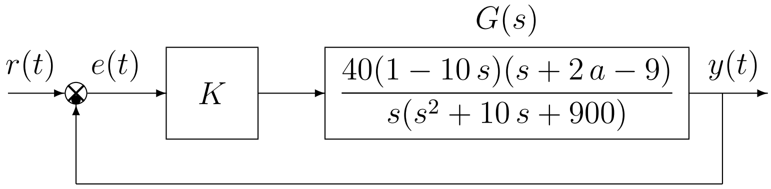
$$\omega_{f0} \simeq 40 \;\; \text{rad/s}.$$



c.6) l'errore a regime e_p del sistema $G(s)$ retroazionato per ingresso a gradino unitario:

$$e_p \simeq \frac{R_0}{1+G(0)} = \frac{1}{201} \simeq 0.005$$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$1 + \frac{40\,K(1-10\,s)(s+2\,a-9)}{s(s^2+10\,s+900)} = 0$$

Riscritta in forma polinomiale diventa:

$$s^3 + 10(1-40\,K)s^2 + (900 + 3640K - 800\,a\,K)s + 40\,K(2\,a-9) = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (900+3640K-800\,a\,K) \\ 2 & (1-40\,K) & 4\,K(2\,a-9) \\ 1 & (1-40\,K)(900+3640K-800\,a\,K)-4\,K(2\,a-9) & \\ 0 & (2\,a-9)K & \end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < \frac{1}{40}, \qquad \begin{cases} K > 0 & \text{se} \quad a > 4.5 \\ K < 0 & \text{se} \quad a < 4.5 \end{cases}$$

Dalla riga 1 si ottiene la seguente disequazione:

$$(1-40\,K)[900 + (3640-800\,a)K] - 4\,K(2\,a-9) > 0$$

da cui si ricava:

$$400(20\,a-91)\,K^2 - (8081+202\,a)\,K + 225 > 0. \qquad (1)$$

Le soluzioni di questa equazione sono:

$$K_a^{\pm} = \frac{(8081 + 202\,a) \pm \sqrt{(8081 + 202\,a)^2 - 360000(20\,a - 91)}}{800(20\,a - 91)}.$$

Nei casi $a = 3$ e $a = 8$ le soluzioni dell'equazione (1) sono:

$$K_a^+ = \begin{cases} -0.72557 & \text{se} \quad a = 3 \\ 0.32638 & \text{se} \quad a = 8 \end{cases}, \qquad K_a^- = \begin{cases} 0.0250081 & \text{se} \quad a = 3 \\ 0.024979 & \text{se} \quad a = 8 \end{cases}$$

Nei casi $a \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ il sistema è stabile per:

$$K_a^+ = K_a^* < K < 0.$$

Nei casi $a \in \{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ il sistema è stabile per:

$$0 < K < K_a^* = K_a^-.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{900 + (3640 - 800\,a)K_a^*} = \sqrt{\frac{4\,K_a^*(2\,a - 9)}{(1 - 40\,K_a^*)}} = \begin{cases} 0.538 & \text{se} \quad a = 3 \\ 28.83 & \text{se} \quad a = 8 \end{cases}$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ per $a = 3$ e per $a = 8$ sono mostrati in Fig. 1 e in Fig. 2.

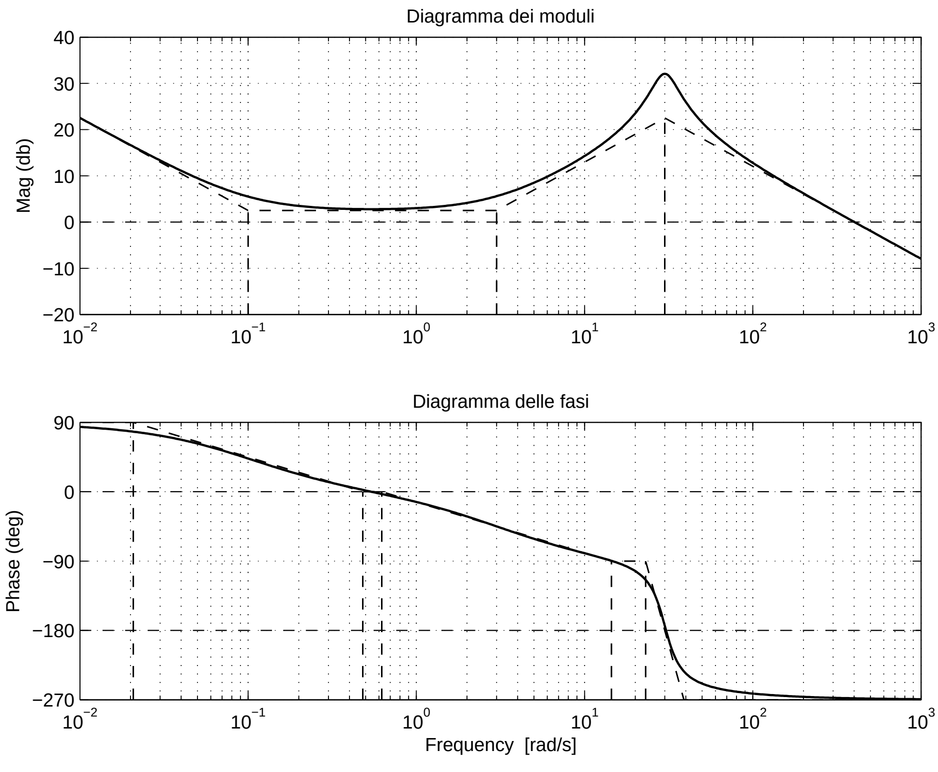


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ per $a = 3$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{4(2\,a - 9)}{90\,s}, \qquad G_\infty(s) = -\frac{400}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ sono:

$$\varphi_0 = \begin{cases} -\frac{3\,\pi}{2} & \text{se} \quad a < 4.5 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se} \quad a > 4.5 \end{cases}, \qquad \varphi_\infty = -\frac{3\,\pi}{2}$$

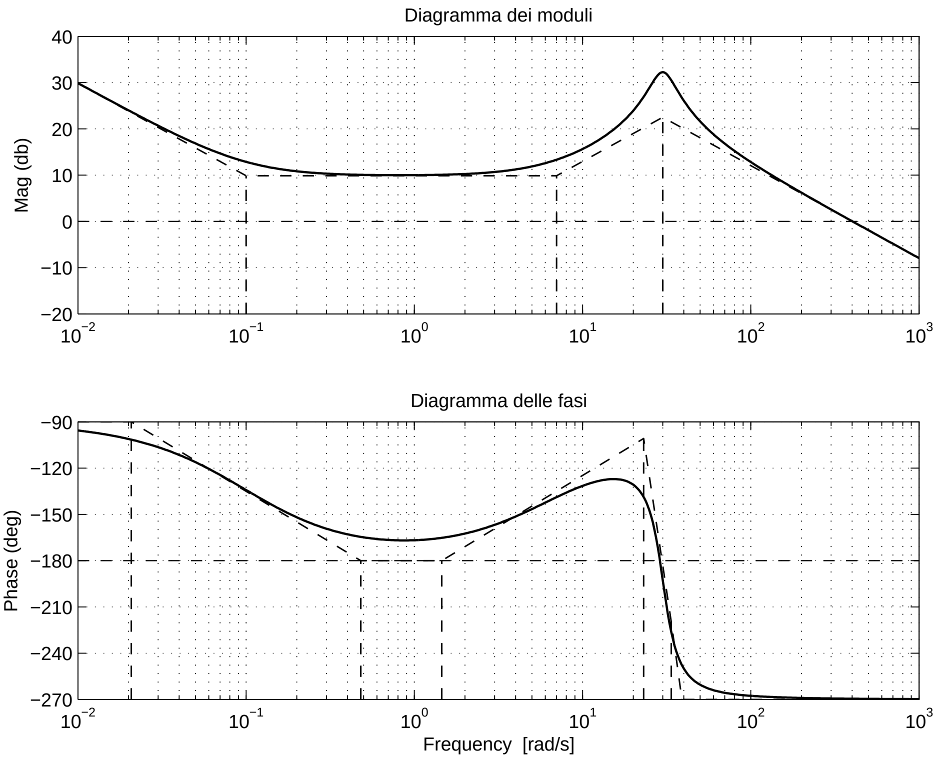


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ per $a = 8$.

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, i guadagni β e γ in corrispondenza delle pulsazioni $\omega = 0.1$ e $\omega = 30$ hanno il seguente valore:

$$\beta = \frac{4(2\,a-9)}{9} = \begin{cases} 2.5 \text{ db} & \text{se} \quad a=3 \\ 9.86 \text{ db} & \text{se} \quad a=8 \end{cases}, \qquad \gamma = \frac{40}{3} = 22.5 \text{ db}.$$

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. I diagrammi di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$, $a = 8$ e $\omega \in [0,\ \infty]$ sono mostrati in Fig. 3 e in Fig. 4.

La fase iniziale del sistema coincide con la vase φ_0 dell'approssimante $G_0(s)$. Per $\omega \to 0^+$ la somma delle costanti di tempo del sistema è sempre negativa per $a \in \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 8\}$:

$$\Delta\tau = -10 + \frac{1}{2\,a-9} - \frac{10}{900} < 0,$$

per cui il diagramma parte sempre in ritardo rispetto alla fase iniziale φ_0. Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale la cui posizione è:

$$\sigma_a = K_\tau\,\Delta_\tau = \frac{40(2\,a-9)}{900}\left(-10 + \frac{1}{2\,a-9} - \frac{1}{90}\right) = \begin{cases} 1.38 & \text{se} \quad a=3 \\ -3.07 & \text{se} \quad a=8 \end{cases}$$

La variazione di fase $\Delta\varphi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ è funzione del parametro a:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} -2\,\pi & \text{se} \quad a = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \\ -\pi & \text{se} \quad a = \{5,\ 6,\ 7,\ 8\} \end{cases}$$

L'intersezione più significativa con l'asse reale è quella corrispondente al valore K^* che è stato determinato con il criterio di Routh: Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.2:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} \qquad \longrightarrow \qquad \sigma_1^* = \begin{cases} -40 & \text{se} \quad a=3 \\ 1.379 & \text{se} \quad a=8 \end{cases}$$

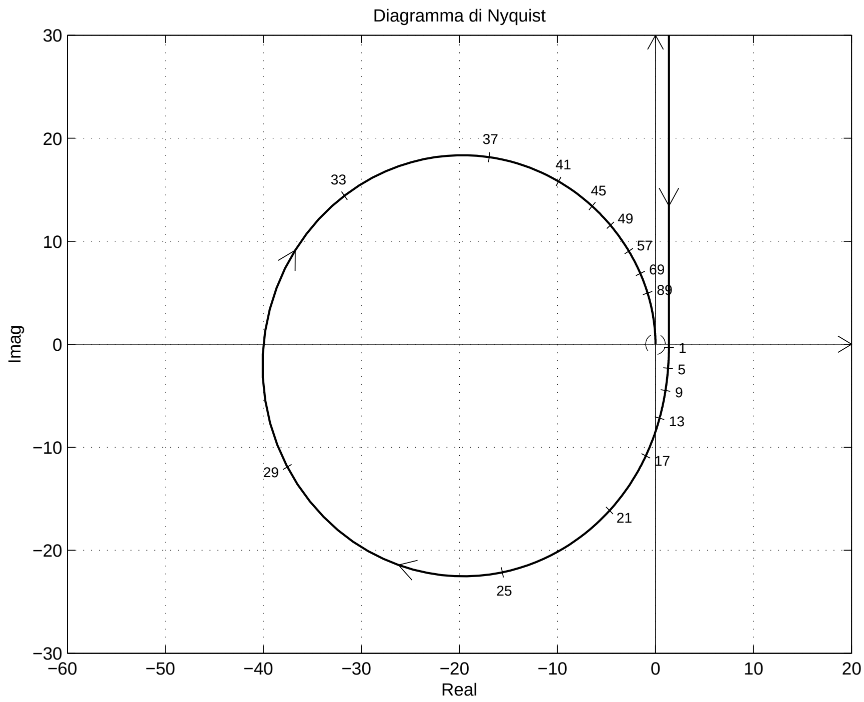


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 3$ e $\omega \in [0,\ \infty]$.

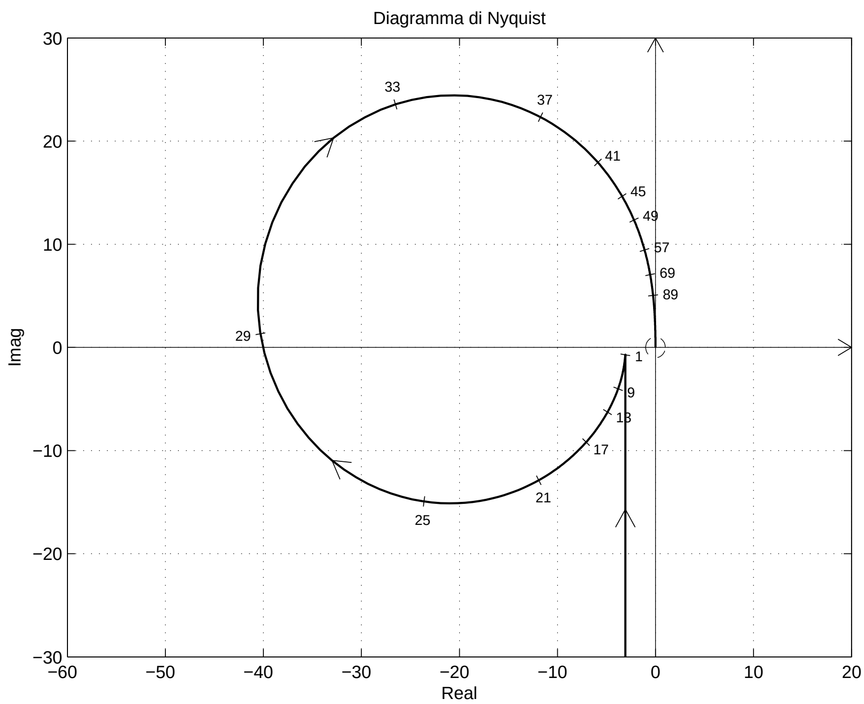


Figura 4: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $a = 8$ e $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il corrispondente valore di ω_1^* è quello determinato al punto a.1: $\omega_1^* = 7.6811$.

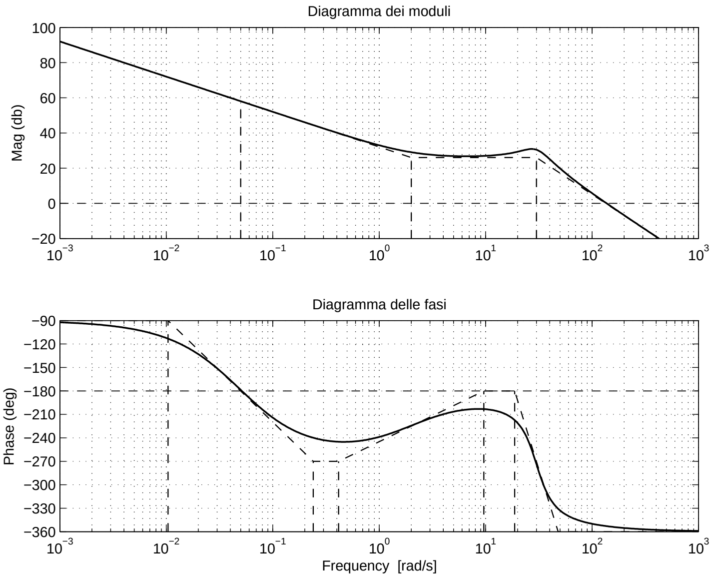
e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:

e.1) calcolare la risposta oscillatoria "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema quando in ingresso è presente il segnale:

$x(t) = b\,\cos(0.01\,a\,t - \frac{\pi}{4})$;

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

$$G(s) \simeq \frac{-18000(s-0.05)(s+2)}{s(s+0.05)(s^2+18\,s+900)}$$
$$\simeq \frac{40(1-200\,s)(1+0.5\,s)}{s(1+200\,s)(1+0.02\,s+0.0011\,s^2)}$$



e.1) La risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = b\,\cos(0.01\,a\,t - \frac{\pi}{4})$ è la seguente:

$$y_\infty(t) = b\,|G(0.01\,a\,j)|\,\cos\left(0.01\,a\,t - \frac{\pi}{4} + \mathrm{Arg}\,G(0.01\,a\,j)\right)$$

Per $a = 3$ e $b = 5$ si ha:

$$y_\infty(t) = 5\,|G(0.03\,j)|\,\cos\left(0.03\,t - \frac{\pi}{4} + \mathrm{Arg}\,G(0.03\,j)\right) = 6667.4\,\cos\left(0.03\,t - \frac{\pi}{4} - 151.1^o\right)$$

f) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

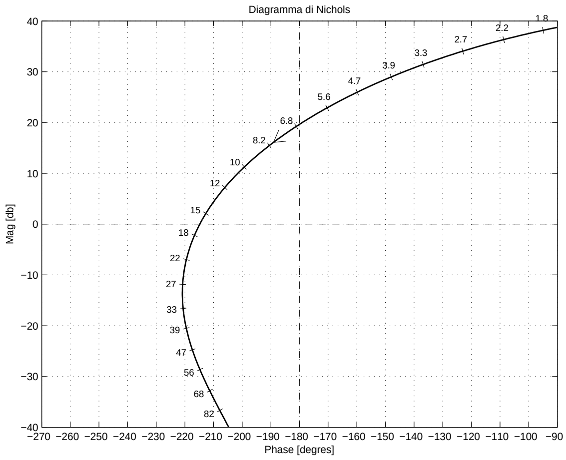
f.1) il margine di ampiezza M_a e il margine di fase M_φ dei sistemi $G_1(s)$ e $G_2(s)$;

f.2) i margini di stabilitá M_a' e M_φ' del sistema $K_1\,G_1(s)$ nel caso in cui sia $K_1 = 0.02\,a$;

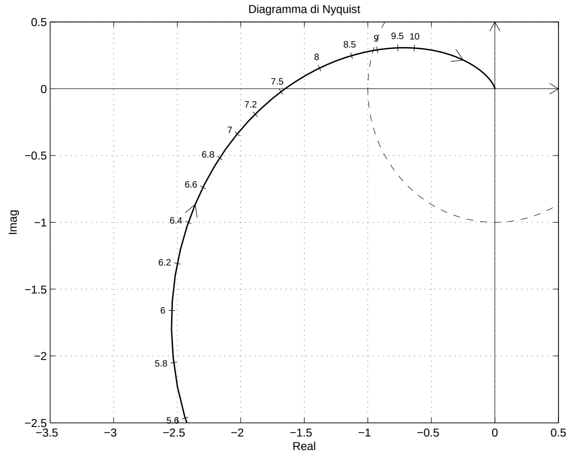
f.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi\,G_2(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = (20 + 3\,b)$ e il guadagno K_a per cui il sistema $K_a\,G_2(s)$ ha un margine di ampiezza $M_a = (2 + a)$;

Per $a = 3$ si ha $M_\varphi = 29^o$ e $M_a = 5$, per cui i parametri richiesti hanno il seguente valore:

$G_1(s)$



$G_2(s)$



f.1) $M_a = -19.64 \text{ db } = 0.1042$

$M_\varphi = -34.8$ gradi

f.2) $M'_a = 4.79 \text{ db } = 1.74$

$M'_\varphi = 14.58$ gradi

f.1) $M_a = -4.355 \text{ db } = 0.6057$

$M_\varphi = -16.6$ gradi

f.3) $K_\varphi = -9.8 \text{ db } = 0.323$

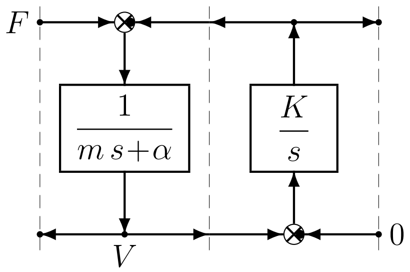
f.3) $K_a = -18.3 \text{ db } = 0.121$

Controlli Automatici - Primo Compito
9 Novembre 2009 - Domande
Compito A Nr. $a =$ $b =$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Negli esercizi che seguono, si sostituisca ad "a" e "b" i valori assegnati e si risponda alle domande.

1. Dato il seguente schema a blocchi, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso F all'uscita V e scrivere la corrispondente equazione differenziale che lega i segnali $F(t)$ e $V(t)$:



$$G(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{s}{m\,s^2 + \alpha\,s + K}$$

$$m\,\ddot{V}(t) + \alpha\,\dot{V}(t) + K\,V(t) = \dot{F}(t)$$

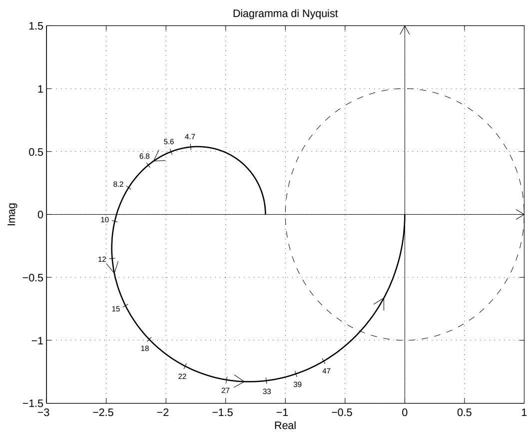
2. Relativamente al diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$, calcolare la posizione σ_a dell'asintoto verticale e lo sfasamento $\Delta\varphi$ introdotto da $G(j\omega)$ quando ω varia da 0^+ a ∞:

$$G(s) = \frac{(s+1)(b\,s+3)}{s(a\,s^2+5\,s-1)} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_a = -3\left(6+\frac{b}{3}\right) \qquad \Delta\varphi = \pi$$

3. Enunciare il criterio di Nyquist nella formulazione valida anche per sistemi instabili ad anello aperto. Fornire sia l'ipotesi che la tesi del criterio.

Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che il sistema ad anello aperto non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1\!+\!j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.

4. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{70(s-3)}{(9-s)(20-s)}$.
Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è stabile per i seguenti valori di K:



○ $0 < K < \bar{K}_2 < \infty$;
○ $0 < \bar{K}_1 < K < \infty$;
⊗ $0 < \bar{K}_1 < K < \bar{K}_2$;
○ nessuno dei precedenti;

Calcolare (se esistono) i valori $\bar{K}_1$ e $\bar{K}_2$:

$$\bar{K}_1 \simeq 0.42, \qquad \bar{K}_2 \simeq 0.857.$$

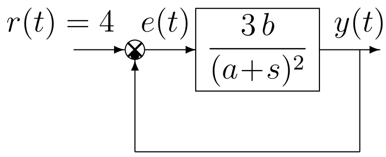
5. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $L\,\dot{y}(t) + R\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = a$.

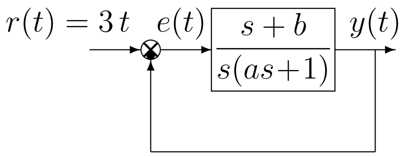
$$Y(s) = \frac{a\,L}{L\,s+R} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = a\,e^{-\frac{R}{L}t}.$$

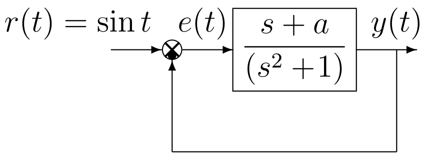
6. Nella scomposizione in fratti semplici, qual è la posizione $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ e il grado di molteplicità ν della coppia di poli complessi coniugati corrispondente all'andamento temporale $g_1(t) = 3\,t\,\sin(5\,t+0.8)$:

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = 0 \pm j\,5, \qquad \nu = 2.$$

7. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:







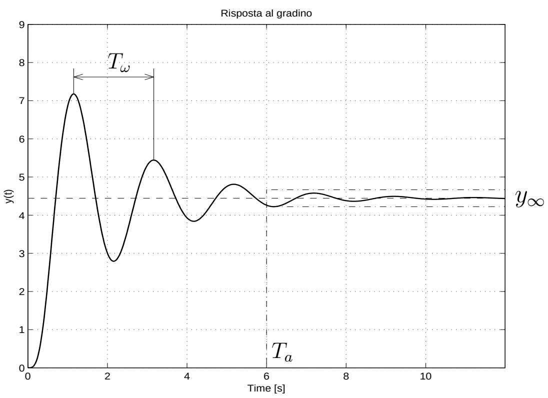
$$e(\infty) = \frac{4\,a^2}{a^2 + 3\,b} \qquad e(\infty) = \frac{3}{b} \qquad e(\infty) = 0$$

8. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{50(4 + 0.1\,s)(s^2 + 80\,s + 4000)}{(20 + 0.2\,s)(9 + 0.5\,s)(s^2 + 12\,s + 100)(s^2 + s + 10)}$$

Calcolare inoltre:
1) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
2) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
3) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

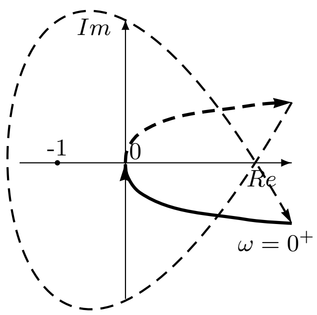
$$y_\infty = 4.44, \qquad T_a \simeq 6\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq 2.01\,\text{s}.$$

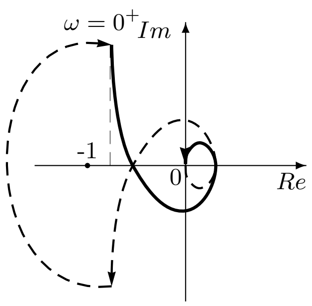


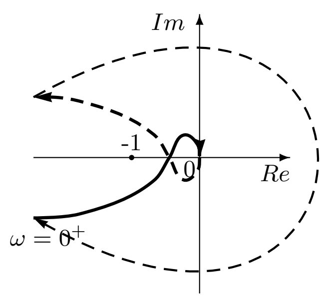
9. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ del segnale $y(t)$ corrispondente alla seguente trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2\,(a - b\,s)(s + 3)}{s(4\,s - 1)(5\,s + 10)} \qquad \to \qquad y_0 = -\frac{b}{10} \qquad y_\infty = \nexists$$

10. Chiudere all'infinito i seguenti diagrammi di Nyquist. Nota: tutti i diagrammi di Nyquist fanno riferimento a sistemi con tutti i poli a parte reale negativa eccezion fatta per un polo semplice o doppio nell'origine.







11. Sia $y(t) = M(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega) + \varphi_0)$ la risposta asintotica di un sistema lineare stabile all'ingresso sinusoidale $x(t) = N\cos(\omega t + \varphi_0)$. Fornire la "definizione" di funzione di risposta armonica $F(\omega)$ utilizzando i simboli che caratterizzano i segnali $x(t)$ e $y(t)$:

$$F(\omega) = \frac{M(\omega)}{N}\, e^{j\,\phi(\omega)}.$$

12. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(s+a)^2}{s(s+b)^2}\, e^{-t_0 s} \qquad \to \qquad \begin{cases} M(\omega) = \dfrac{\omega^2 + a^2}{\omega(\omega^2 + b^2)} \\[2ex] \varphi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2} - t_0\,\omega + 2\,\arctan\dfrac{\omega}{a} - 2\,\arctan\dfrac{\omega}{b} \end{cases}$$