Industrial Automation Lab
21 Febbraio 2025 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

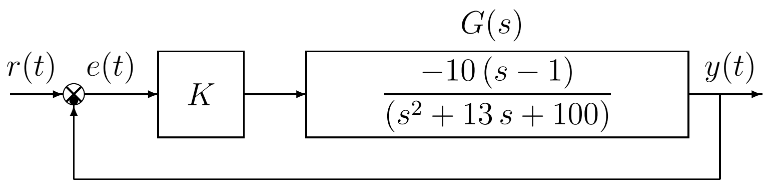
1. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$\mathcal{L}[3\,e^{-2\,t}\,\cos(5\,t)] = \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+25}, \qquad \mathcal{L}[2\,t^3\,e^{-5\,t}] = \frac{12}{(s+5)^4}$$

2. Calcolare la trasformata di Laplace inversa $g(t)$ della seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12}{s(s+1)(s+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s} - \frac{4}{(s+1)} + \frac{1}{(s+4)}\right] = 3 - 4\,e^{-t} + 1\,e^{-4t}$$

3) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



3.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K\,\frac{-10\,(s-1)}{(s^2+13\,s+100)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 + (13.0 - 10K)s + (10K + 100) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 10K+100 \\ 1 & 13.0-10K & \\ 0 & 10K+100 & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$13.0 - 10K > 0, \qquad 10K + 100 > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K < 1.3, \qquad K > -10.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$-10 < K < 1.3 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{10K^* + 100}{1}} = 10.6301.$$

3.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = 0.1, \qquad G_\infty(s) = \frac{-10}{s}.$$

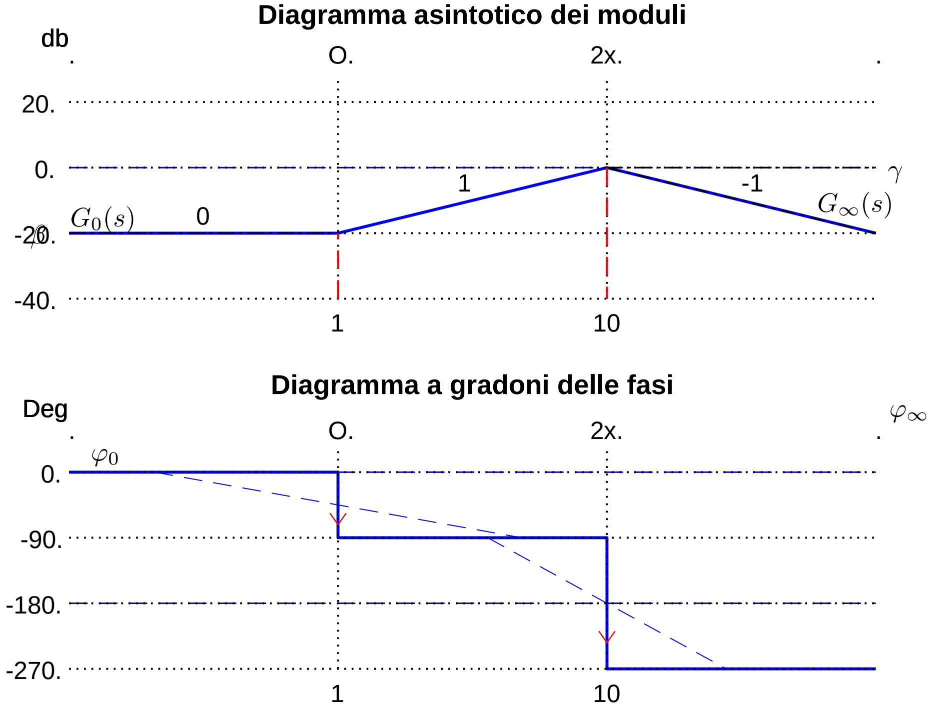


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = 0, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{3\,\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 0.1 = -20 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = -1 = 0 + 27.29i \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati: $\delta_1 = 0.65$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

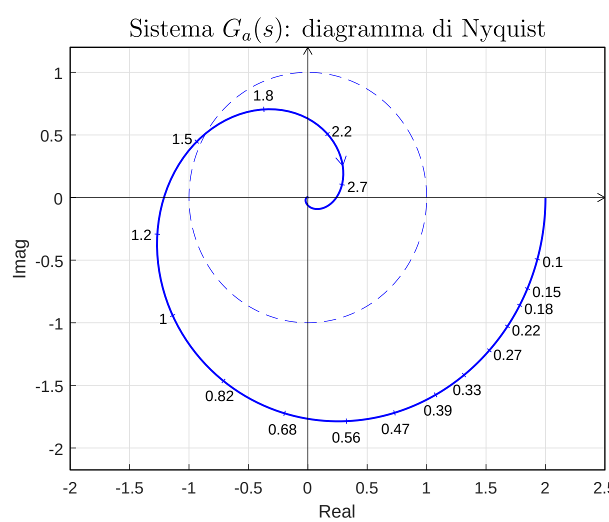
3.3) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1\, G_1(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K_1\, \frac{-10(s-1)}{(s^2 + 13\,s + 100)} = 0$$

dove $K_1 = -K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ é mostrato in Fig. 3. Il luogo delle radici ha un solo asintoto.

4) Per il sistema $G_a(s)$ riportato a fianco, progettare una rete correttrice $C(s)$ in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;



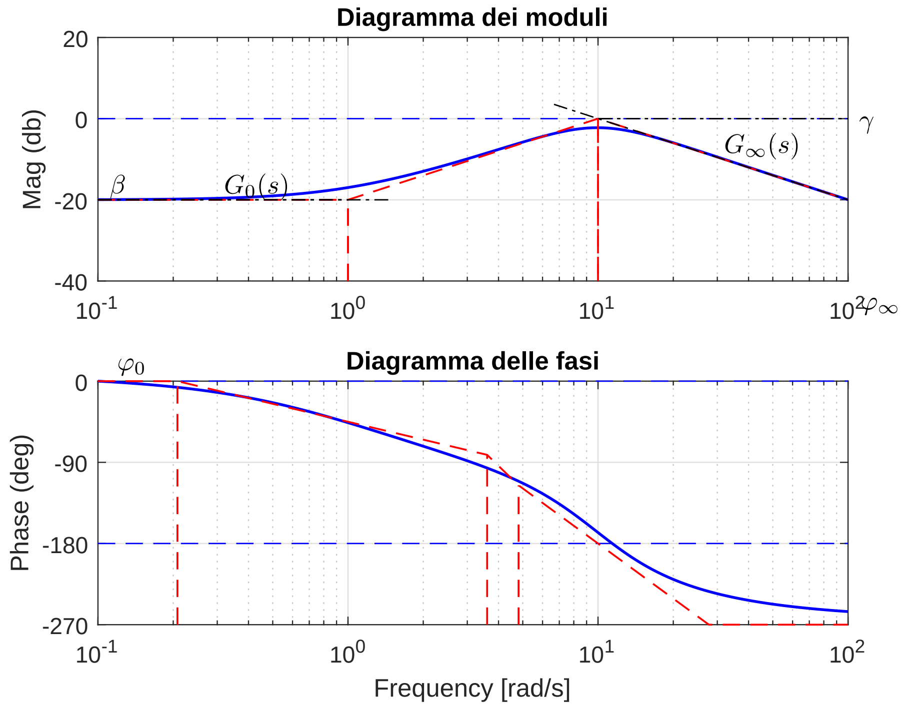


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

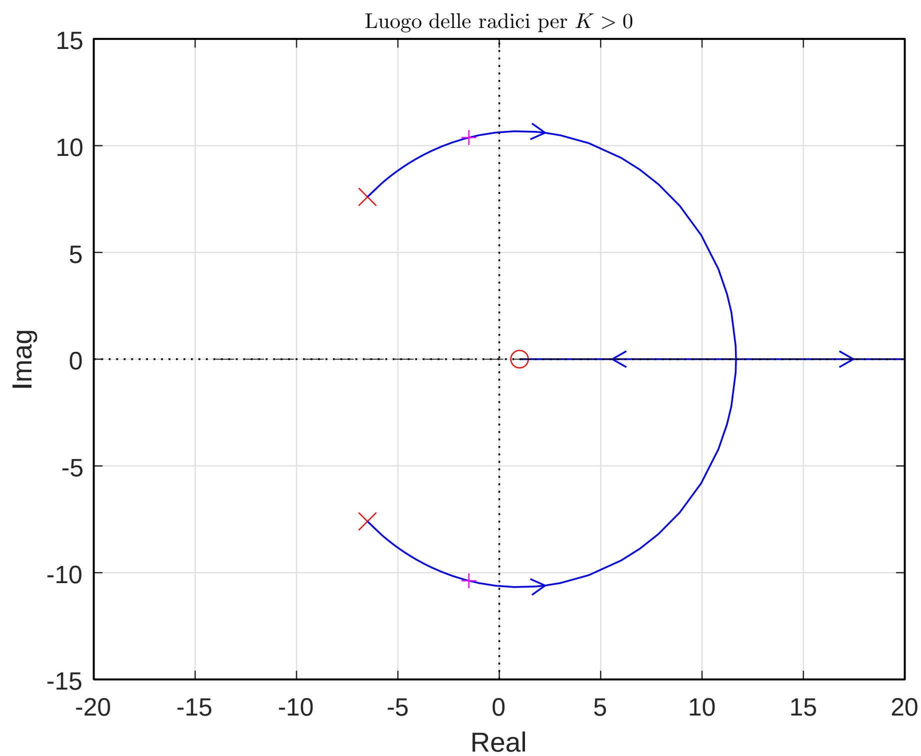


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per per $K > 0$ ($K_1 < 0$).

Sol. La specifica sul margine di ampiezza $M_a = 5$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$:

$$M_B = \frac{1}{M_a} = 0.2, \qquad\qquad \varphi_B = -180^\circ$$

La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 4.

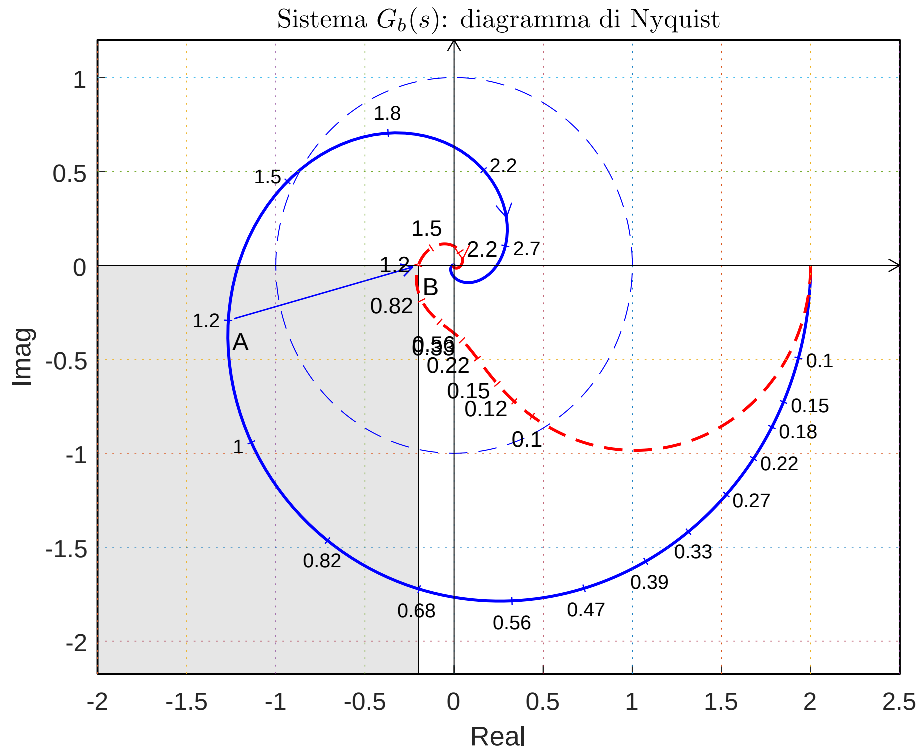


Figura 4: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)\,G_b(s)$.

Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.3, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -167^\circ.$$

Sostituendo i valori di M, φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 3.038$ e $\tau_2 = 20.46$ della rete correttrice $C_2(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1539, \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -13^\circ \qquad \rightarrow \qquad C_2(s) = \frac{(1 + 3.038\, s)}{(1 + 20.46\, s)}.$$

Il diagramma di Myquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

Sintesi della rete correttrice $C_2(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\;0.82 \quad 1 \quad 1.2\;] \\
M_A = & [\;1.628 \quad 1.477 \quad 1.3\;] \\
\varphi_A = & [\;-115.9 \quad -140.4 \quad -167\;] \\
M = & [\;0.1229 \quad 0.1354 \quad 0.1539\;] \\
\varphi = & [\;-64.15 \quad -39.64 \quad -13.01\;] \\
\tau_1 = & [\;0.4244 \quad 0.9949 \quad 3.038\;] \\
\tau_2 = & [\;10.44 \quad 10.37 \quad 20.46\;]
\end{array}$$

5) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare il seguente sistema tempo-continuo:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+3)}{(s+1)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Soluzione. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \left.\frac{(s+3)}{(s+1)}\right|_{s=\frac{(1-z^{-1})}{T}} = \frac{3T + 1 - \ z^{-1}}{T + 1 - \ z^{-1}}$$

Sostituendo $T = 0.1$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.3 - \ z^{-1}}{1.1 - \ z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze ha la forma seguente:

$$m_k = \frac{1}{1.1}\left[m_{k-1} + 1.3\ e_k - \ e_{k-1}\right]$$

cioè:

$$m_k = 0.90909\ m_{k-1} + 1.1818\ e_k - 0.90909\ e_{k-1}$$

Industrial Automation Lab

21 Febbraio 2025 - Domande

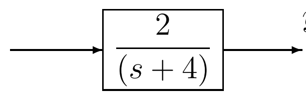
Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t) + 4\,\ddot{y}(t) + 2\,\dot{y}(t) + 3\,y(t) = 2\,\dot{x}(t) + 5\,x(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2\,s+5}{s^3+4\,s^2+2\,s+3}$$

2. Calcolare, a regime, il segnale sinusoidale in uscita $y(t)$ del seguente sistema dinamico quando in ingresso è presente il segnale sinusoidale $x(t)$:

$x(t) = 2 + 15\sin(3t)$



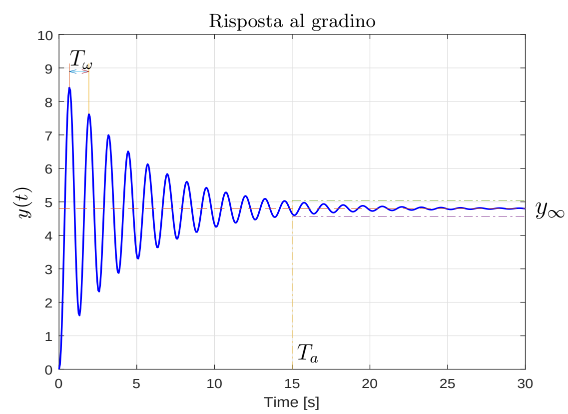
$y(t) \simeq 1 + 6\,\sin(3t - \arctan(\frac{3}{4}))$

3. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

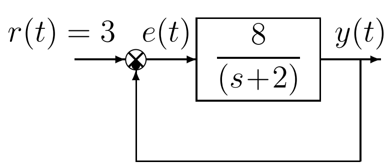
$$G(s) = \frac{20(12+s)(3s+30)}{(2s+12)(0.4s+5)(\mathbf{s^2+0.4s+25})}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

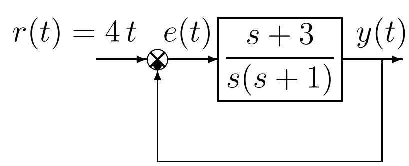
$$y_\infty = 4.8, \qquad T_a \simeq 15\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{5} = 1.26\,\text{s}.$$



4. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{3}{1+4} = 0.6$$



$$e(\infty) = \frac{4}{3} = 1.333$$

5. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali $x(n)$:

$$x(n) = (-1)^n \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z+1} \qquad\qquad x(n) = 2\,n \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{2\,z}{(z-1)^2}$$

6. In un sistema discreto a segnali campionati, qual è il legame che lega la variabile discreta z e la variabile s di Laplace?

$$z = e^{s\,T}.$$