Industrial Automation Lab
3 Febbraio 2025 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

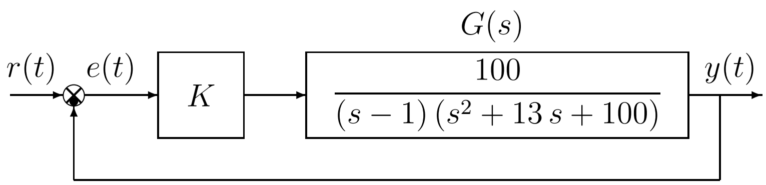
1. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$\mathcal{L}[2\,e^{-3\,t}\,\sin(4\,t)] = \frac{8}{(s+3)^2+16}, \qquad \mathcal{L}[3\,t^2\,e^{-4\,t}] = \frac{6}{(s+4)^3}$$

2. Calcolare la trasformata di Laplace inversa $g(t)$ della seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12\,(s+1)}{s(s+2)(s+3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}+\frac{6}{(s+2)}-\frac{8}{(s+3)}\right] = 2+6\,e^{-2t}-8\,e^{-3t}$$

3) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



3.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1+K\,\frac{100}{(s-1)\,(s^2+13\,s+100)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3+12s^2+87s+(100K-100) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 87 \\ 2 & 12 & 100K-100 \\ 1 & 1144.0-100K & \\ 0 & 100K-100 & \end{array}$$

Imponendo che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh siano positivi si ricavano i seguenti vincoli:

$$1144.0-100K > 0, \qquad 100K-100 > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K < 11.44, \qquad K > 1.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$1 < K < 11.44 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{100K^*-100}{12}} = 9.3274.$$

3.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

<u>Soluzione</u>.

I diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

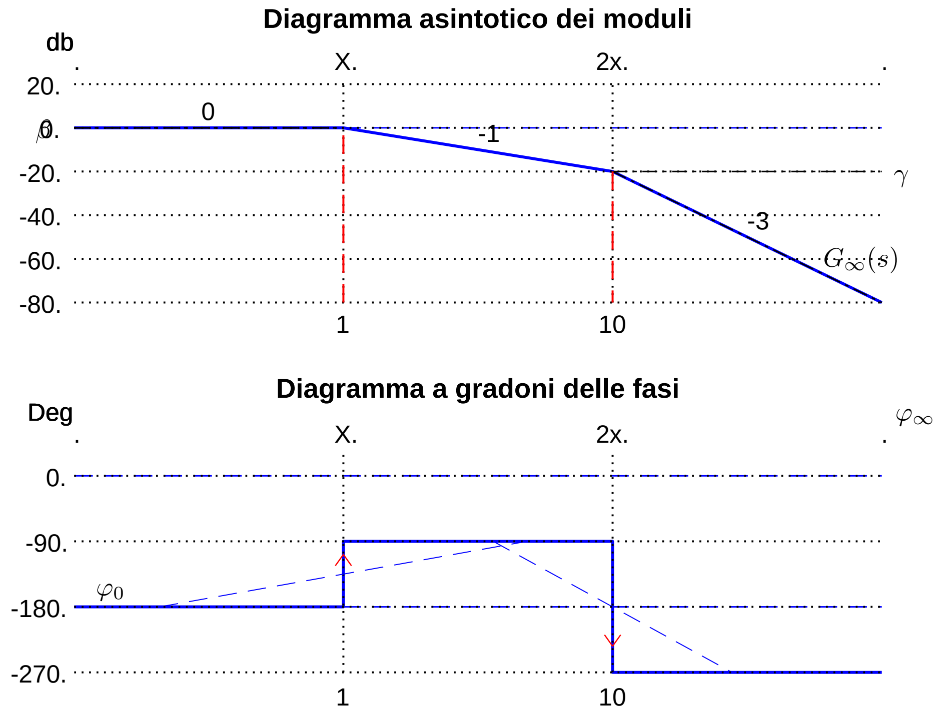


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = -1, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{100}{s^3}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{3\,\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 1 = 0 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 0.1 = -20 \text{ db}.$$

Coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati: $\delta_1 = 0.65$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

3.3) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1\, G_1(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K_1\, \frac{100}{(s-1)\,(s^2 + 13\,s + 100)} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$ é mostrato in Fig. 3. Il luogo delle radici ha tre asintoti. Il centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}\,(-13 + 1) = -4.$$

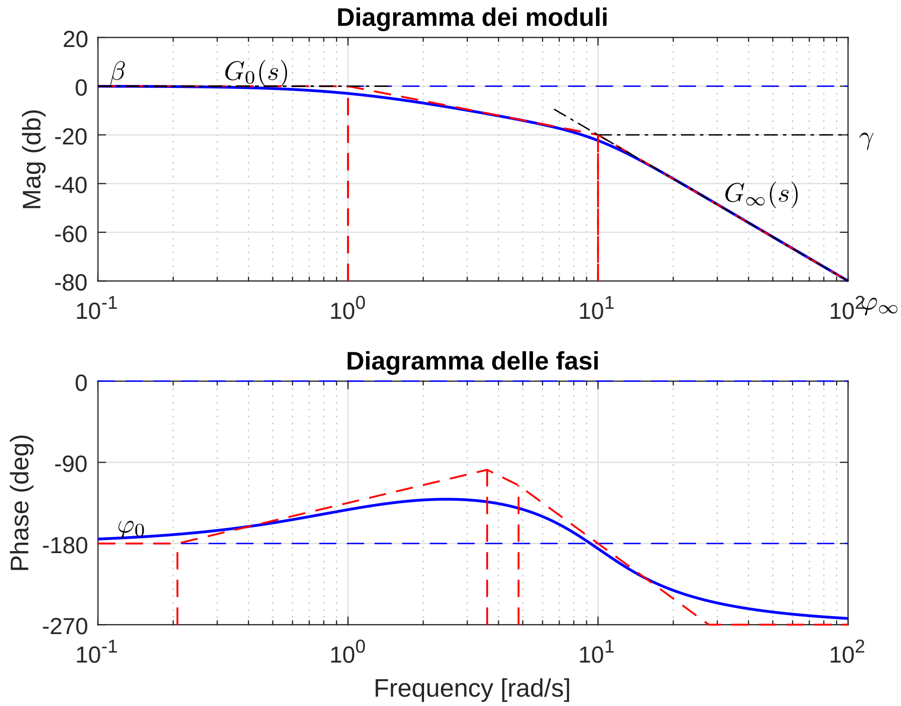


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

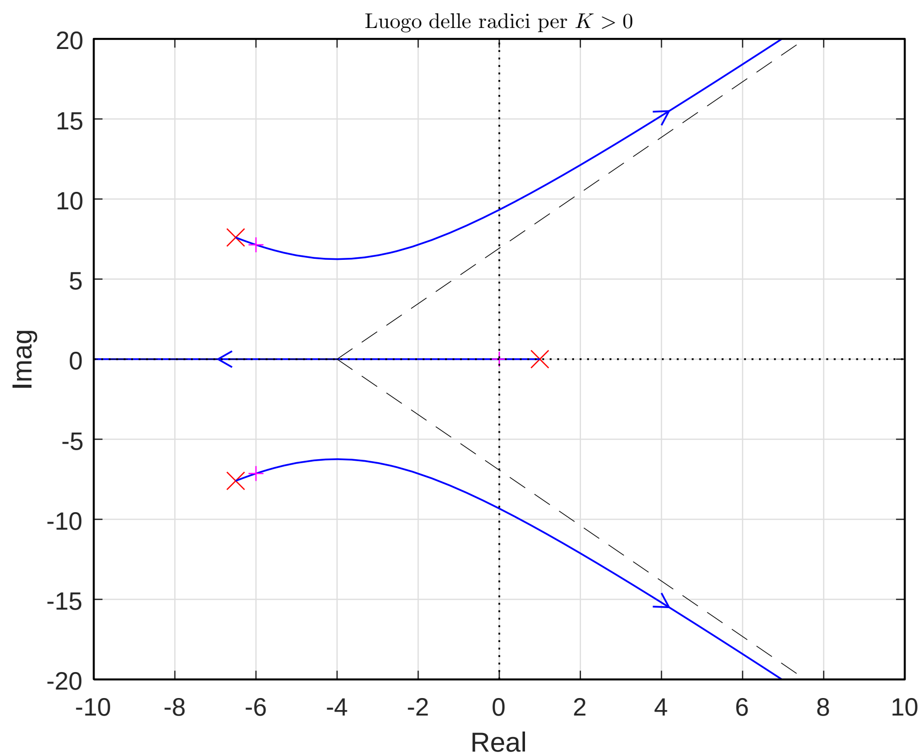
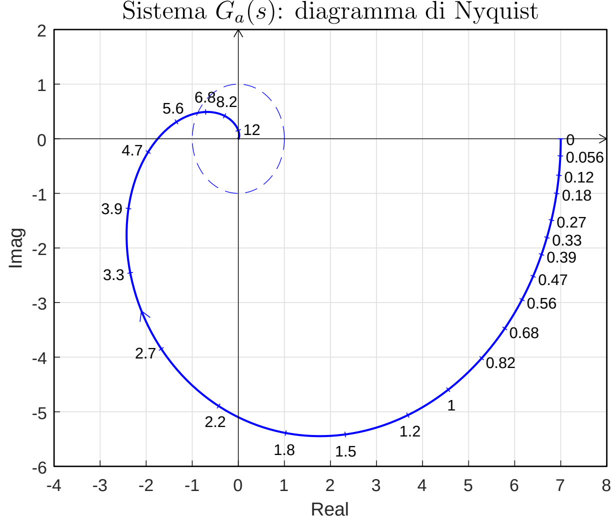


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$

3. Per il sistema $G_a(s)$ riportato a fianco, progettare una rete correttrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 45^o$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.



Sol. La specifica sul margine di fase $M_\varphi = 45^o$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 225°$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 4. Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 2.7$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 4.196, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 246.5°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione:

$$\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi}, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi}$$

si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 0.6985$ e $\tau_2 = 3.297$ della rete correttrice $C(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.2383, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -21.52° \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 0.6985\, s)}{(1 + 3.297\, s)}.$$

I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori del guadagno K: ω_A:

$'\omega_A =$[	3	2.7	2.2	1.8	1.5]
$M_A =$[	3.785	4.196	4.913	5.486	5.892]
$\varphi_A =$[	236.1	246.5	265	280.8	293.2]
$M =$[	0.2642	0.2383	0.2035	0.1823	0.1697]
$\varphi =$[	−11.14	−21.52	−40	−55.8	−68.2]
$\tau_1 =$[	1.236	0.6985	0.3978	0.2551	0.1447]
$\tau_2 =$[	4.835	3.297	2.933	3.307	3.964]

5) Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare il seguente sistema tempo-continuo:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+1)}{(s+2)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Soluzione. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene:

$$D(z) = \left.\frac{(s+1)}{(s+2)}\right|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{T + 2 + (T-2)\, z^{-1}}{2T + 2 + (2T-2)\, z^{-1}}$$

Sostituendo $T = 0.1$ si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{2.1 - 1.9\, z^{-1}}{2.2 - 1.8\, z^{-1}}$$

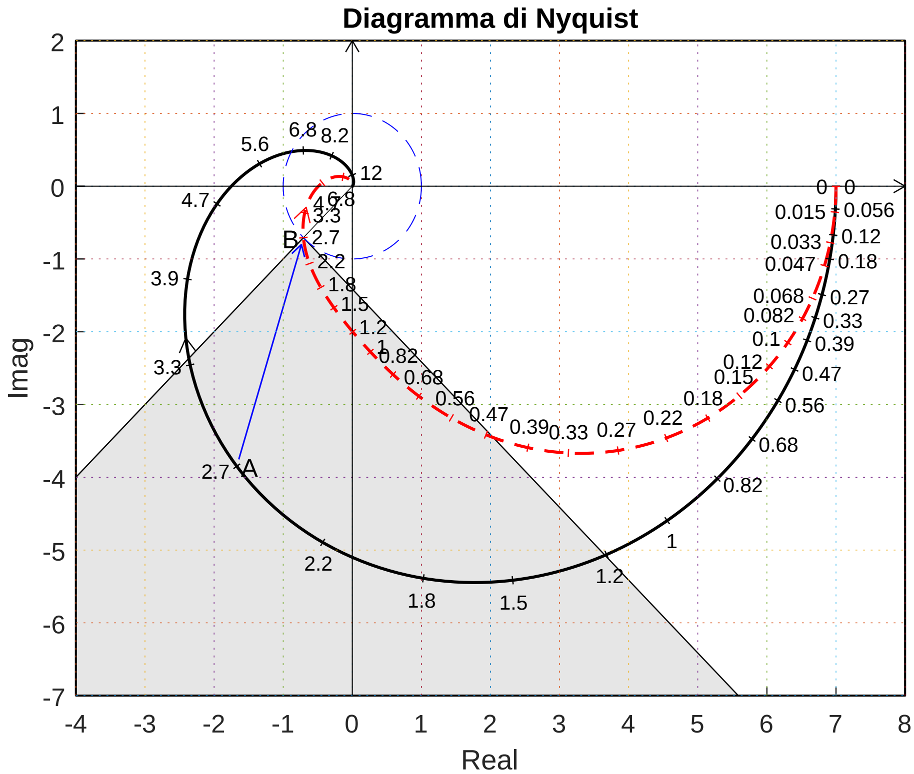


Figura 4: di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)\,G_b(s)$.

La corrispondente equazione alle differenze ha la forma seguente:

$$m_k = \frac{1}{2.2}\left[1.8\; m_{k-1} + 2.1\; e_k - 1.9\; e_{k-1}\right]$$

cioè:

$$m_k = 0.81818\; m_{k-1} + 0.95455\; e_k - 0.86364\; e_{k-1}$$

Industrial Automation Lab

3 Febbraio 2025 - Domande

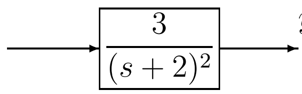
Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

1. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 3\,s + 4}{s^3 + 3\,s^2 + 5\,s + 2} \qquad \rightarrow \qquad \dddot{y} + 3\,\ddot{y} + 5\,\dot{y} + 2\,y = \ddot{x} + 3\dot{x} + 4\,x$$

2. Calcolare il segnale sinusoidale in ingresso $x(t)$ del seguente sistema quando in uscita, a regime, è presente il segnale sinusoidale $y(t)$:

$x(t) = 4 + 16\sin(2t)$



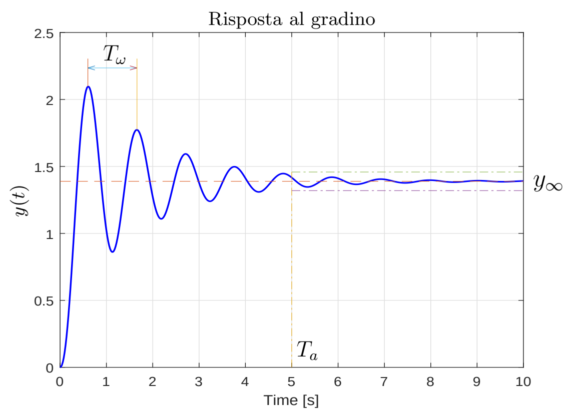
$y(t) \simeq 3 + 6\,\sin(2t - 90°)$

3. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

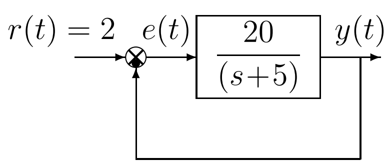
$$G(s) = \frac{30(6 + 0.5s)(2s + 20)}{(3s + 18)(0.5s + 4)(\mathbf{s^2 + 1.2s + 36})}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

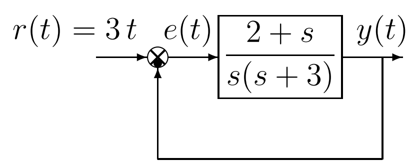
$$y_\infty = 1.388, \qquad T_a \simeq 5\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq \frac{2\pi}{6} = 1.05\,\text{s}.$$



4. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{2}{5} = 0.4$$



$$e(\infty) = \frac{9}{2} = 4.5$$

5. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali tempo continui $x(t)$ quando $t = k\,T$:

$$x(t) = 3\,t \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{3\,T\,z}{(z-1)^2} \qquad\qquad x(t) = 2\,a^{-3\,t} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{2\,z}{(z - a^{-3\,T})}$$

6. Sia $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$ la $\mathcal{Z}$-trasformata della successione $x(k)$. Per $n = 1, 2, \ldots,$ enunciare il teorema della traslazione in anticipo nel tempo:

$$\mathcal{Z}[x(k+n)] = z^n \left[X(z) - \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} x(k) z^{-k}\right]$$