

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

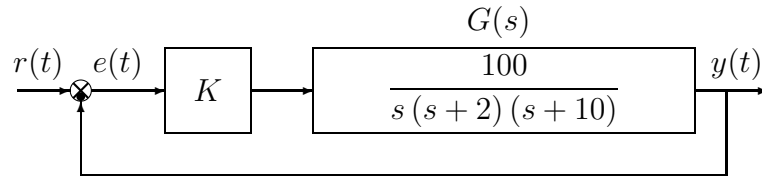
1. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$\mathcal{L}[\cos(5t)e^{-2t}] = \frac{(s+2)}{(s+2)^2 + 25}, \quad \mathcal{L}[t^4] = \frac{24}{s^5}$$

2. Calcolare la trasformata di Laplace inversa $g(t)$ della seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s(s+1)(s+3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+3}\right] = 2 - 3e^{-t} + e^{-3t}$$

3. Sia dato il seguente sistema retroazionato:



3.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{100}{s(s+2)(s+10)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 12s^2 + 20s + 100K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 20 \\ 2 & 12 & 100K \\ 1 & 240.0 - 100K & \\ 0 & 100K & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$240.0 - 100K > 0, \quad 100K > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K < 2.4, \quad K > 0.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < 2.4 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{100K^*}{12}} = 4.4721.$$

3.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

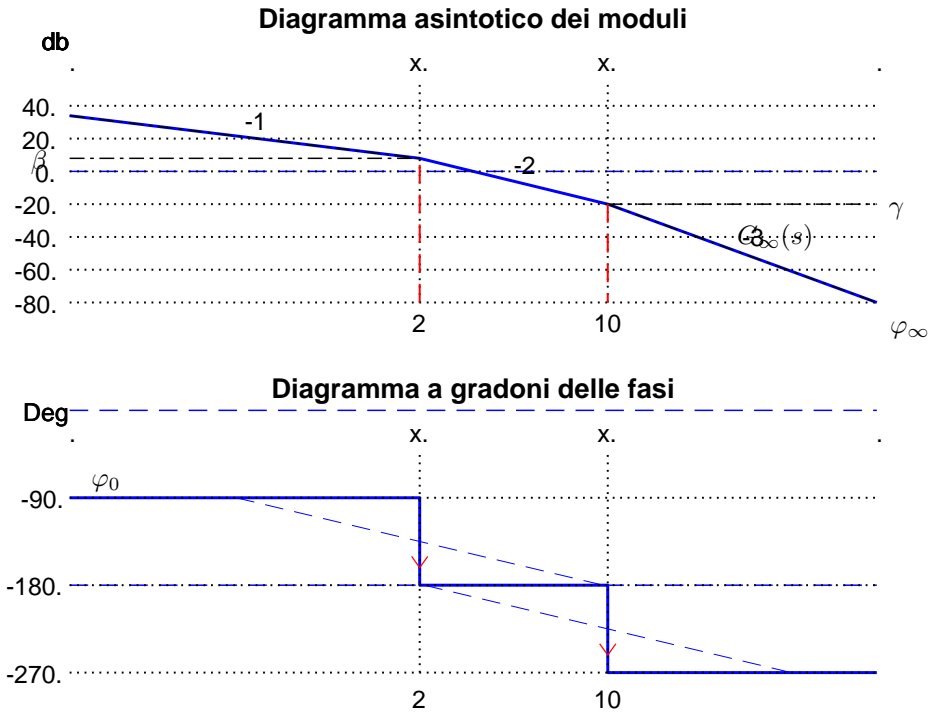


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{5}{s} = \frac{K}{s}, \quad G_\infty(s) = \frac{100}{s^3}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_\infty = -\frac{3\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 2$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=2} = 2.5 = 7.959 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 0.1 = -20 \text{ db}.$$

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

3.3) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + K \frac{100}{s(s+2)(s+10)} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$ è mostrato in Fig. 3. Il luogo delle radici ha tre asintoti. Il centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-10 - 2) = -4.$$

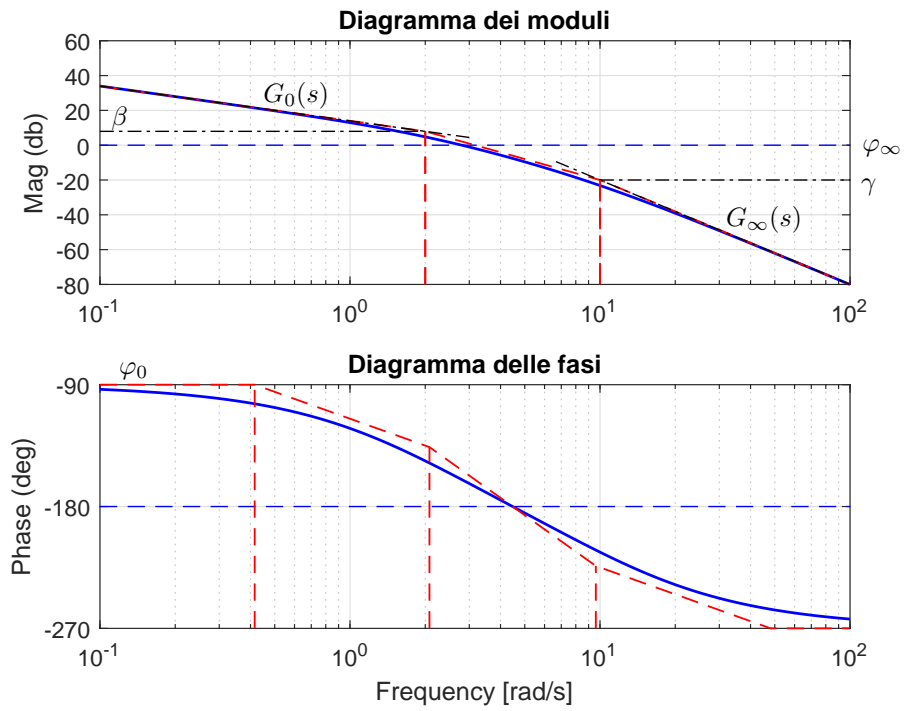


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

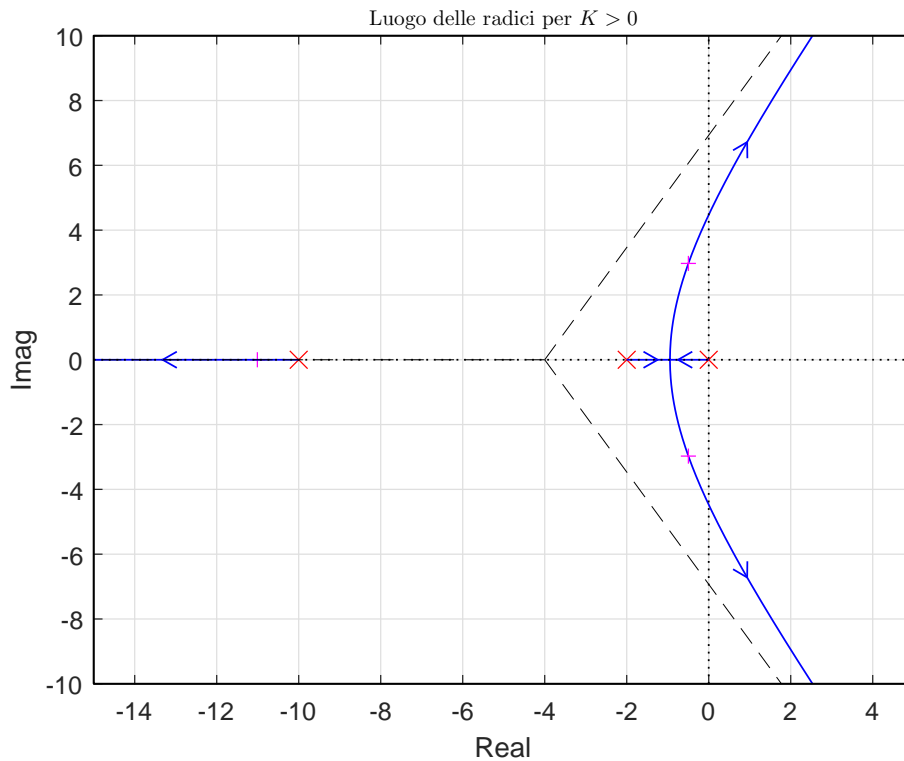
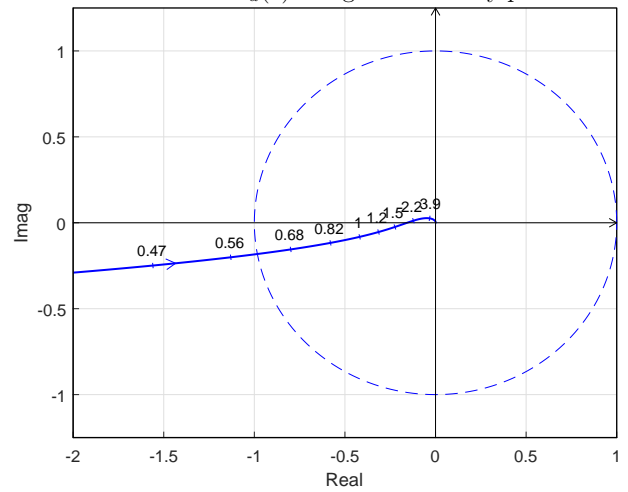


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$

4. Per il sistema $G_a(s)$ riportato a fianco, progettare una rete correttiva in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 50^\circ$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.



Sol. La specifica sul margine di fase $M_\varphi = 50^\circ$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 230^\circ$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 4. Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttiva è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.4267, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 191.1^\circ.$$

Sostituendo i valori di M , φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 2.492$ e $\tau_2 = 0.5589$ della rete correttiva $C(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 2.3436, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 38.93^\circ \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 2.492 s)}{(1 + 0.5589 s)}.$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

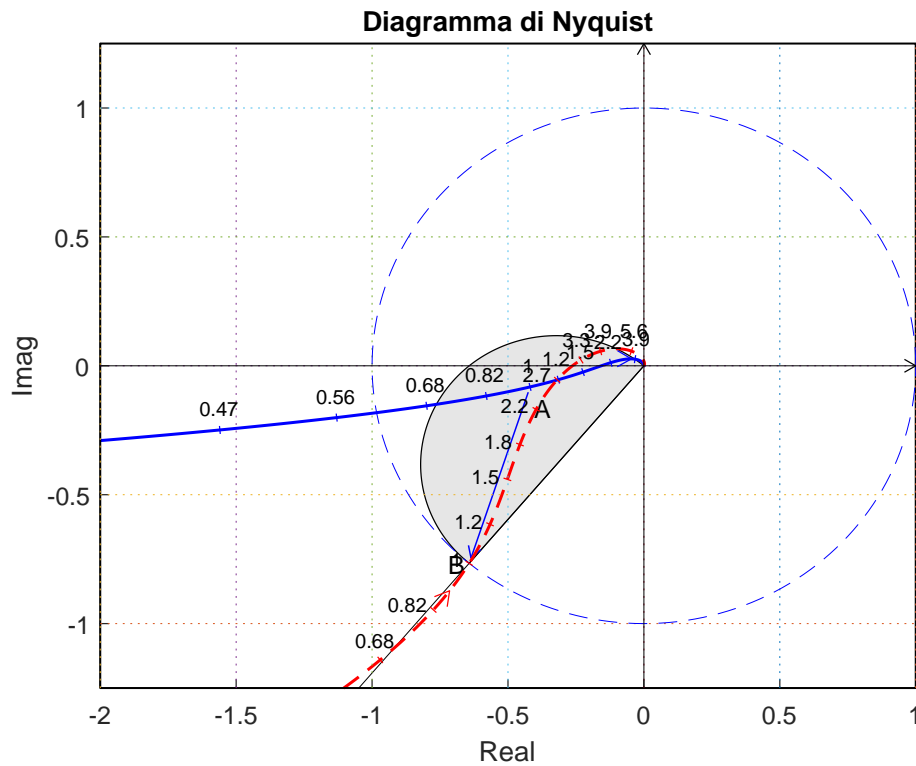


Figura 4: di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$.

Sintesi della rete correttiva $C_1(s)$ con altri valori del guadagno K : ω_A :

$$\begin{aligned}\omega_A &= [2.2 & 1.5 & 1.2 & 1 & 0.82] \\ M_A &= [0.1225 & 0.2253 & 0.3192 & 0.4267 & 0.5914] \\ \varphi_A &= [174.3 & -173.8 & -170.3 & -168.9 & -168.6] \\ M &= [8.162 & 4.438 & 3.133 & 2.344 & 1.691] \\ \varphi &= [-304.3 & 43.79 & 40.29 & 38.93 & 38.59] \\ \tau_1 &= [4.181 & 3.581 & 3.055 & 2.492 & 1.778] \\ \tau_2 &= [0.2427 & 0.4784 & 0.5716 & 0.5589 & 0.3719]\end{aligned}$$

5) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare il seguente sistema tempo-continuo:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+2)}{(s+3)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Soluzione. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \frac{(s+2)}{(s+3)} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{2T+1-z^{-1}}{3T+1-z^{-1}}$$

Sostituendo $T = 0.1$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.2 - z^{-1}}{1.3 - z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze ha la forma seguente:

$$m_k = \frac{1}{1.3} [m_{k-1} + 1.2 e_k - e_{k-1}]$$

cioè:

$$m_k = 0.76923 m_{k-1} + 0.92308 e_k - 0.76923 e_{k-1}$$

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) + 4y(t) = 3\dot{x}(t) + 2x(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3s + 2}{s^3 + 3s^2 + s + 4}$$

2. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 9 + 2 \sin(4t) \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{10}{s+3}} \quad y(t) \simeq 30 + 4 \sin(4t - \arctan \frac{4}{3})$$

3. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

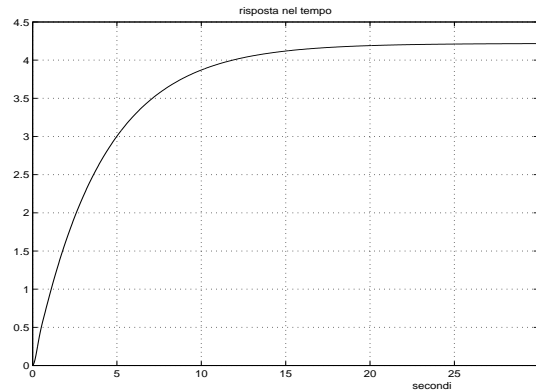
$$G(s) = \frac{(3 + 0.2s)(s^2 + 60s + 1800)}{(2 + 8s)(8 + 0.2s)(s^2 + 8s + 80)}$$

Calcolare inoltre:

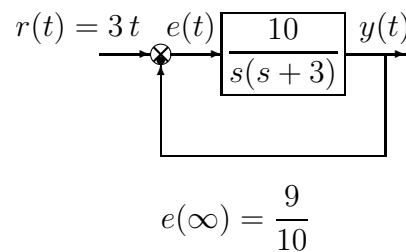
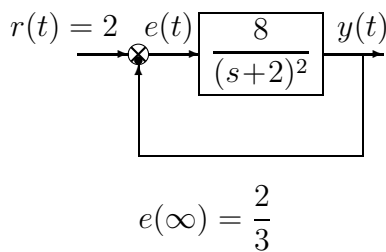
- 1) il valore a regime y_∞ della risposta impulsiva per $t \rightarrow \infty$;
- 2) il tempo di assestamento T_a della risposta impulsiva $y_1(t)$;
- 3) il periodo T dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$K_0 = 4.219, \quad T_a \simeq 12 \text{ s}, \quad T \simeq \varnothing$$

Il polo dominante del sistema è dato dal termine $(2 + 8s)$.



4. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



5. Calcolare la \mathcal{Z} -trasformata $X(z)$ delle seguenti due successioni numeriche $x(k)$:

$$x(k) = 3k \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{3z}{(z-1)^2}, \quad x(k) = 3^k \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z-3}$$

6. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine 0:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

7. Il sistema dinamico discreto $G(z) = \frac{1}{z(z-0.5)}$:

- è asintoticamente stabile è semplicemente stabile è instabile