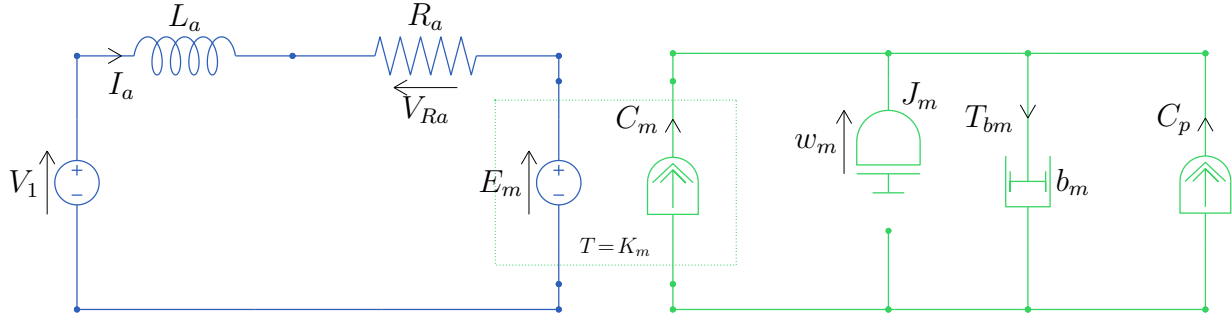
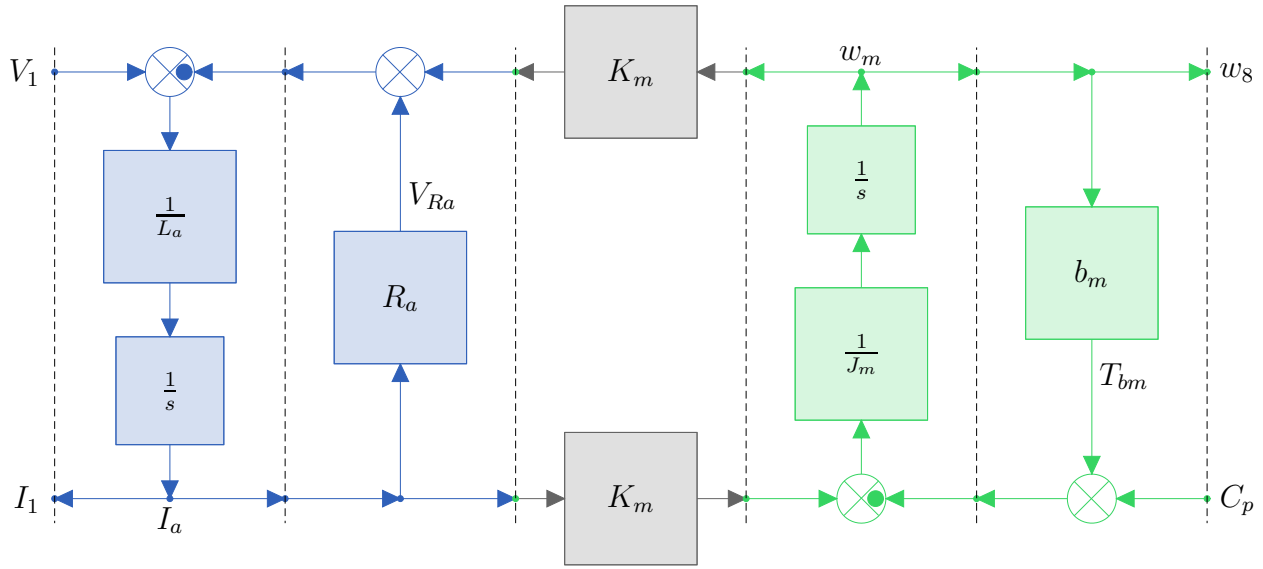


1 POG Relation: Electrical_DC_Motor

Consider the following physical physical system:



The corresponding POG block scheme is:



The state space equations of the considered system have the following structure:

$$\begin{cases} \mathbf{L} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases}$$

where the state vector \mathbf{x} , the input vector \mathbf{u} and the output vector \mathbf{y} are defined as follows:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} I_a \\ w_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} V_1 \\ C_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} I_1 \\ w_8 \end{bmatrix}.$$

The state space equations of the considered system are the following:

$$\begin{bmatrix} L_a & 0 \\ 0 & J_m \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -R_a & -K_m \\ K_m & -b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ w_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ C_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ w_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

The characteristic polynomial $\Delta(s)$ of the considered system is:

$$\Delta(s) = (J_m L_a) s^2 + (L_a b_m + J_m R_a) s + K_m^2 + R_a b_m.$$

The transfer function $\mathbf{H}(s)$ which links the input vector $\mathbf{u}(s)$ to the output vector $\mathbf{y}(s)$, $\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{u}(s)$, is the following:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} b_m + J_m s & -K_m \\ K_m & R_a + L_a s \end{bmatrix}.$$

1.1 Numerical and simulation results

System parameters, input values and initial conditions:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
SYSTEM PARAMETERS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
L_a = 0.003*H;      % 2. Inductance L_a . Internal parameter .
R_a = 1*Ohm;       % 3. Resistance R_a . Internal parameter .
K_m = 0.5;         % 5. Parameter. Transformer/Gyrator .
J_m = 0.01*kg*m^2; % 6. Inertia J_m . Internal parameter .
b_m = 0.002*N/(m/sec); % 7. Angular Friction b_m . Internal parameter .
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
INPUT VALUES %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
V_1_0 = 100*V;     % 1. Voltage V_1_0. Input value .
C_p_0 = 0*Nm;      % 8. Torque C_p_0. Input value .
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
INITIAL CONDITIONS XO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
I_a_0 = 0*A;       % 2. Current I_a_0. Initial condition .
w_m_0 = 0*rad/sec; % 6. Angular Velocity w_m_0. Initial condition .

```

The numerical value of the transfer function $H(s)$ which links the input $V_1(s)$ to the output $I_1(s)$ is:

$$H(s) = \frac{I_1(s)}{V_1(s)} = \frac{0.01s + 0.002}{0.00003s^2 + 0.010006s + 0.252}.$$

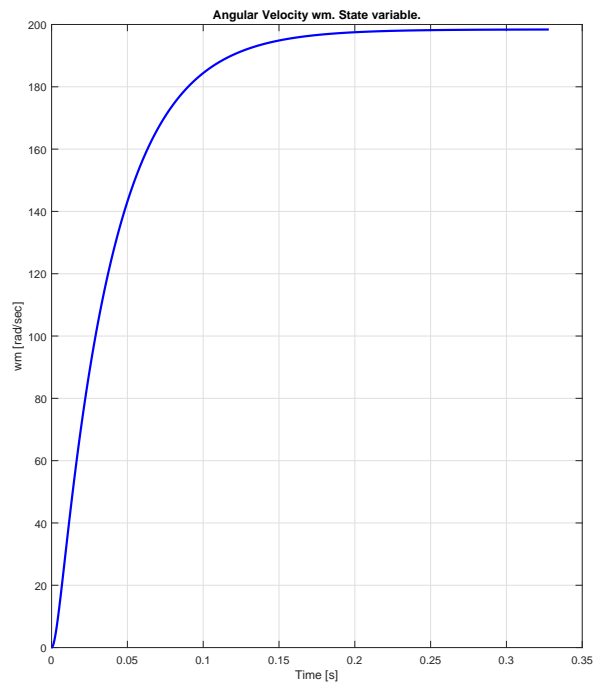
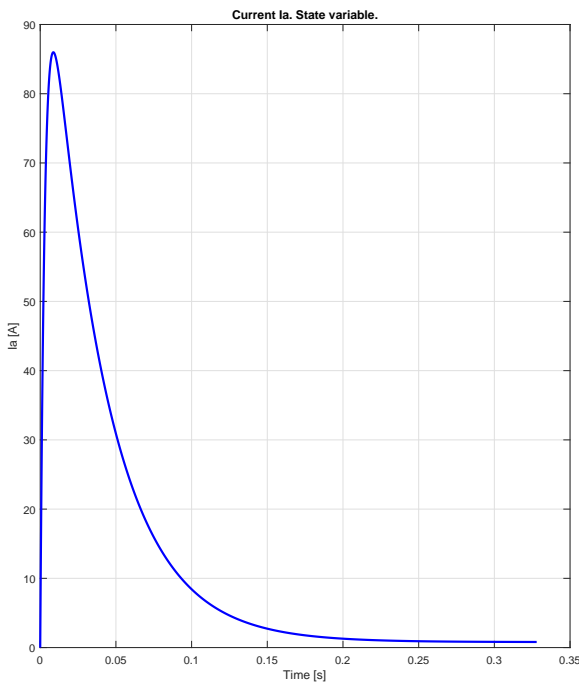
The poles of the system are the following:

$$\text{Poles} = \begin{bmatrix} -27.443 \\ -306.09 \end{bmatrix}.$$

The settling time T_s of the system is:

$$T_s = \frac{-3}{-27.443} = 0.10932s.$$

The time behavior of the components of the state vector \mathbf{x} obtained in simulation are the following:



Transfer function $G_V^\omega(s)$ which links the input $V_1(s)$ to the output $\omega_m(s)$ is:

$$G_V^\omega(s) = \frac{I_1(s)}{\omega_m(s)} = \frac{0.5}{0.00003.0 s^2 + 0.01001 s + 0.252}$$

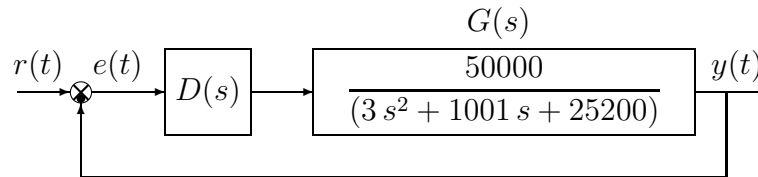
I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1. Il diagramma statico $G_V^\omega(0)$ della funzione $G_V^\omega(s)$ é:

$$G_V^\omega(0) = G_V^\omega(0)|_{s=0} = 1.9841.$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ é mostrato in Fig. 2.

2 Progetto di rete correttrice

Sia dato il seguente sistema retroazionato:



Si consideri un regolatore proporzionale $D(s) = K$.

2.1 Criterio di Routh

I valori di K per cui il sistema retroazionato é stabile si determina con il criterio di Routh. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato é:

$$1 + K \frac{50000}{(3s^2 + 1001s + 25200)} = 0 \quad \rightarrow \quad 3s^2 + 1001s + (50000K + 25200) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 50000K + 25200 \\ 1 & 1001 & \\ 0 & 50000K + 25200 & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna siano positivi si ricava che il sistema é stabile per:

$$K > -0.504 = -\frac{1}{G(0)}.$$

Questo risultato é evidente guardando il digramma di Nyquist.

2.2 Luogo delle radici

Si può utilizzare il Luogo delle radici per vedere se un regolatore proporzionale é sufficiente per poter ottenere una buona prestazione del sistema retroazionato.

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K > 0$ é mostrato in Fig. 8. Il luogo delle radici é caratterizzato da un solo asintoto che coincide con il semiasse negativo. La posizione degli asintoti é mostrata in figura. Il centro degli asintoti σ_a é il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-27.4297 - 306.2369) = -166.8333.$$

Il miglior transitorio nella risposta al gradino del sistema retroazionato si ottiene posizionando i poli dominanti in

$$p_{1,2} = -166.8333 \pm j 300$$

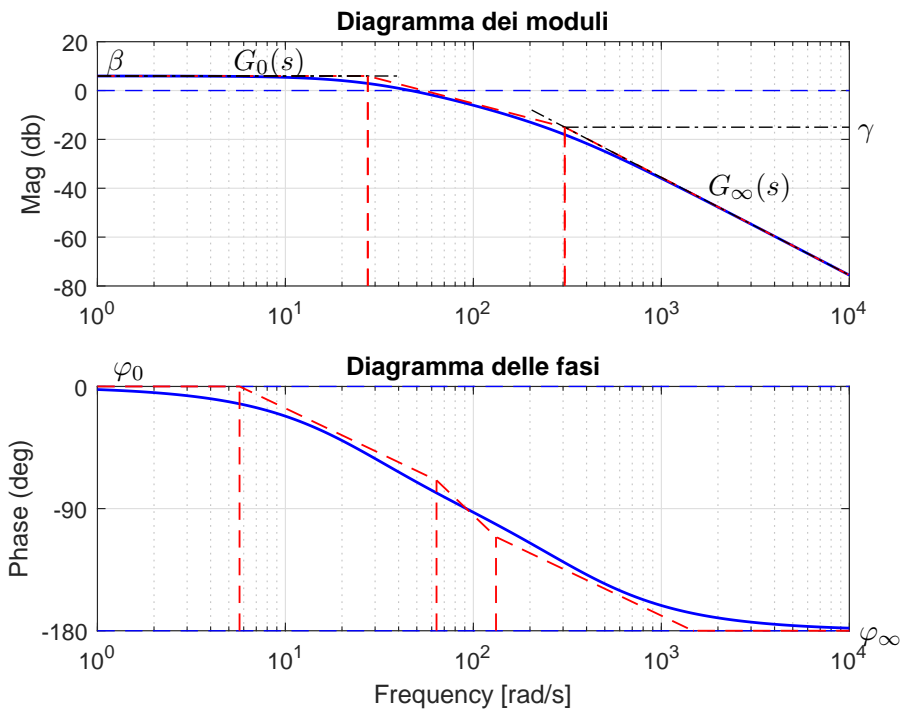


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

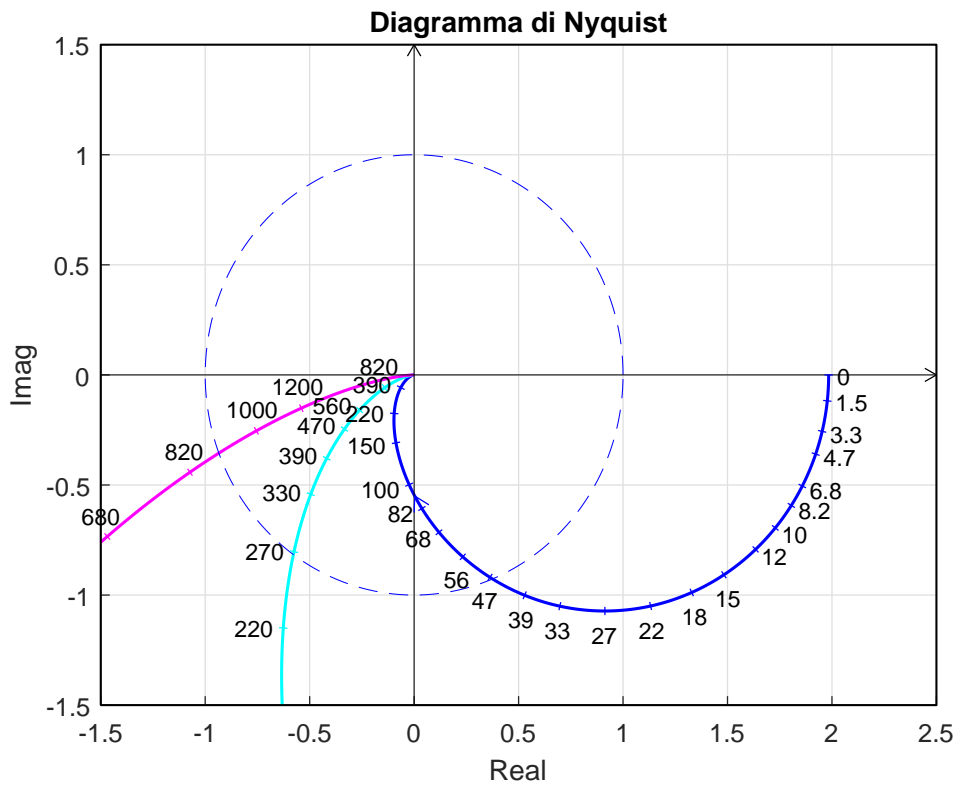


Figura 2: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$.

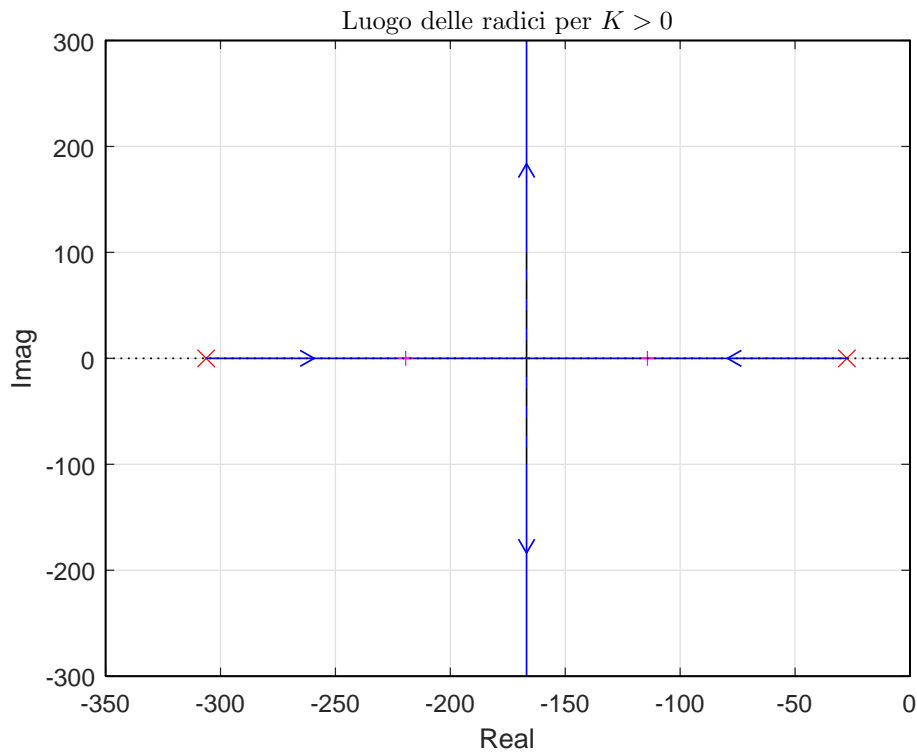


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$

Il corrispondente valore di K si determina utilizzando la seguente formula:

$$K_s = - \left. \frac{1}{G(s)} \right|_{s=-166.8333+300} = 6.5647$$

Il sistema retroazionato con un guadagno proporzionale $K_s = 6.5647$ si ottiene usando la formula di Mason:

$$G_0(s) = \frac{K_s G_V^\omega(s)}{1 + K_s G_V^\omega(s)}$$

Il diagramma di Nyquist della funzione $K_s G_V^\omega(s)$ è mostrato in ciano in Fig. 2. La risposta al gradino del sistema $G_V^\omega(s)$ e del sistema retroazionato $G_0(s)$ sono mostrati, rispettivamente in blue e in ciano, in figura Fig. 4.

Utilizzando un controllore proporzionale $D(s) = K$ si ottiene un buon transitorio, ma si ottiene un errore a regime e_p troppo elevato:

$$e_p = \frac{R_0}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 6.5647*} = 0.0713 = 7.13\%.$$

Per ottenere un errore a regime più piccolo, $e_p = 0.01$, occorre utilizzare un guadagno K^* che soddisfa la seguente relazione

$$e_p = \frac{R_0}{1 + K_p} = \frac{R_0}{1 + K^* G_V^\omega(0)} = 0.01 \quad \rightarrow \quad K^* = \frac{\frac{R_0}{e_p} - 1}{G_V^\omega(0)} \simeq 50$$

Se si utilizza un guadagno $K^* = 50$ si ottiene la risposta al gradino mostrata in magenta in figura Fig. 5. In questo caso il valore a regime è $y_\infty = 0.99002$. Il diagramma di Nyquist della funzione $K^* G_V^\omega(s)$ è mostrato in magenta in Fig. 2. Utilizzando il guadagno $K^* = 50$ si ottiene il valore a regime desiderato, ma una massima sovraelongazione troppo elevata. Si può ovviare a questo problema mettendo in cascata al guadagno K^* una rete correttiva.

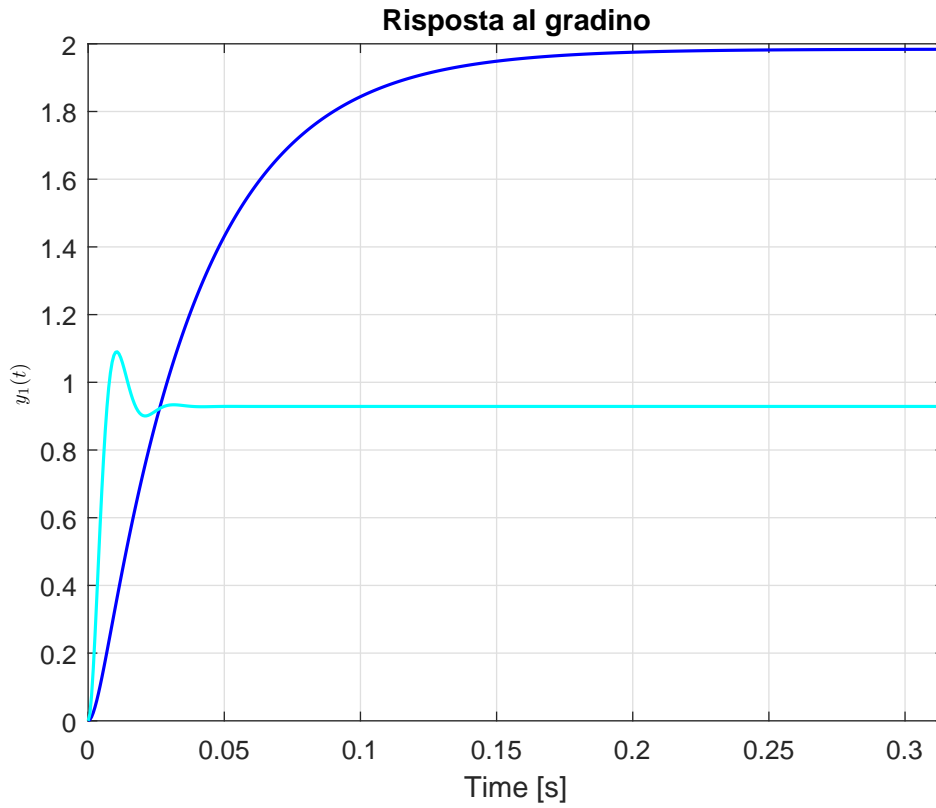


Figura 4: Risposta al gradino del sistema $G_V^\omega(s)$ e del sistema retroazionato $G_0(s)$.

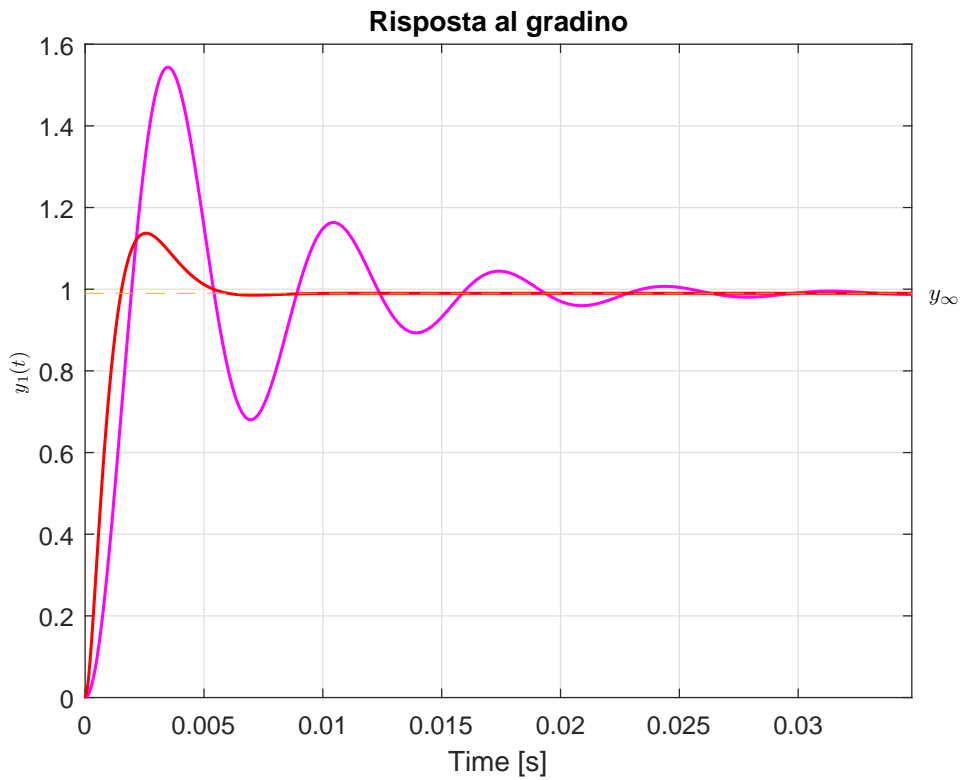


Figura 5: Risposta al gradino del sistema retroazionato $G_0(s)$ utilizzando un guadagno $K^* = 50$.

2.3 Sintesi di una rete anticipatrice

Si progetti una rete anticipatrice in da imporre un margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$.

Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 240^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 6. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1200$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.5606, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 195.6^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 0.001274$ e $\tau_2 = 0.0001837$ della rete correttiva $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 1.784, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 44.37^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.001274 s)}{(1 + 0.0001837 s)}.$$

Sintesi della rete correttiva $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A : I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 6. La risposta al gradino del sistema $K^*G_V^\omega(s)$ con

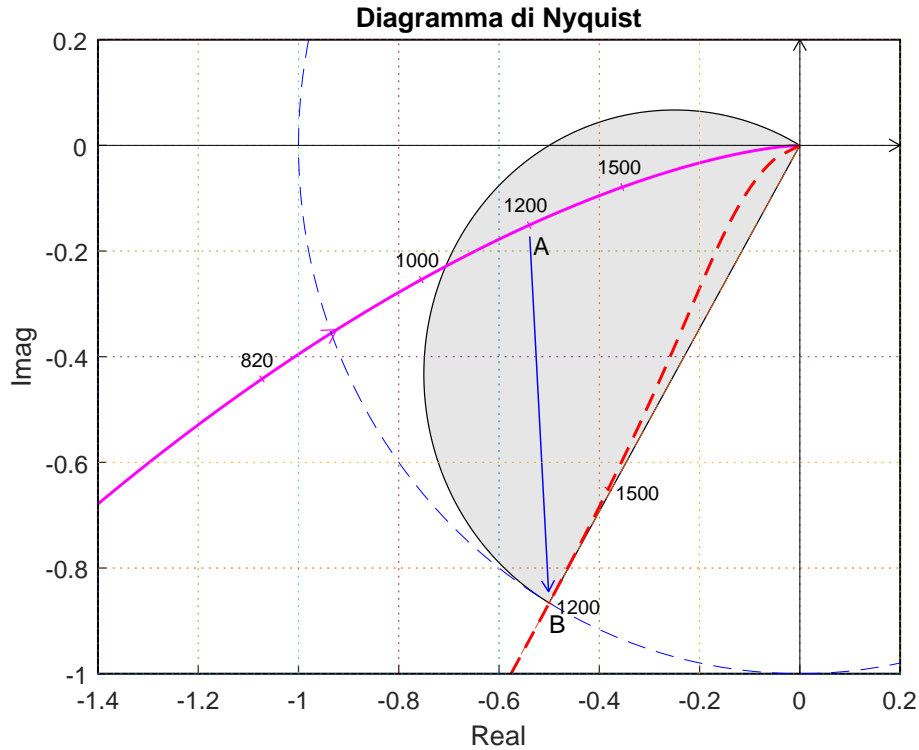


Figura 6: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $K^*G_V^\omega(s)$ e $C_2(s)K^*G_V^\omega(s)$.

in cascata la rete correttiva è mostrata in rosso in figura Fig. 5. I poli e il tempo di assestamento del sistema retroazionato senza rete correttiva sono:

$$p_{1,2} = -166.77 + 901.22i, \quad T_a = \frac{3}{166.77} = 0.0180.$$

I poli e il tempo di assestamento del sistema retroazionato con rete correttiva sono:

$$p_{1,2} = -771.6 \pm 697.7, \quad p_3 = -4195.5, \quad T_a = \frac{3}{4195.5} = 0.000715.$$

2.4 Sintesi di un regolatore per avere un errore a regime nullo

Se si desidera avere un errore a regime nullo allora si deve inserire un'azione integrale nel regolatore. Sia $G_I(s)$ il sistema di partenza $G_V^\omega(s)$ con in cascata un integratore:

$$G_I(s) = \frac{G_V^\omega(s)}{s} = \frac{50000}{s(3s^2 + 1001s + 25200)}$$

Il diagramma di Nyquist delle funzione $G_I(s)$ è mostrato in Fig. 7.

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_I(s)$ per $K > 0$ è mostrato in Fig. ???. Il luogo delle radici è caratterizzato da un solo asintoto che coincide con il semiasse negativo. La posizione degli asintoti è mostrata in figura. Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-27.4297 - 306.2369) = -111.2222.$$

Il miglior transitorio nella risposta al gradino si ottiene posizionando i poli sul punto doppio σ_0 . Il valore del punto doppio e il corrispondente tempo di assestamento sono:

$$\sigma_0 = -13.396, \quad T_a = \frac{3}{13.396} = 0.2239.$$

Il corrispondente valore di K si determina utilizzando la seguente formula:

$$K_{Int} = - \left. \frac{1}{G(s)} \right|_{s=-13.396} \simeq 3.3.$$

In questo caso non conviene utilizzare solo un'azione integrale e il guadagno K_{Int} perché il tempo di assestamento che si può ottenere è peggiore di quelli che si sono ottenuti nella sezione precedente. In questo conviene aumentare il guadagno K_{Int} fino portare il diagramma di Nyquist della funzione $K_{Int} G_I(s)$ in una zona utile per poter poi progettare una adeguata rete anticipatrice. Se si utilizza un guadagno $K_{Int} = 40$ si ottiene il diagramma di Nyquist mostrato in ciano in Fig. 7. Per la nuova funzione è agevole progettare una rete anticipatrice che imponga al sistema retroazionato un margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$.

Soluzione. La posizione del punto B è completamente determinata dalla specifica di progetto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 240^\circ$. La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 9. Il punto $A = G_a(j\omega_A)$ scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 68$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.4262, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 189.4^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e ω all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 0.03258$ e $\tau_2 = 0.003983$ della rete corretttrice $C_1(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 2.346, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 50.55^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.03258s)}{(1 + 0.003983s)}.$$

Sintesi della rete corretttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A : I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 9.

La risposta al gradino unitario dei sistemi $G_I(s)$ (blu), $K_{Int} G_I(s)$ (magenta) e $C_1(s)K_{Int} G_I(s)$ (rosso) sono mostrati mostrata in magenta in figura Fig. 10. I poli e il tempo di assestamento del sistema retroazionato con rete corretttrice sono:

$$p_{1,2} = -76.91 \pm 83.77j, \quad p_3 = -398.28, \quad p_4 = -32.49, \quad T_a = \frac{3}{32.49} = 0.0923.$$

Il tempo di assestamento che si è ottenuto ($T_a = 0.0923$) è comunque notevolmente superiore a quello ottenuto in precedenza ($T_a = 0.000715$.) senza azione integrale e utilizzando un guadagno $K^* = 50$.

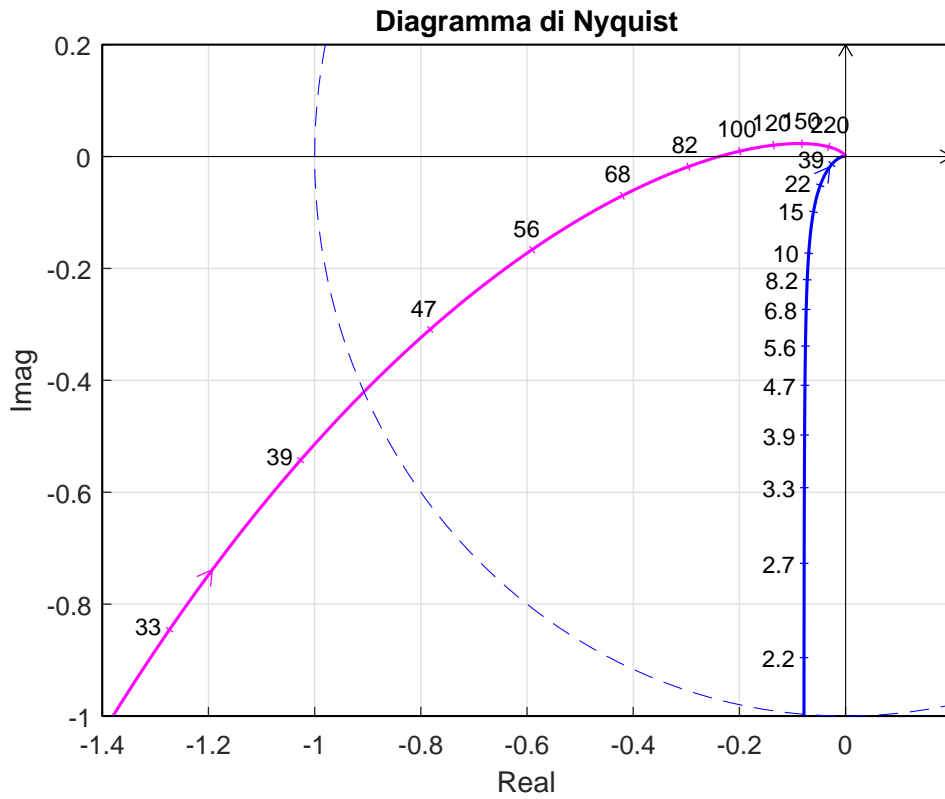


Figura 7: Diagrammi di Nyquist della funzione $G_I(s)$ e della funzione $K_{Int} G_I(s)$.

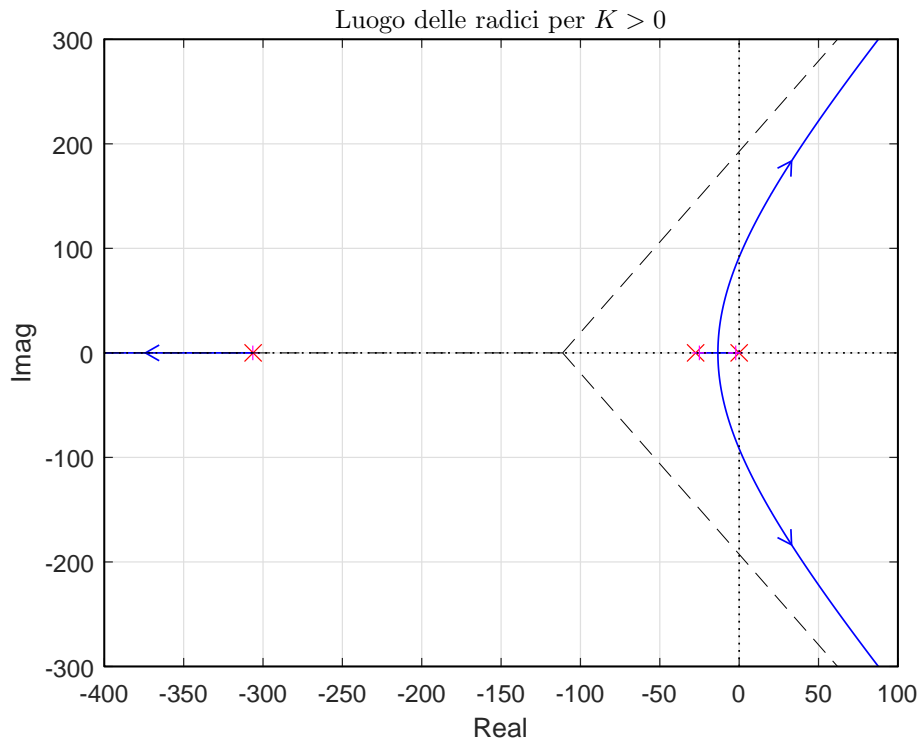


Figura 8: Luogo delle radici del sistema $G_I(s)$ al variare di $K > 0$

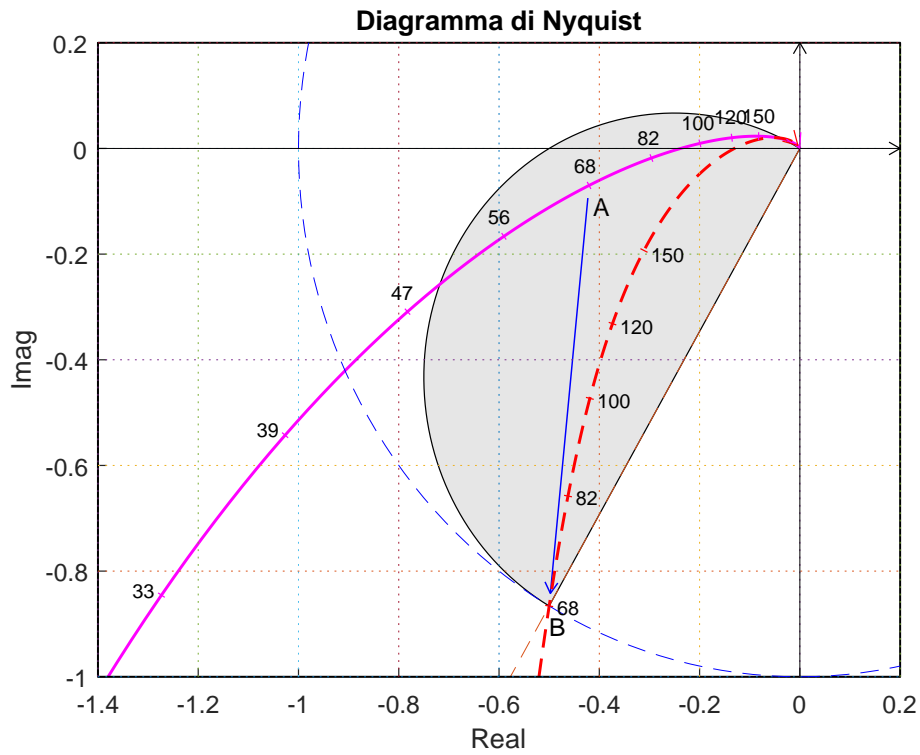


Figura 9: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $K_{Int} G_I(s)$ e $C_1(s)K_{Int} G_I(s)$.

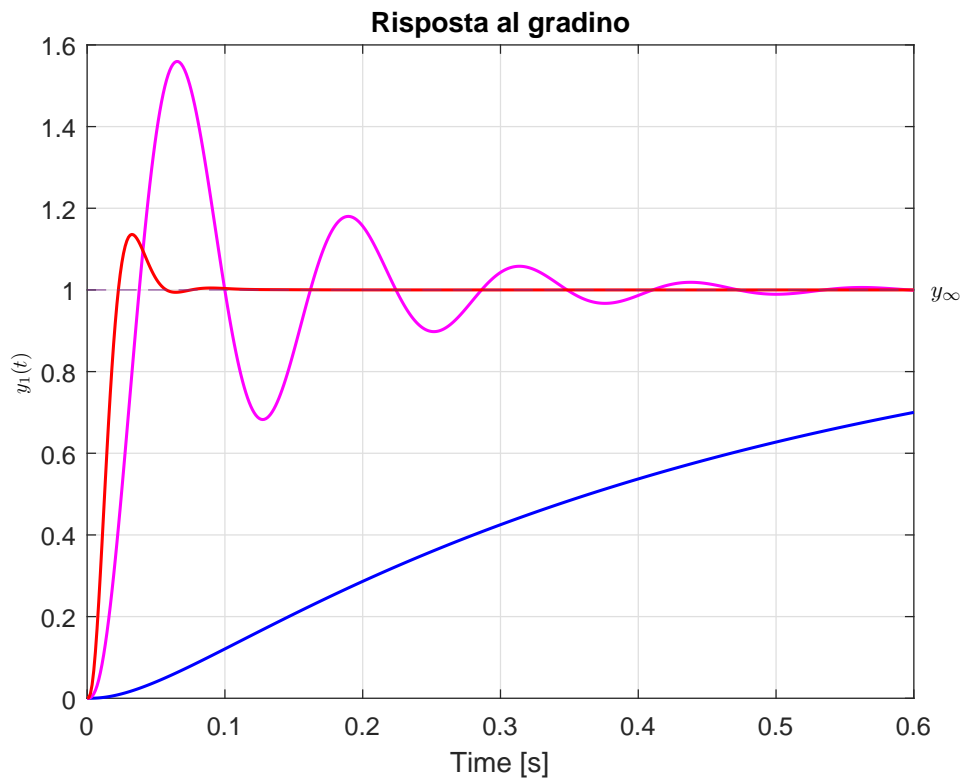


Figura 10: risposta al gradino unitario dei sistemi $G_I(s)$ (blu), $K_{Int} G_I(s)$ (magenta) e $C_1(s)K_{Int} G_I(s)$ (rosso).

2.5 Controllo in cascata di un motore elettrico in corrente continua

Se si ha a disposizione anche la misura della corrente I_1 di ingresso al motore, é possibile fare un controllo “in cascata” del motore. Questo tipo di controllo, vedi Fig. 11, prevede un primo controllo di corrente interno e poi un controllo di velocità piú esterno.

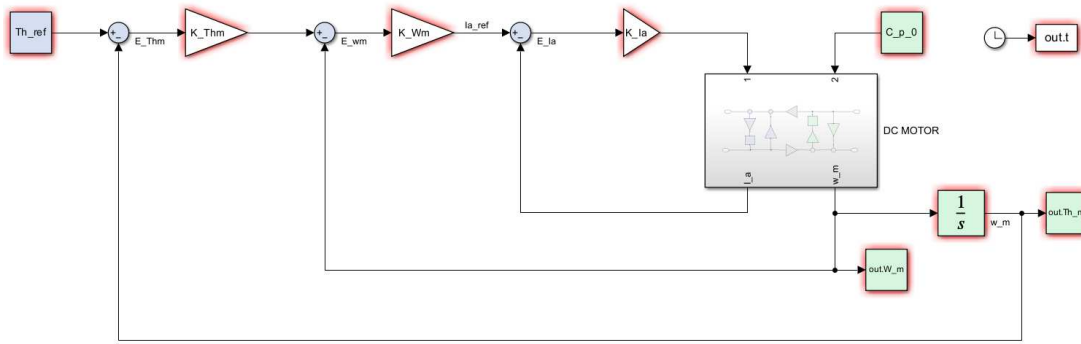


Figura 11: Controllo in cascata di un motore elettrico.

2.5.1 Controllo in corrente

Il controllo in corrente agisce su di un sistema a grado relativo $r = 1$, per cui il controllore può essere realizzato semplicemente utilizzando un controllo proporzionale molto elevato, eventualmente saturato se la tensione a disposizione é limitata. Nel sistema in esame, la funzione di trasferimento che lega la tensione V_1 alla corrente I_1 é la seguente:

$$G_{V_1}^{I_1}(s) = \frac{0.01 s + 0.002}{0.00003 s^2 + 0.01001 s + 0.252}$$

Il sistema $G_{V_1}^{I_1}(s)$ ha un guadagno statico $G_0 = 0.0079$. L'errore a regime e_p per ingresso a gradino sarà $e_p = 0.01$ se si utilizza il seguente guadagno:

$$K_{I_1} = \frac{\frac{R_0}{e_p} - 1}{G_0} = \frac{99}{0.0079} = 12532.$$

Utilizzando un guadagno $K_{I_1} = 12532$ si ottiene il seguente sistema retroazionato

$$G_0^{I_1}(s) = \frac{K_{I_1} G_{V_1}^{I_1}(s)}{1 + K_{I_1} G_{V_1}^{I_1}(s)}$$

che ha il suo polo dominante in $p_1 = -4177333$ a cui corrisponde un tempo di assestamento $T_a = \frac{3}{p_1} = 7.18 \cdot 10^{-7}$. La risposta al gradino unitario del sistema $G_0^{I_1}(s)$ é mostrata in figura Fig. 12.

2.5.2 Controllo di velocità

Dopo aver messo a punto il controllo di velocità si deve calcolare la nuova funzione di trasferimento che lega il riferimento di corrente I_{ref} alla velocità angolare ω_m del motore. Tale funzione si determina applicando il nuovo controllo

$$V_1 = K_I(I_{ref} - I_1)$$

al sistema di partenza, oppure applicando la formula di Mason al sistema complessivo dopo aver inserito il controllo di corrente. Procedendo in questo modo si ottiene la nuova funzione di trasferimento

$$G_{I_{ref}}^{w_m}(s) = \frac{2.089e08}{s^2 + 4.178e06s + 8.439e05}$$

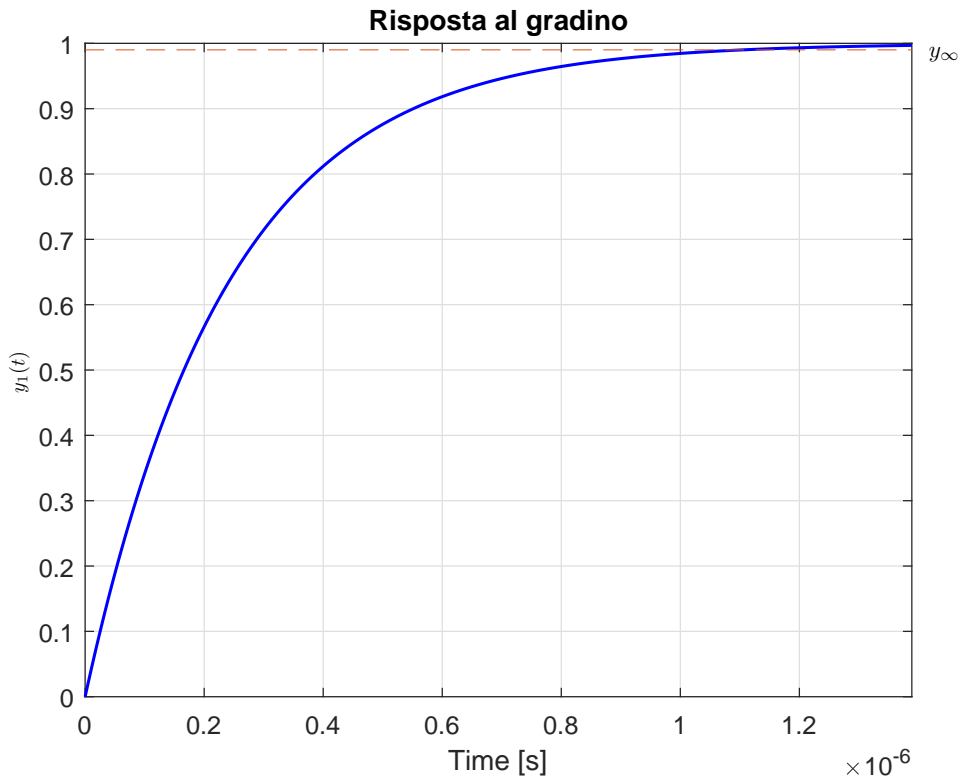


Figura 12: risposta al gradino unitario dei sistemi $G_I(s)$ (blu), $K_{Int}G_I(s)$ (magenta) e $C_1(s)K_{Int}G_I(s)$ (rosso).

caratterizzata da un guadagno statico $G_0 = 247.51$, da un grado relativo $r = 2$ e dai seguenti due poli:

$$p_1 = -4.1777e^6, \quad p_2 = -0.2020.$$

Il polo p_1 è il polo elettrico che si è diventato molto veloce per l'azione del controllo di corrente. Il polo p_2 descrive sostanzialmente il polo meccanico. Il nuovo sistema da controllare è quindi sostanzialmente un sistema del primo ordine per cui il controllo di velocità potrà essere fatto con un semplice controllore proporzionale K_{w_m} che imponga un errore a regime $e_p = 0.001$ sufficientemente basso:

$$K_{w_m} = \frac{\frac{R_0}{e_p} - 1}{G_0} = \frac{999}{247.51} \simeq 4.$$

Utilizzando questo guadagno, si ottiene il seguente sistema retroazionato

$$G_{w_{ref}}^{w_m}(s) = \frac{K_{w_m} G_{I_{ref}}^{w_m}(s)}{1 + K_{w_m} G_{I_{ref}}^{w_m}(s)} = \frac{8.43e08}{s^2 + 4.178e06s + 8.439e08}$$

che ha un guadagno statico $G_0 = 0.999$ e i seguenti due poli:

$$p_1 = -4.1777e06, \quad p_2 \simeq -202.$$

Al polo dominante p_2 corrisponde un tempo di assestamento $T_a = \frac{3}{p_2} = 0.0149$. La risposta al gradino unitario del sistema retroazionato $G_{w_{ref}}^{w_m}(s)$ è mostrata in figura Fig. 13.

2.5.3 Controllo di posizione

La funzione di trasferimento che si deve considerare se si vuole fare anche il controllo di posizione è la seguente:

$$G_{w_{ref}}^{Th_m}(s) = \frac{G_{w_{ref}}^{w_m}(s)}{s} = \frac{8.43e08}{s(s^2 + 4.178e06s + 8.439e08)}$$

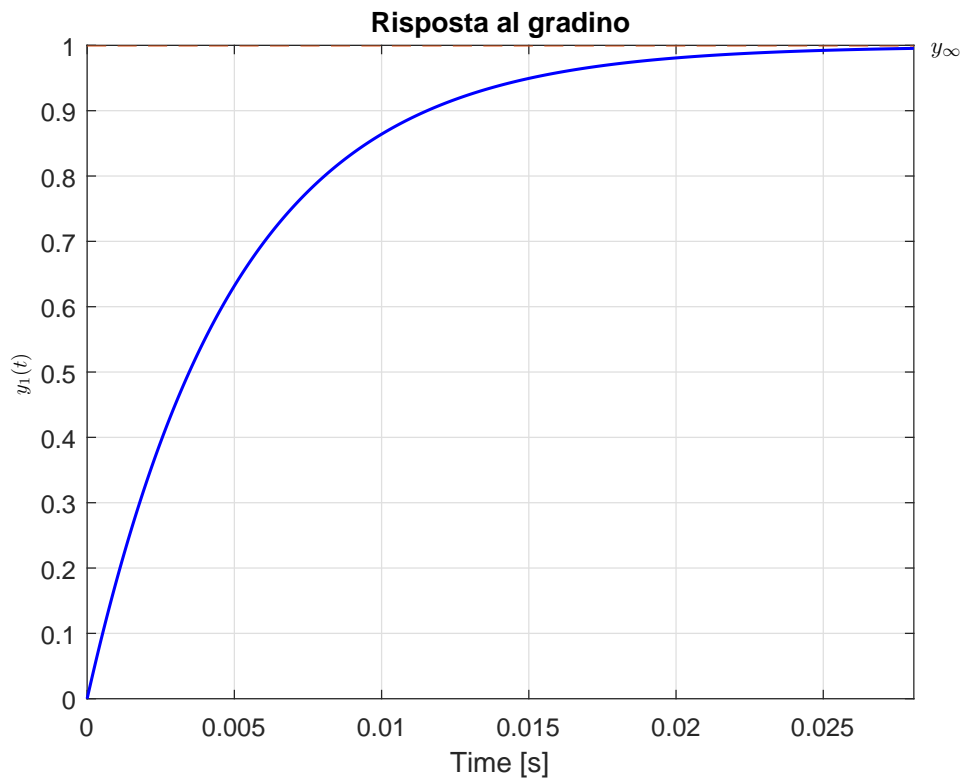


Figura 13: Risposta al gradino unitario del sistema retroazionato $G_{w_{ref}}^{w_m}(s)$.

Il controllore da utilizzare per questo sistema non deve avere l'azione integrale perché il sistema è già di tipo 1. In questo caso basterà utilizzare un controllore proporzionale con in cascata, eventualmente, una rete anticipatrice. Il diagramma di Nyquist delle funzioni $100 G_{w_{ref}}^{Th_m}(s)$ (in blu) e della funzione $2000 G_{w_{ref}}^{Th_m}(s)$ (in ciano) è mostrato in Fig. 14. Quindi, se si usa un controllo proporzionale $K_{Th_m} = 100$, il margine di fase del sistema retroazionato sarà sufficientemente ampio, vedi digramma blu in Fig. 14. Se invece si utilizza un controllo proporzionale $K_{Th_m} = 2000$, occorrerà mettere una rete anticipatrice in cascata al sistema.

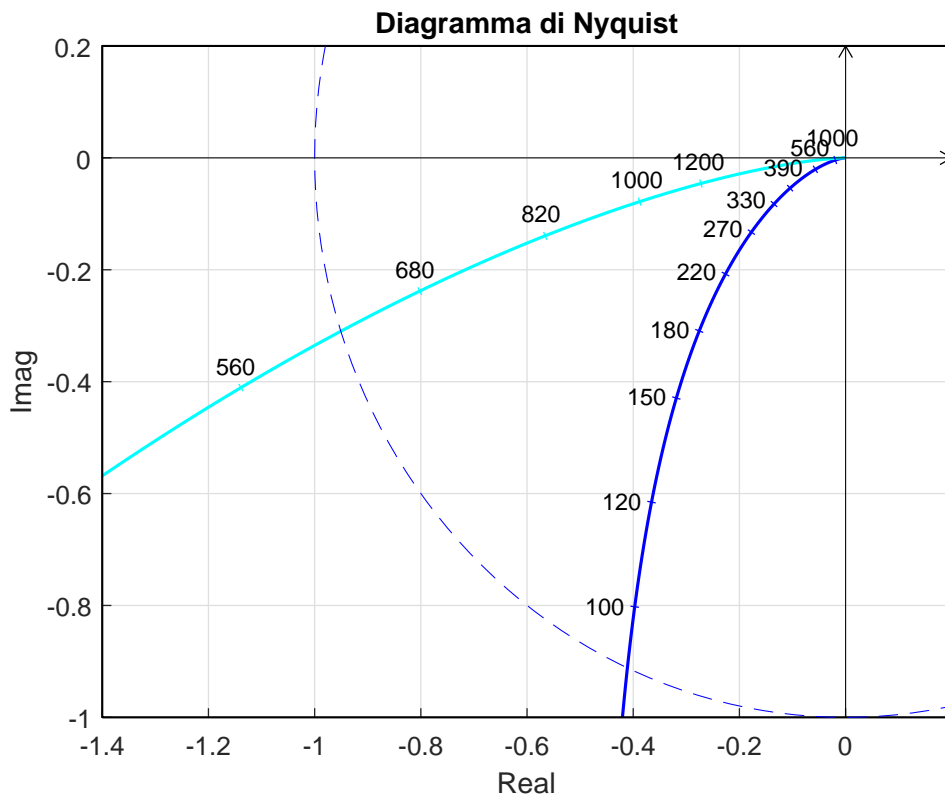


Figura 14: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $100G_{w_{ref}}^{Thm}(s)$ e della funzione $2000G_{w_{ref}}^{Thm}(s)$.