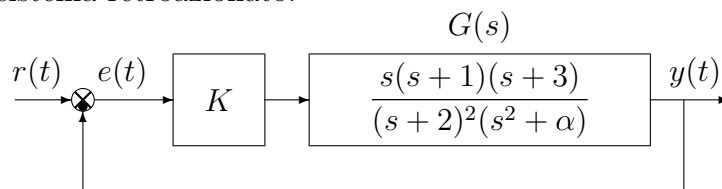


|          |  |
|----------|--|
| Nome:    |  |
| Nr. Mat. |  |
| Firma:   |  |

a) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



a.1) Posto  $\alpha = 1$ , tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per  $K > 0$ . Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione “solo in modo qualitativo”. Guardando il solo luogo delle radici, dire per quali valori di  $K$  il sistema retroazionato é stabile.

*Soluzione.* Posto  $\alpha = 1$ , l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{K s(s+1)(s+3)}{(s+2)^2(s^2+1)} = 0$$

dove  $K_1 = K$ . L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema  $G(s)$  per  $K > 0$  é mostrato in Fig. 1.

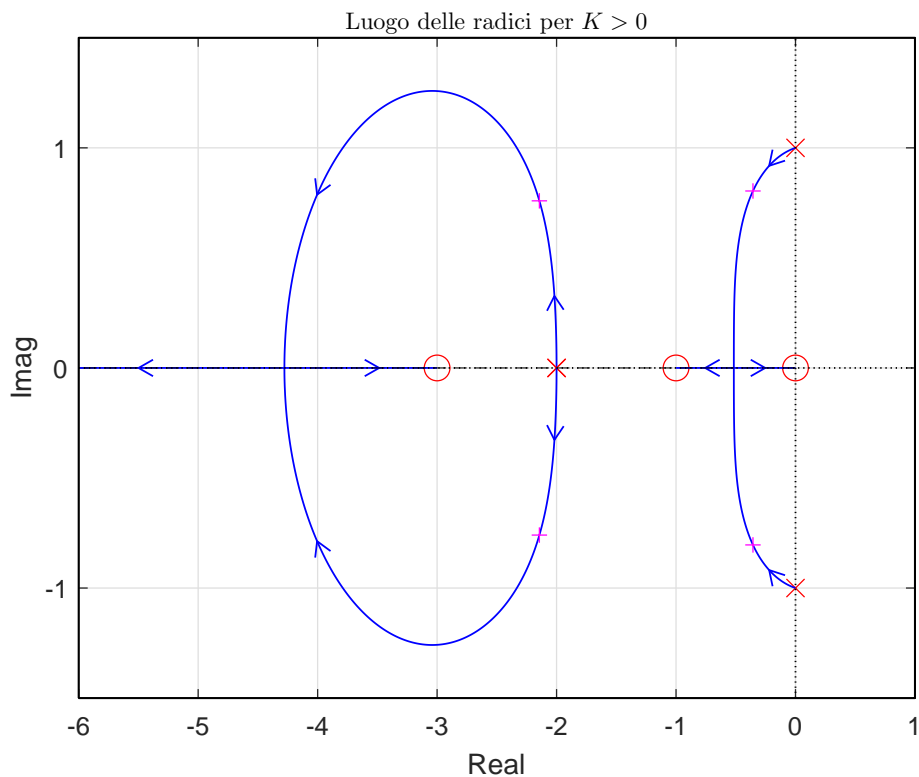


Figura 1: Luogo delle radici del sistema  $G(s)$  per  $K > 0$ .

Il luogo delle radici ha un solo asintoto che coincide con il semiasse reale negativo. Guardando il luogo delle radici é evidente che il sistema retroazionato é stabile per  $K > 0$ . Tale risultato puó essere ottenuto anche utilizzando il criterio di Routh.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{s(s+1)(s+3)}{(s^2+1)(s+2)(s+2)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + (K+4)s^3 + (4K+5)s^2 + (3K+4)s + 4 = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 4K + 5 & 4 \\ 3 & K + 4 & 3K + 4 & \\ 2 & 18K + 4K^2 + 16 & 12K + 16 & \\ 1 & 56K + 58K^2 + 12K^3 & & \\ 0 & 12K + 16 & & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K + 4 > 0, \quad 18K + 4K^2 + 16 > 0, \quad 56K + 58K^2 + 12K^3 > 0, \quad 12K + 16 > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K > -4, \quad (K < -3.2808) \cup (K > -1.2192), \quad (-3.5 < K < -1.3333) \cup (K > 0), \quad K > -1.3333.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > 0 = K_1.$$

La pulsazione  $\omega_1$  corrispondente al valore limite  $K_1$  è:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{12K_1 + 16}{18K_1 + 4K_1^2 + 16}} = \sqrt{\frac{3K_1 + 4}{K_1 + 4}} = 1.$$

- a.2) Posto  $K = 3$ , tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro  $\alpha > 0$ . Nella graficazione si tenga conto che: a) la posizione dei poli del sistema retroazionato quando  $K = 3$  e  $\alpha = 0$  è:  $p_1 = 0$ ,  $p_2 \simeq -0.83$  e  $p_{3,4} \simeq -3.09 \pm 1.17j$ . Determinare la posizione dei punti di diramazione “solo in modo qualitativo”.

*Soluzione.* Posto  $K = 3$ , l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$1 + \frac{3s(s+1)(s+3)}{(s+2)^2(s^2+\alpha)} = 0 \quad \rightarrow \quad (s+2)^2(s^2+\alpha) + 3s(s+1)(s+3) = 0$$

da cui si ottiene la seguente equazione:

$$1 + \frac{\alpha(s+2)^2}{s^2(s+2)^2 + 3s(s+1)(s+3)} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + \alpha G_2(s) = 0$$

I poli della funzione  $G_2(s)$  sono quelli indicati nel testo dell'esercizio:

$$1 + \frac{\alpha(s+2)^2}{s(s+0.83)[(s+3.09)^2 + 1.17^2]} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro  $\alpha > 0$  è mostrato in Fig. 2.

Il contorno delle radici ha due asintoti. Il centro degli asintoti  $\sigma_a$  è il seguente:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-0.83 - 3.09 - 3.09 + 2 + 2) = -1.5$$

- a.3) Sia data la seguente funzione di trasferimento  $G_3(s)$  che descrive il legame tra la tensione in ingresso  $V(s)$  e la posizione angolare in uscita  $\theta(s)$  di un motore elettrico in corrente continua:

$$G_3(s) = \frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K_e}{s[(R + Ls)(b + Js) + K_e^2]}$$

Posto  $b = 1$ ,  $L = 1$ ,  $K_e = 2$  e  $R = 1$ , mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione  $G_3(s)$  al variare del parametro  $J > 0$ . Calcolare il valore  $J^*$  a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema  $G_3(s)$  alla risposta al gradino.

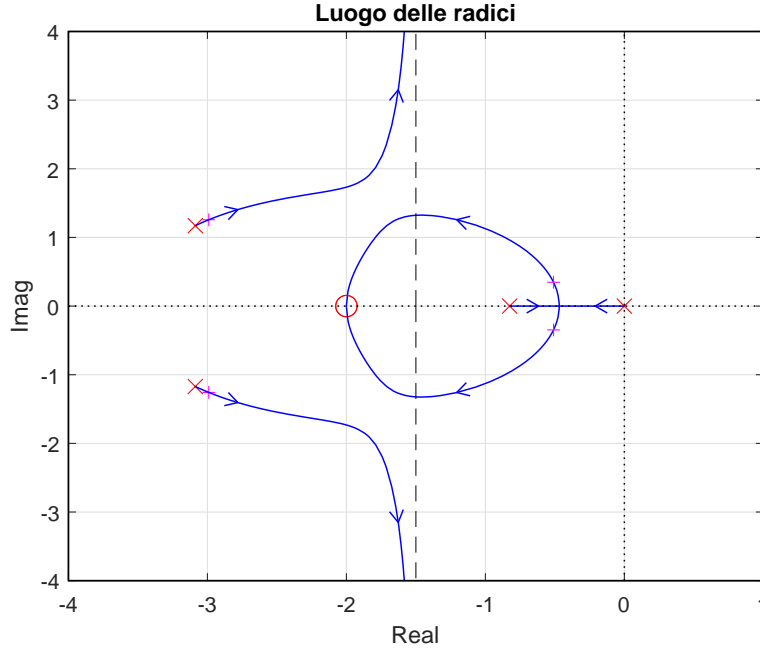


Figura 2: Contorno delle radici del sistema  $G_2(s)$  al variare del parametro  $\alpha > 0$ .

*Soluzione.* I poli della funzione di trasferimento  $G_3(s)$  coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$s[R + Ls](b + Js) + K_e^2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad (R + Ls)(b + Js) + K_e^2 = 0$$

Il polo nell'origine non varia al variare del parametro  $J$ , per cui per il contorno delle radici tale polo può essere trascurato. Posto  $b = 1$ ,  $L = 1$ ,  $K_e = 2$  e  $R = 1$  si ottiene la seguente equazione:

$$(1 + s)(1 + Js) + 4 = 0$$

che, in modo equivalente, può essere riscritta nel seguente modo:

$$s + 5 + Js(s + 1) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + J \frac{s(s + 1)}{s + 5} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + JG_4(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro  $J > 0$  è mostrato in Fig. 3. In questo caso

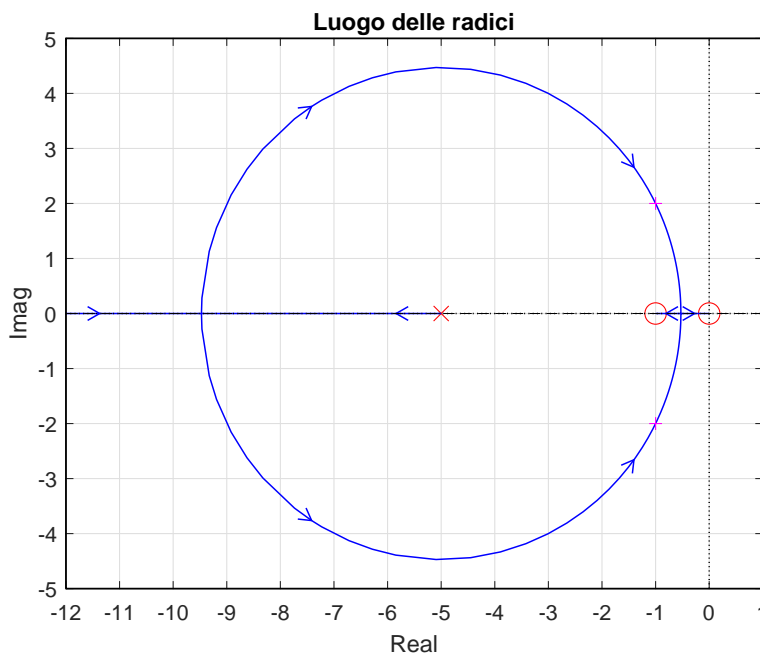


Figura 3: Contorno delle radici del sistema  $G_4(s)$  al variare del parametro  $J > 0$ .

il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in  $p = -5$ . Il raggio  $R$

della circonferenza è:

$$R = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20} \simeq 4.472.$$

Il minimo tempo di assestamento si ha in corrispondenza del punto di diramazione  $\sigma_1$  più lontano dall'asse immaginario. I punti di diramazione  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono:

$$\sigma_1 = -5 - 4.472 = -9.472, \quad \sigma_2 = -5 + 4.472 = -0.5280.$$

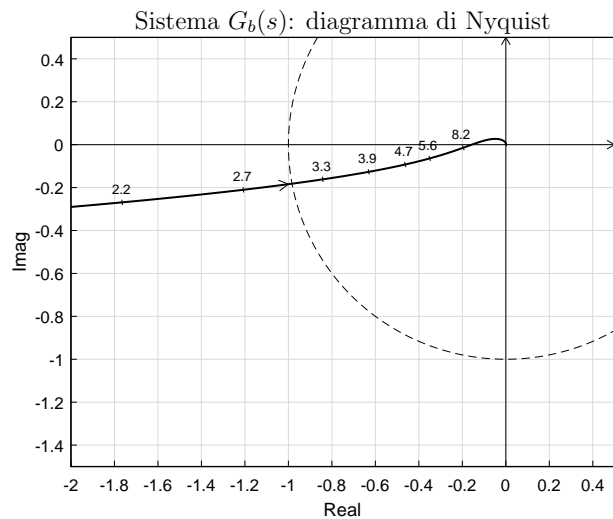
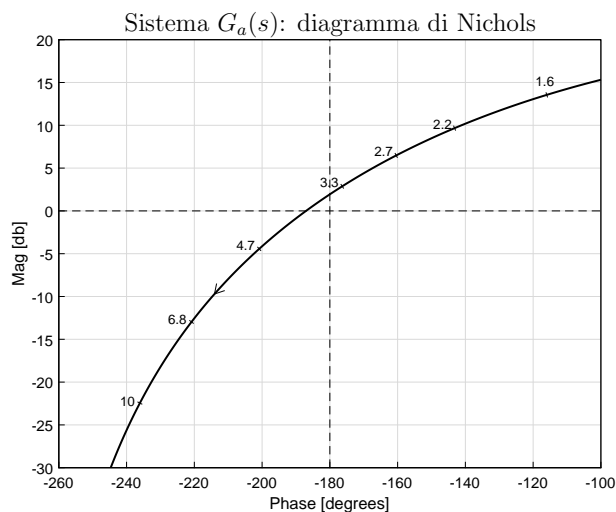
Il punto di diramazione  $\sigma_1$  poteva essere calcolato anche nel seguente modo:

$$\frac{dG_4(s)}{ds} = 0 \rightarrow (2s+1)(s+5) - s(s+1) = s^2 + 10s + 5 = 0 \rightarrow \sigma_1 = -9.472, \quad \sigma_2 = -0.5280.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento del sistema  $G_1(s)$  si ha in corrispondenza del seguente valore del parametro  $J^*$ :

$$J^* = - \left. \frac{1}{G_4(s)} \right|_{s=\sigma_1} = - \left. \frac{s+5}{s(s+1)} \right|_{s=-9.472} = 0.0557.$$

b) Siano date le seguenti due funzioni di risposta armonica dei sistemi  $G_a(s)$  e  $G_b(s)$ :



b.1) Per il sistema  $G_a(s)$  progettare una rete ritardatrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza  $M_\alpha = 5$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno;

Soluzione. La posizione del punto  $B$  è completamente determinata dalla specifica di progetto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = -13.98$  db = 0.2 e  $\varphi_B = -180^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 4. Il punto  $A = G_a(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 2.7$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 2.109, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -160.4^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 0.9361$  e  $\tau_2 = 10.61$  della rete correttiva  $C_1(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.09484, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -19.59^\circ \rightarrow C_1(s) = \frac{(1 + 0.9361 s)}{(1 + 10.61 s)}.$$

Sintesi della rete correttiva  $C_1(s)$  con altri valori della pulsazione  $\omega_A$ :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [ 1.6 \quad 2.2 \quad 2.7 \quad 3.3 ] \\ M_A &= [ 4.761 \quad 3.044 \quad 2.109 \quad 1.392 ] \\ \varphi_A &= [ 244 \quad 216.8 \quad 199.6 \quad 183.7 ] \\ M &= [ 0.042 \quad 0.0657 \quad 0.0948 \quad 0.1436 ] \\ \varphi &= [ -64.02 \quad -36.82 \quad -19.59 \quad -3.655 ] \\ \tau_1 &= [ 0.2754 \quad 0.5573 \quad 0.9361 \quad 4.061 ] \\ \tau_2 &= [ 16.25 \quad 10.94 \quad 10.61 \quad 28.35 ] \end{aligned}$$

Il diagramma di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 4.

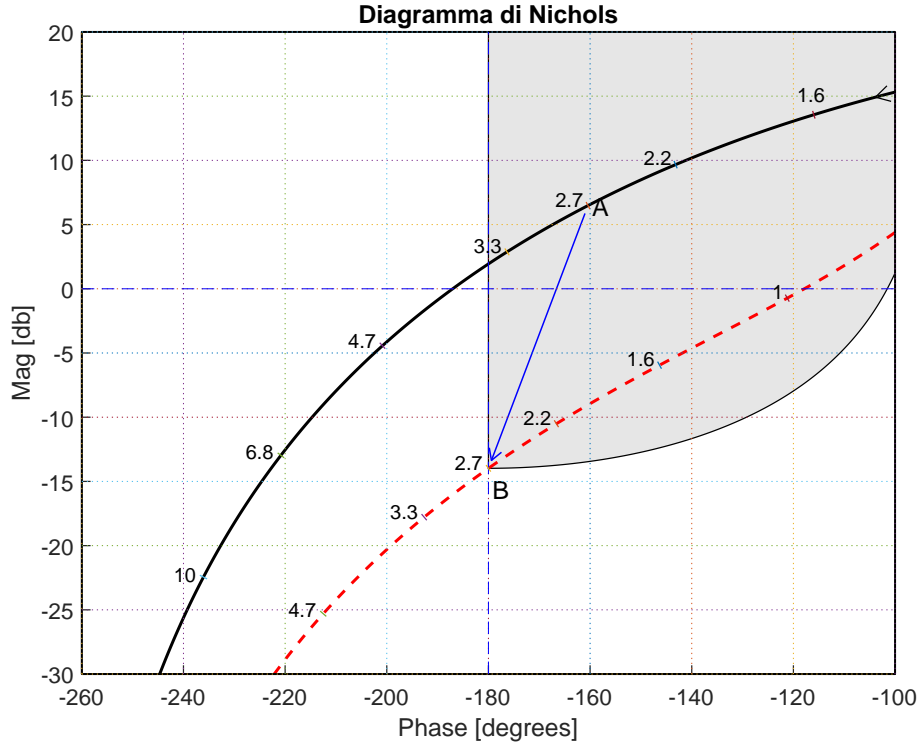


Figura 4: Diagrammi di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$ .

b.2) Per il sistema  $G_b(s)$  progettare una rete correttiva in grado da garantire al sistema compensato un margine di fase  $M_\varphi = 50$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno;

Soluzione. La posizione del punto  $B$  è completamente determinata dalla specifica di progetto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = 0 \text{ db} = 1$  e  $\varphi_B = 230^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto  $A = G_a(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 4.7$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.4718, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 191.3^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 0.4556$  e  $\tau_2 = 0.1049$  della rete correttiva  $C_1(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 2.12, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 38.71^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.4556 s)}{(1 + 0.1049 s)}.$$

Sintesi della rete correttiva  $C_1(s)$  con altri valori della pulsazione  $\omega_A$ :

$$\begin{aligned} \omega_A &= [ 3.9 \quad 4.7 \quad 5.6 \quad 8.2 ] \\ M_A &= [ 0.6434 \quad 0.4718 \quad 0.3559 \quad 0.1961 ] \\ \varphi_A &= [ 191.4 \quad 191.3 \quad 190.4 \quad 184.1 ] \\ M &= [ 1.554 \quad 2.12 \quad 2.81 \quad 5.101 ] \\ \varphi &= [ 38.65 \quad 38.71 \quad 39.64 \quad 45.85 ] \\ \tau_1 &= [ 0.3175 \quad 0.4556 \quad 0.5709 \quad 0.7485 ] \\ \tau_2 &= [ 0.0565 \quad 0.1049 \quad 0.1159 \quad 0.0850 ] \end{aligned}$$

Il diagramma di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 5.

c) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:

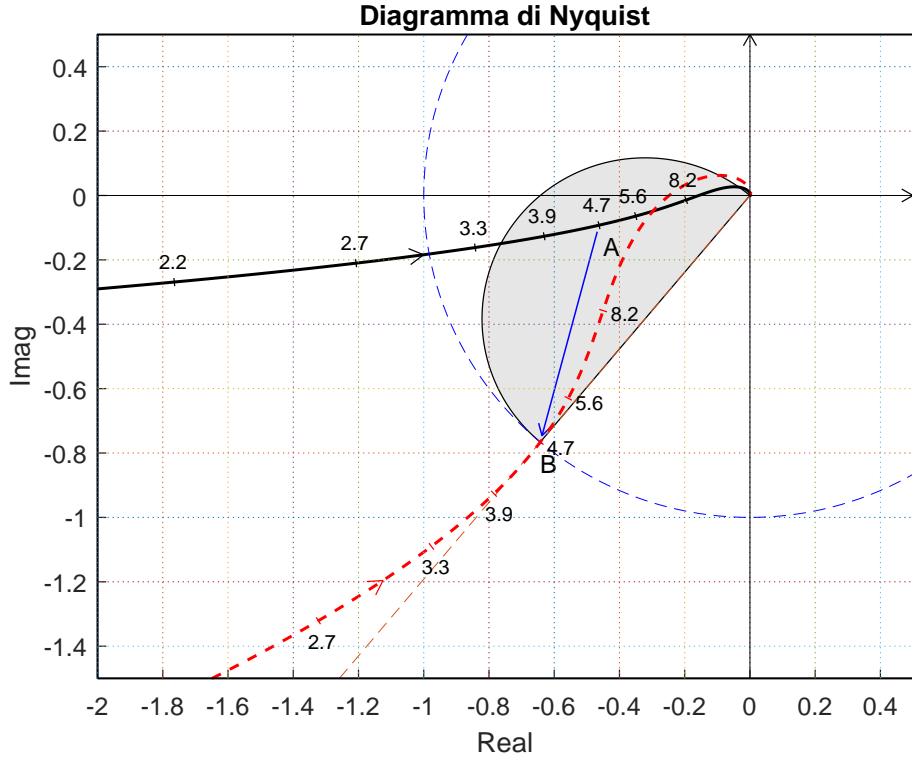
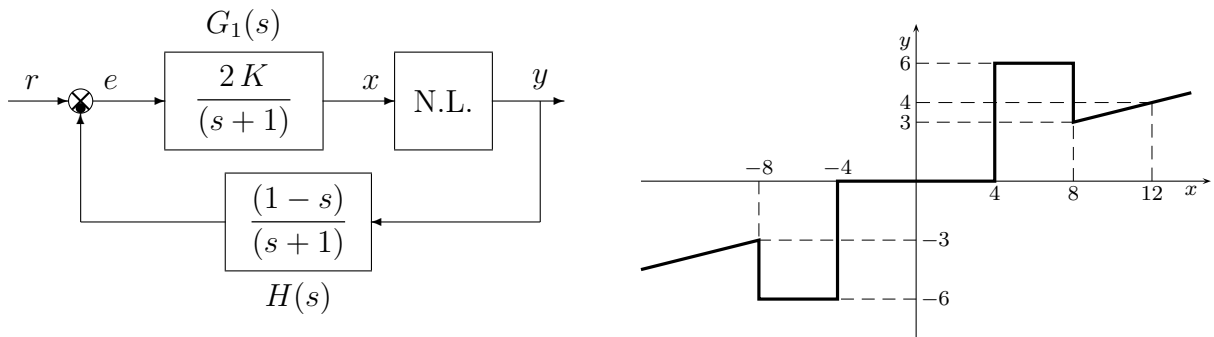


Figura 5: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_b(s)$  e  $C_2(s)G_b(s)$ .



- c.1) Posto  $K = 1$ , determinare per quale valore  $r^*$  dell'ingresso  $r$  il punto di lavoro del sistema retroazionato è posizionato in  $(x_1, y_1) = (2, 0)$ .

*Soluzione.* I guadagni statici delle funzioni  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  e  $H(s)$  sono:  $K_1 = 2$ ,  $K_2 = 1$  e  $K_3 = 1$ . La retta di carico della parte lineare del sistema è:

$$x = K_1(r - K_2 K_3 y) = 2(r - y) \quad \rightarrow \quad r = \frac{x}{2} + y \quad \rightarrow \quad r^* = \frac{2}{2} + 0 = 1.$$

- c.2) Posto  $K = 1$  ed utilizzando il criterio del cerchio, dire se il sistema retroazionato è stabile o meno nell'intorno del punto  $(x_1, y_1) = (2, 0)$ .

*Soluzione.* Le pendenze  $\alpha$  e  $\beta$  delle due rette che centrano nel punto  $(x_1, y_1) = (2, 0)$  racchiudono a settore tutta la non linearità sono le seguenti:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{6}{2} = 3.$$

Il cerchio critico interseca il semiasse reale negativo nei punti:

$$-\frac{1}{\alpha} = -\infty, \quad -\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{3} = -0.333$$

Per  $K = 1$ , il guadagno d'anello del sistema è:

$$G(s) = G_1(s) H(s) = \frac{2(1-s)}{(s+2)^2}$$

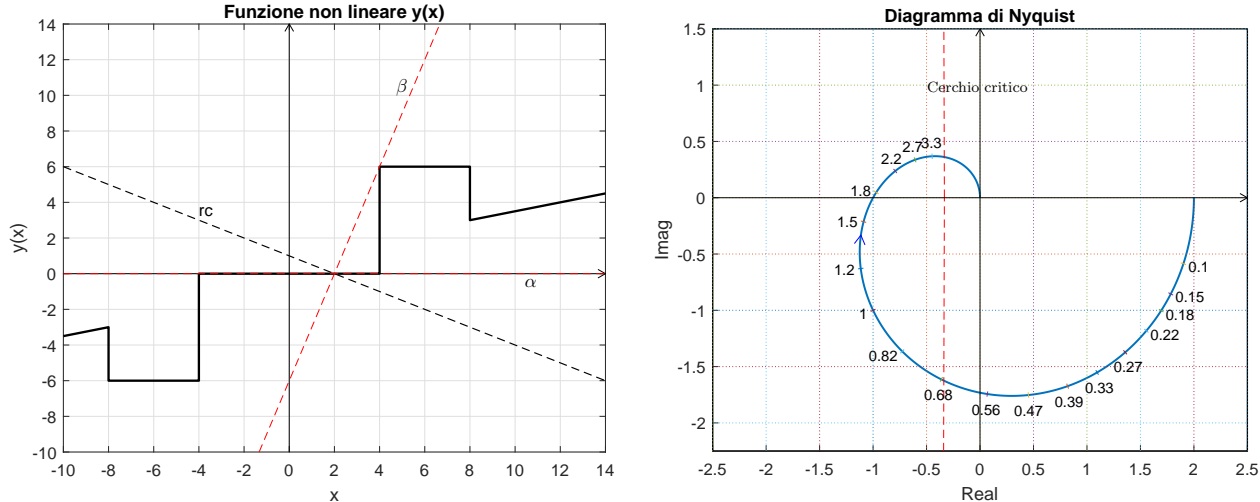


Figura 6: Settore che racchiude la non linearità e cerchio critico.

L'andamento qualitativo del diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  è mostrato in Fig. 6. Il margine di ampiezza  $K^*$  del sistema  $G(s)$  si determina utilizzando il criterio di Routh. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K \frac{-2(s-1)}{(s+1)(s+1)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 + (2.0 - 2K)s + (2K + 1) = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 2K + 1 \\ 1 & 2.0 - 2K & \\ 0 & 2K + 1 & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$2.0 - 2K > 0, \quad 2K + 1 > 0,$$

dai quali si ricava:

$$K < 1, \quad K > -0.5.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$-0.5 < K < 1 = K^*.$$

La pulsazione  $\omega^*$  corrispondente al valore limite  $K^*$  è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{2K^* + 1}{1}} = 1.7321.$$

Il valore di  $K^*$  è minore di  $\beta$

$$K^* = 1 < \beta = 3$$

per cui il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  interseca il cerchio critico e quindi, in base al criterio del cerchio, non si può affermare nulla relativamente alla stabilità del sistema retroazionato nell'intorno del punto di lavoro.

- c.3) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva  $F(X)$  della non linearità  $y(x)$  nell'intorno del punto  $(0, 0)$ . Utilizzare le variabili  $m_1, m_2, \dots$  per rappresentare gli eventuali valori minimi e massimi "non noti" della funzione  $F(X)$ .

*Soluzione.* L'andamento qualitativo della funzione descrittiva  $F(X)$  è mostrato in Fig. 7. Il valore finale a cui tende la funzione  $F(X)$  per  $X \rightarrow \infty$  è  $m_2 = F(X)|_{X \rightarrow \infty} = 0.25$ .

- c.4) Discutere "qualitativamente", in funzione dei parametri  $m_1, m_2, \dots$ , l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno  $K > 0$ .

*Soluzione.* Per  $K = 1$ , il margine di ampiezza  $K_1^*$  del sistema  $G_1(s)$  è  $K_1^* = 1$ . Per  $K \neq 1$ , il margine di ampiezza  $K^*$  del sistema  $K G_1(s)$  è  $K^* = \frac{K_1^*}{K}$ . Al variare di  $K^*$  si possono avere le seguenti condizioni dinamiche per sistema retroazionato:

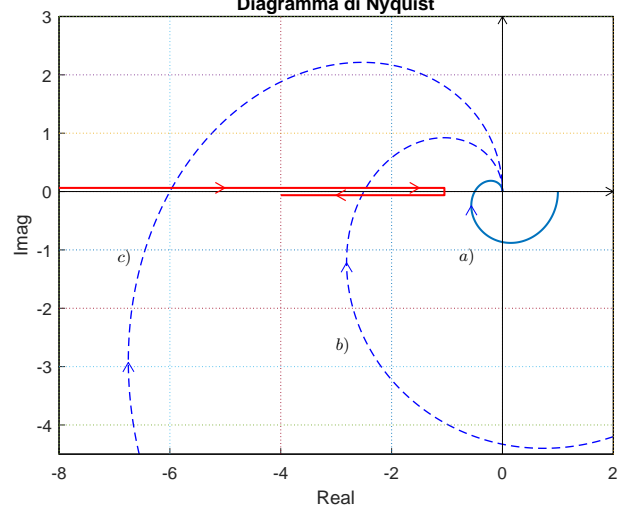
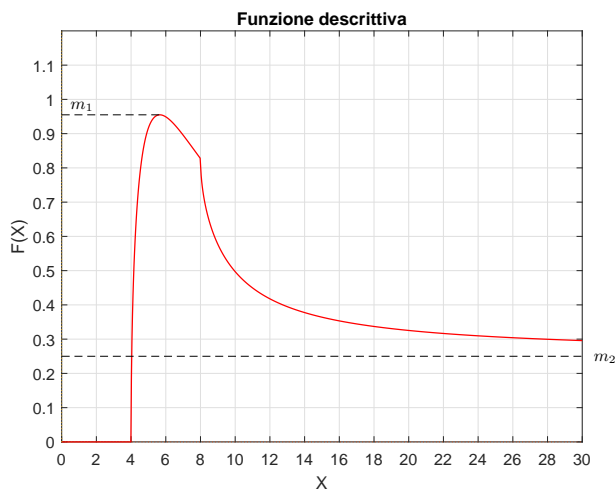
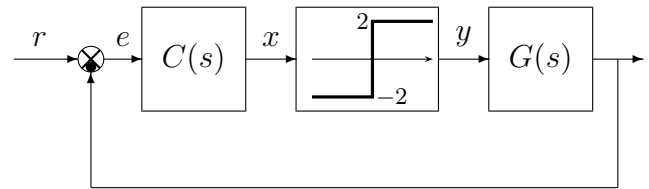


Figura 7: Funzione descrittiva  $F(X)$  e discussione grafica.

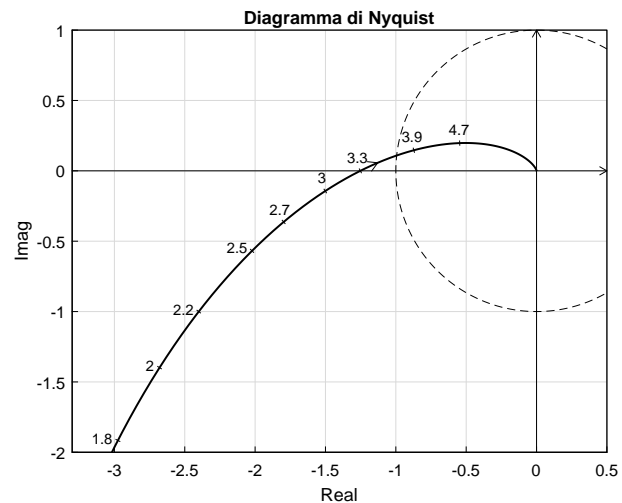
- a) Per  $K^* > m_1$  il diagramma di Nyquist della funzione  $G_1(s)$  non interseca la funzione  $-1/F(X)$ . La funzione  $-1/F(X)$  è tutta esterna al diagramma polare completo per cui il sistema retroazionato è stabile.
- b) Per  $m_2 < K^* < m_1$  il diagramma di Nyquist della funzione  $G_1(s)$  interseca la funzione  $-1/F(X)$  in due punti a cui corrispondono due cicli limite: il primo instabile e il secondo stabile.
- c) Per  $K^* < m_2$ , il diagramma di Nyquist della funzione  $G_1(s)$  interseca la funzione  $-1/F(X)$  in un punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile instabile.

d) Sia dato il sistema retroazionato riportato a fianco, e il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  riportato sotto.



d.1) Posto  $C(s) = 1$ , determinare l'ampiezza  $X^*$  e la pulsazione  $\omega^*$  dell'oscillazione autosostenuta che è presente all'interno del sistema quando  $r = 0$ .

d.2) Progettare una rete correttiva  $C(s)$ , in modo che l'oscillazione autosostenuta presente all'interno del sistema quando  $r = 0$  sia caratterizzata da un'ampiezza  $X^* = 5$  e da una pulsazione  $\omega^* = 2$ .



*Soluzione.*

d.1) La funzione descrittiva del relè ideale è:

$$F(X) = \frac{8}{\pi X}$$

L'intersezione della funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$  con il semiasse reale negativo avviene nel punto  $-1.25$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 3.3$ . Il margine di ampiezza del sistema è quindi  $K^* = \frac{1}{1.25} = 0.8$ . L'ampiezza  $X^*$  dell'oscillazione autosostenuta si ricava imponendo

$$F(X^*) = K^*:$$

$$\frac{8}{\pi X^*} = 0.8 \quad \rightarrow \quad X^* = \frac{8}{0.8\pi} = 3.183$$

d.2) Per poter avere un'oscillazione autosostenuta con ampiezza  $X^* = 5$ , il margine di ampiezza  $K^*$  del sistema compensato dovrà essere uguale a  $F(X^*)$ :

$$K^* = \frac{8}{\pi X^*} = \frac{8}{\pi 5} = 0.5093 \quad \rightarrow \quad B = -\frac{1}{K^*} = -1.964$$

*Soluzione.* La posizione del punto  $B$  è completamente determinata dalla specifica di progetto

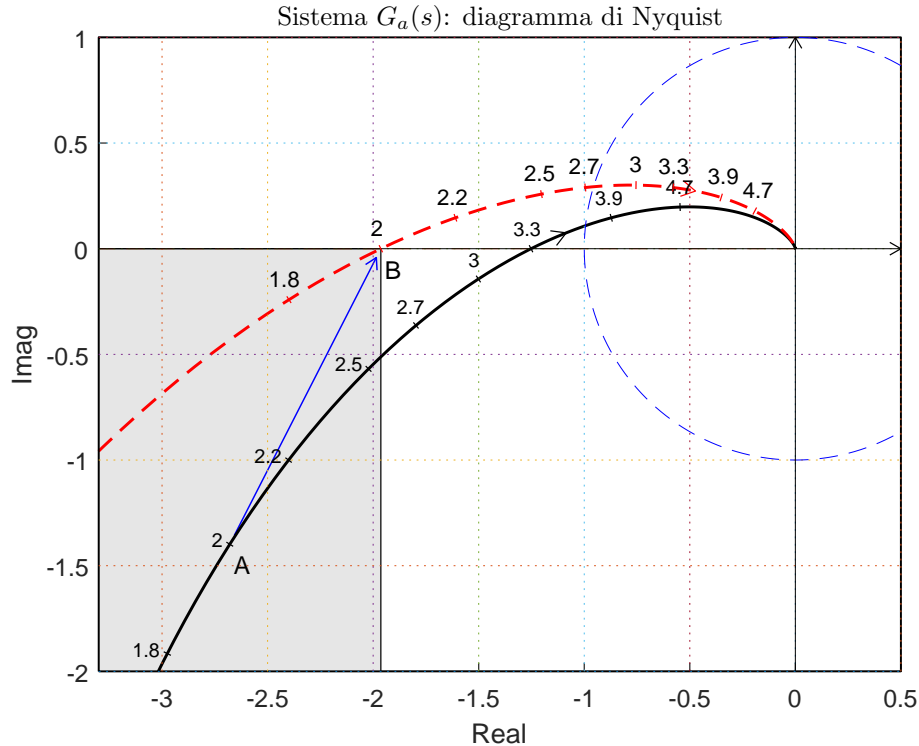


Figura 8: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G(s)$  e  $C(s)G(s)$ .

$B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = 5.861 \text{ db} = 1.964$  e  $\varphi_B = 180^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 8. Il punto  $A = G_a(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 2$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 3.022, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 207.6^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 0.2559$  e  $\tau_2 = 0.7052$  della rete correttiva  $C_1(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.6497, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -27.56^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 0.2559s)}{(1 + 0.7052s)}.$$

Sintesi della rete correttiva  $C_1(s)$  con altri valori della pulsazione  $\omega_A$ : Il diagramma di Nichols delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 8.

e) Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri, discretizzare il seguente regolatore PI:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+1)}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento  $T = 0.2$  e si imponga l'uguaglianza dei guadagni alle alte frequenze.

*Soluzione.* Utilizzando il metodo della corrispondenza poli-zeri si ottiene:

$$D(z) = K \frac{(1 - e^{-T} z^{-1})}{(1 - z^{-1})} = K \frac{(1 - 0.8187z^{-1})}{(1 - z^{-1})}$$

Il valore di  $K$  si determina imponendo l'uguaglianza dei guadagni alle alte frequenze:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} D(s) = \lim_{z \rightarrow -1} D(z) \quad \rightarrow \quad 1 = K \cdot 0.9094 \quad \rightarrow \quad K = 1.1$$

Sostituendo in  $D(z)$  si ottiene:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.1 - 0.9 z^{-1}}{1 - 1 z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m_k = 1 m_{k-1} - 1.1 e_{k-0} + 0.9 e_{k-1}$$

f) Partendo da condizioni iniziali nulle, calcolare la risposta  $y(n)$  della seguente equazione alle differenze

$$y(n+2) = 1.5 y(n+1) - 0.5 y(n) + 2 x(n+1)$$

quando in ingresso è presente l'impulso di ampiezza unitaria:  $\delta(n) = 1$ .

*Soluzione.* L'equazione alle differenze genera la seguente funzione discreta  $G(z)$ :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{2z}{(z-1)(z-0.5)}$$

La  $\mathcal{Z}$ -trasformata del segnale di ingresso  $x(n) = \delta(n)$  è:

$$X(z) = 1.$$

La  $\mathcal{Z}$ -trasformata  $Y(z)$  del segnale di uscita coincide quindi con la funzione  $G(z)$ :

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-0.5)}$$

Mediante il metodo della scomposizione in fratti semplici si ricava:

$$Y(z) = z \left[ \frac{2}{(z-1)(z-0.5)} \right] = z \left[ \frac{4}{(z-1)} - \frac{4}{(z-0.5)} \right]$$

e quindi:

$$Y(z) = 4 \left[ \frac{z}{(z-1)} - \frac{z}{(z-0.5)} \right] \quad \rightarrow \quad y(n) = 4[1 - 0.5^n].$$

**Controlli Automatici B**  
**7 Giugno 2023 - Domande Teoriche**

|          |  |
|----------|--|
| Nome:    |  |
| Nr. Mat. |  |
| Firma:   |  |

Rispondere alle domande e ai test che seguono. Per ciascuno dei test segnare con una crocetta le affermazioni che si ritengono corrette.

1. Calcolare la funzione di trasferimento  $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$  corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y(k+1) + 2y(k) + 4y(k-1) = 5x(k) + 3x(k-1) \quad \rightarrow \quad G(z) = \frac{5 + 3z^{-1}}{z + 2 + 4z^{-1}} = \frac{5z + 3}{z^2 + 2z + 4}$$

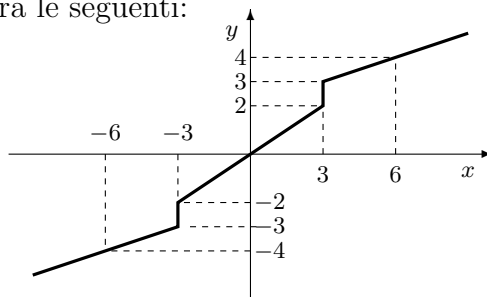
2. Il sistema dinamico discreto  $G(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$ :

è asintoticamente stabile     è semplicemente stabile     è instabile

3. Il valore finale  $y(\infty)$  della successione  $y(k)$  corrispondente alla seguente funzione di trasferimento discreta  $Y(z) = \frac{z(z-0.2)}{(z-1)(z-0.6)}$  è:

$y(\infty) = 1$       $y(\infty) = 0$       $y(\infty) = \infty$       $y(\infty) = 2$

4. Data la seguente caratteristica non lineare simmetrica rispetto all'origine, selezionare le affermazioni corrette fra le seguenti:



- per  $X \rightarrow \infty, F(X) \rightarrow \frac{1}{3}$ ;      $F(X)$  assume anche valori non finiti;  
 per  $X \rightarrow 0, F(X) = \frac{1}{3}$ ;      $F(X)$  ha un massimo dopo  $X = 3$ ;

5. Per la categoria di sistemi non lineari visti a lezione, il metodo della funzione descrittiva:

- è un metodo approssimato;     è applicabile solo se l'ingresso  $r$  è costante;  
 permette di valutare la stabilità del sistema indipendentemente dal punto di lavoro;     richiede che la non linearità sia simmetrica rispetto all'origine;

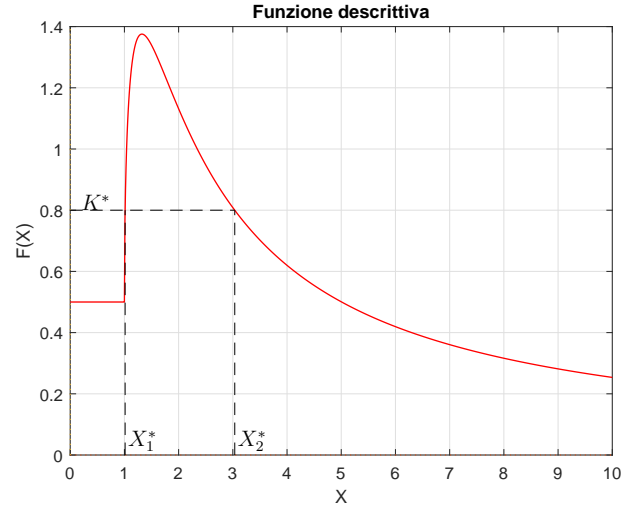
6. Per la categoria di sistemi non lineari visti a lezione, la retta di carico:

- descrive la parte lineare del sistema in condizioni stazionarie;     coincide con l'asse delle ascisse  $y = 0$  se  $K_1 = \infty$ ;  
 è indipendente dall'ingresso del sistema;     ha sempre una pendenza negativa;

7. Fornire l'enunciato del Teorema del baricentro: *La somma dei poli del sistema ottenuto chiudendo in retroazione un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento  $G(s)$  razionale fratta con ...*

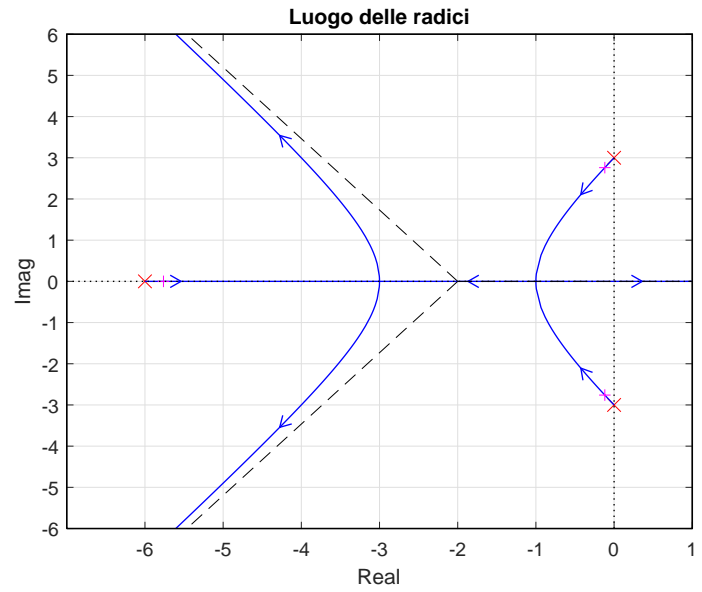
*polinomio a denominatore di grado superiore di almeno due a quello del polinomio a numeratore è indipendente dal valore del guadagno statico di anello e dalle posizioni degli zeri ed è uguale alla somma dei poli del sistema ad anello aperto.*

8. Quella riportata a fianco è la funzione descrittiva  $F(X)$  di una non linearità posta in retroazione su di un sistema lineare  $G(s)$  il cui diagramma di Nyquist interseca l'asse reale negativo nel punto  $\sigma_0 = -1.25$ . Fornire una stima dell'ampiezza  $X^*$  di ciascun ciclo limite (stabile e instabile) eventualmente presente all'interno del sistema retroazionato:



$X_1^* = 1.01$       Stabile?  si,  no  
 $X_2^* = 3.04$       Stabile?  si,  no

9. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema  $G(s) = \frac{-10}{(s+6)(s^2+9)}$  al variare del parametro  $K > 0$ . Calcolare:



4.1) L'ascissa  $\sigma_0$  corrispondente alla condizione di minimo tempo di assestamento:

$$\sigma_0 = -1$$

4.2) Il valore  $K_0$  corrispondente alla condizione di minimo tempo di assestamento:

$$K_0 = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=-1} = 5$$

4.3) Per quali valori di  $K$  il sistema retroazionato è stabile:

$$0 < K < K^* = -\frac{1}{G(s)} \Big|_{s=0} = 5.4$$

10. Nel tracciamento del luogo delle radici, i punti di diramazione sull'asse reale:

- corrispondono a radici multiple dell'equazione caratteristica;       localmente dividono il piano in parti uguali;
- possono corrispondere alla condizione di minimo tempo di assestamento;       corrispondono sempre alla condizione di minimo tempo di assestamento;

11. Con riferimento all'equazione caratteristica  $1 + KG(s) = 0$  di un sistema retroazionato, con  $G(s)$  in forma fattorizzata poli-zeri, si scelgano le affermazioni corrette fra le seguenti:

- le parti dell'asse reale appartenenti al luogo delle radici dipendono dal grado relativo  $r$  di  $G(s)$ ;       il verso di percorrenza degli asintoti dipende dal segno del grado relativo  $r$  di  $G(s)$ ;
- tutti i punti dell'asse reale appartengono al luogo delle radici per un qualche valore di  $K$  positivo o negativo;       le parti dell'asse reale appartenenti al luogo delle radici dipendono dal segno di  $K$ ;

12. Calcolare la soluzione  $y(n)$  della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale  $y(0) = 2$ :

$$y(n+1) = -0.3y(n) \quad \rightarrow \quad y(n) = 2(-0.3)^n$$