

Controlli Automatici - Prima parte
11 Aprile 2022 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risolvano i seguenti esercizi.

a.1) Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$x_1(t) = 3t^2 e^{-4t} - 5e^{-3t} \sin(2t), \quad x_2(t) = 5\delta(t-2) + 4e^t \cos(3t)$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6}{(s+4)^3} - \frac{10}{(s+3)^2 + 4}, \quad X_2(s) = 5e^{-2s} + \frac{4(s-1)}{(s-1)^2 + 3^2}$$

a.2) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{18}{s(s+3)^2}, \quad G_2(s) = \frac{5(s+3)e^{-2s}}{(s+3)^2 + 49}$$

Soluzione:

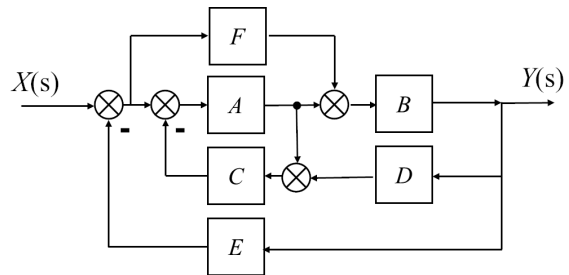
$$g_1(t) = 2 - 2e^{-3t} - 6te^{-3t}, \quad g_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 5e^{-3(t-2)} \cos(7(t-2)) & t \geq 2 \end{cases}$$

Infatti, per la funzione $G_1(s)$ si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}[G_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{18}{s(s+3)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{2}{s+3} - \frac{6}{(s+3)^2}\right] = 2 - 2e^{-3t} - 6te^{-3t}$$

b) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G(s) = \frac{AB + FB(1+AC)}{1 + AC + ABCD + ABE + FBE + ACFBE}$$

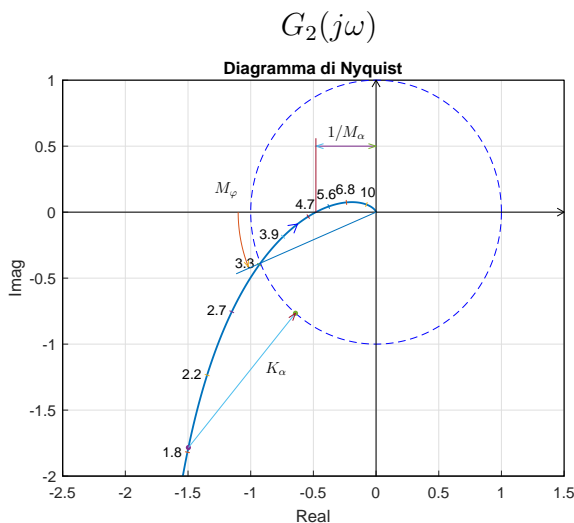
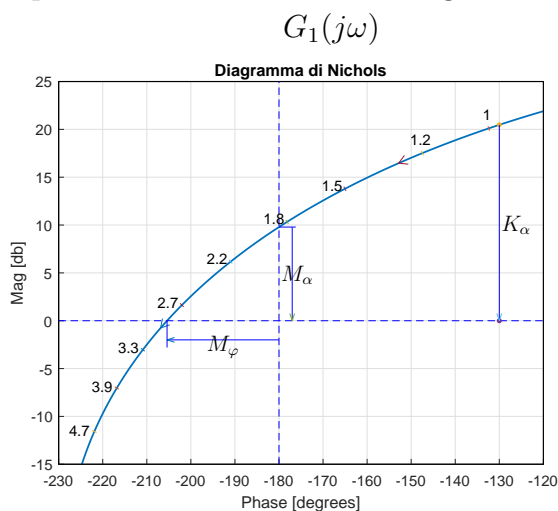


c) I diagrammi riportati sotto sono relativi a due sistemi a fase minima $G_1(s)$ e $G_2(s)$.

Per ciascuno dei due sistemi e nei limiti della precisione consentita dai grafici, calcolare:

- c.1) il margine di ampiezza M_a del sistema;
- c.2) il margine di fase M_φ del sistema;
- c.3) il guadagno K_φ per cui il sistema $K_\varphi G(s)$ ha un margine di fase $M_\varphi = 50$;
- c.4) la risposta a regime $y_r(t)$ del sistema $G(s)$ ad un ingresso sinusoidale $x(t) = 3 \sin(2.7t)$;

I parametri richiesti hanno il seguente valore:



c.1) $M_a = -9.79 \text{ db} = 0.32$

c.1) $M_a = 2.08$

c.2) $M_\varphi = -25.4$

c.2) $M_\varphi = 22.7$

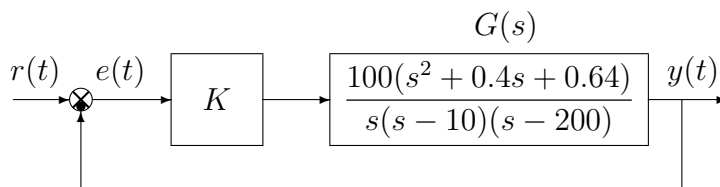
c.3) $K_\varphi = -20.47 \text{ db} = 0.095$

c.3) $K_\varphi = 0.429$

c.4) $y_r(t) = \begin{cases} 3 \cdot 1.21 \sin(2.7t - 202^\circ) \\ 3.63 \sin(2.7t - 202^\circ) \end{cases}$

c.4) $y_r(t) = \begin{cases} 3 \cdot 1.38 \sin(2.7t - 147^\circ) \\ 4.14 \sin(2.7t + 213^\circ) \end{cases}$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{100K(s^2 + 0.4s + 0.64)}{s(s - 10)(s - 200)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + (100K - 210)s^2 + (40K + 2000)s + 64K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & & 1 & (40K + 2000) \\ 2 & & (100K - 210) & 64K \\ 1 & & (40K + 2000)(100K - 210) - 64K & \\ 0 & & 64K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 2.1, \quad 4000 K^2 + 191736 K - 420000 > 0, \quad K > 0.$$

La seconda disequazione è soddisfatta per i valori di K esterni ai due valori limite K_1 e K_2 :

$$K < K_1 = -50.03 \quad \cup \quad K > K_2 = 2.098$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > K^* = 2.1$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è, in modo approssimato:

$$\omega^* \simeq \sqrt{40K^* + 2000} = \sqrt{2084} = 45.65.$$

d.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi “asintotici” di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1.

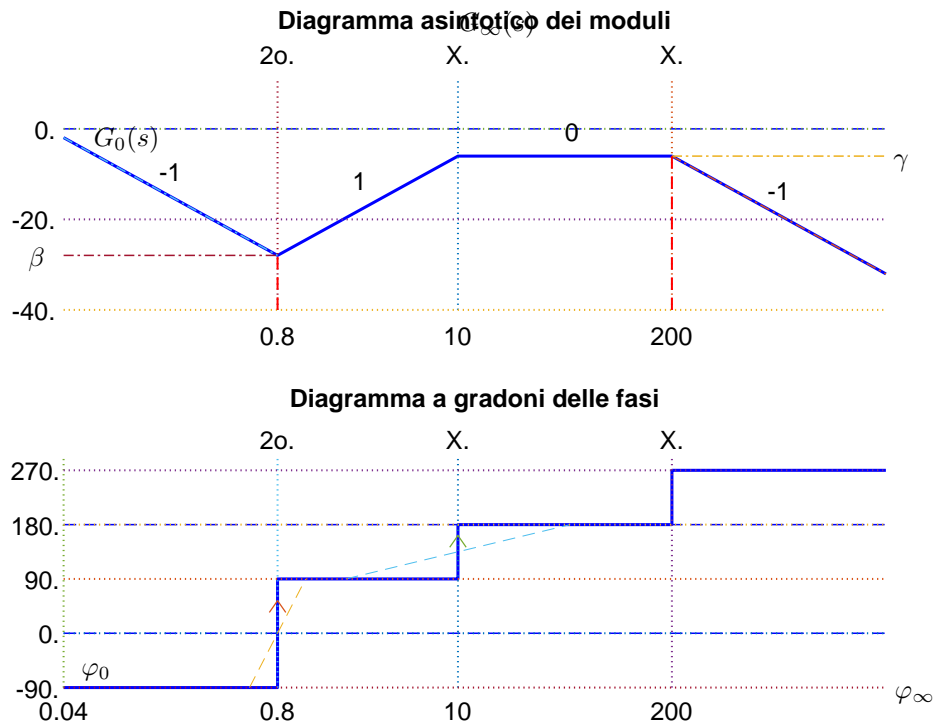


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{64}{2000s} = \frac{0.032}{s} = \frac{K}{s}, \quad G_\infty(s) = \frac{100}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 0.8$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 200$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=0.8} = \frac{0.032}{0.8} = 0.04 = -27.96 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=200} = \frac{100}{200} = 0.5 = -6 \text{ db}.$$

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l’asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* .

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 3.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = \frac{0.4}{0.64} + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} = 0.73 > 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto:

$$\sigma_a = K\Delta\tau = 0.032 \cdot 0.73 = 0.0234.$$

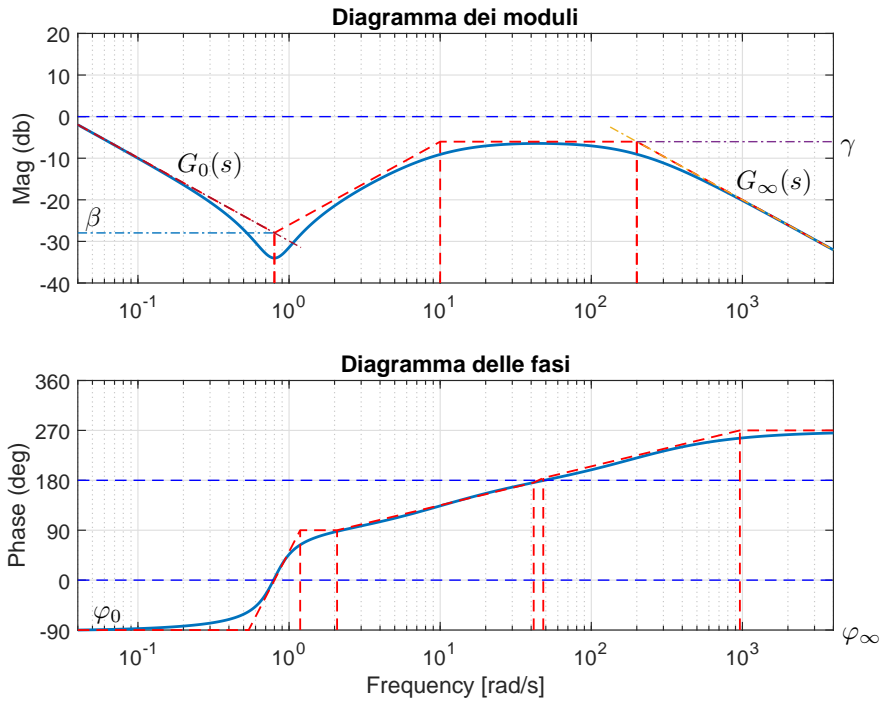


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

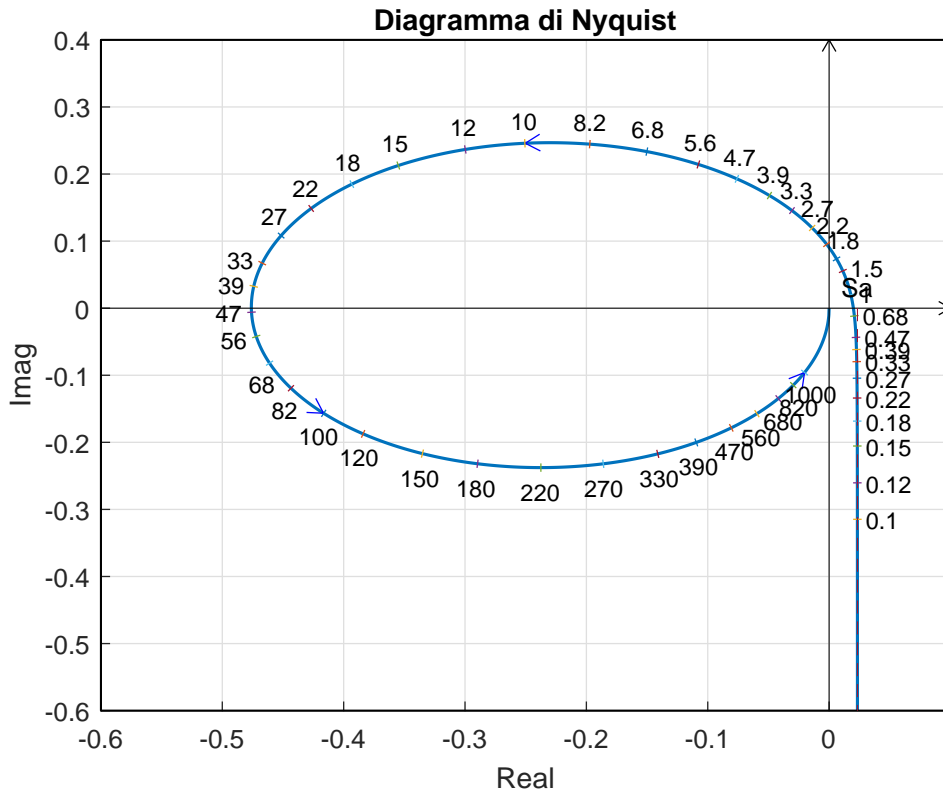


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di 2π in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = \frac{3\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow \infty$ il diagramma arriva in ritardo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ in quanto la somma Δ_p delle pulsazioni critiche del sistema è negativa:

$$\Delta_p = -0.4 - 10 - 200 = -210.4 < 0.$$

L'intersezione con il semiasse reale positivo avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{2.1} = 0.476$$

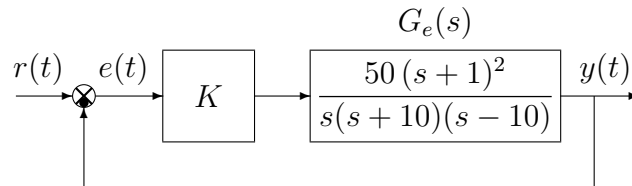
in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 45.65$.

d.4) Calcolare il valore di K necessario per avere un errore a regime $|e_v| = 0.01$ per ingresso a rampa $x(t) = 3t$.

Soluzione. L'errore a regime e_p del sistema retroazionato per ingresso a rampa $x(t) = 3t$ è:

$$e_v = \frac{R_0}{K_v} = \frac{3}{0.032 K} = 0.01 \quad \rightarrow \quad K = \frac{300}{0.032} = 9375.$$

e) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



e.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{50 K (s+1)^2}{s(s+10)(s-10)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 50Ks^2 + 100(K-1)s + 50K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 100(K-1) & \\ 2 & 50K & 50K & \\ 1 & 5000K(K-1) - 50K & & \\ 0 & 50K & & \end{array}$$

Il sistema retroazionato è stabile quando tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno:

$$K > K^* = \frac{5050}{5000} = 1.01$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è :

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{50K^*}{50K^*}} = 1$$

e.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$.

Soluzione.

I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 4.

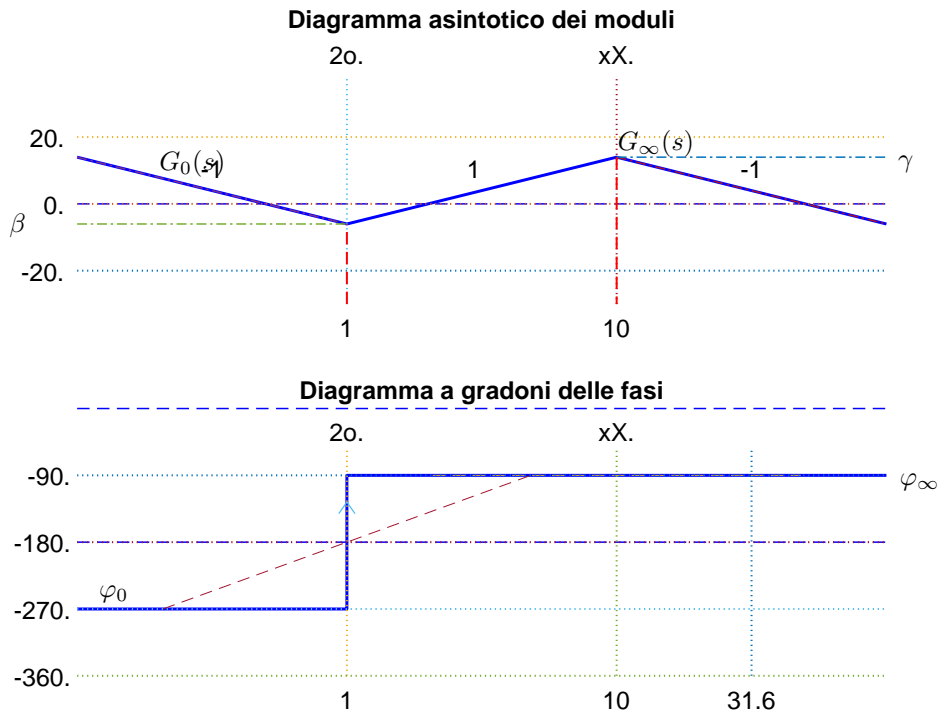


Figura 4: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

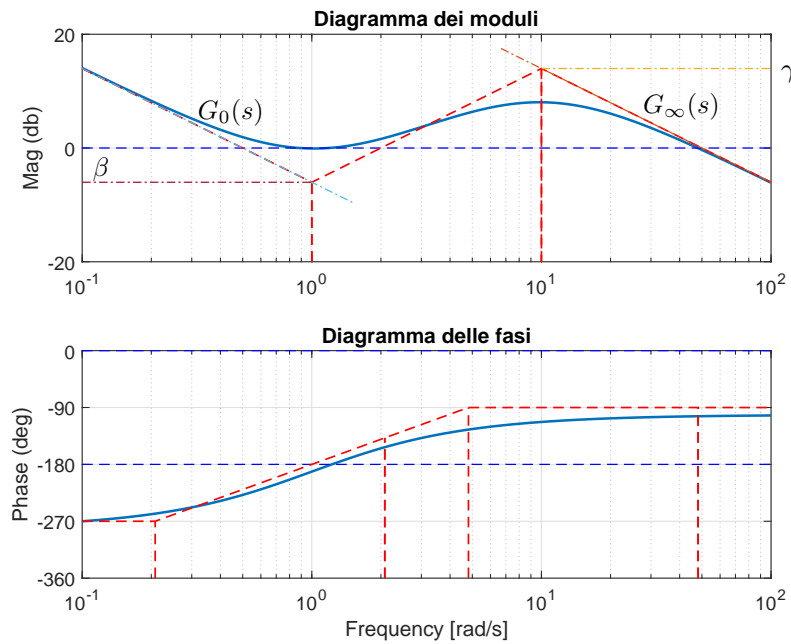


Figura 5: Diagrammi di Bode della funzione $G_e(s)$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G_e(s)$ sono mostrati in Fig. 5. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \rightarrow 0$ ed $\omega \rightarrow \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{K}{s} = -\frac{0.5}{s}, \quad G_\infty(s) = \frac{50}{s}$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}, \quad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = 1$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=1} = 0.5 = -6 \text{ db}, \quad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=10} = 5 = 14 \text{ db}.$$

e.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” della funzione $G_e(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ è mostrato in Fig. 6. La fase iniziale

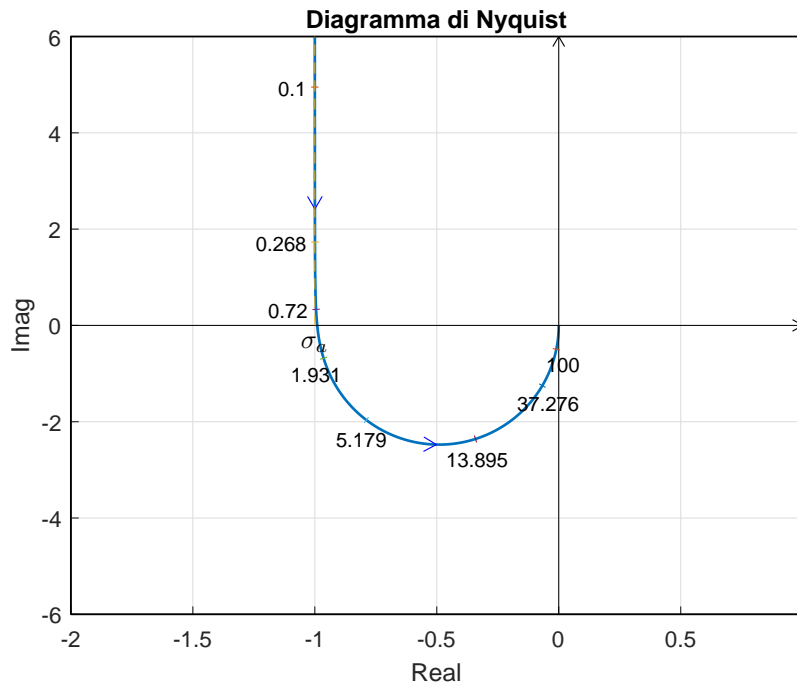


Figura 6: Diagramma di Nyquist della funzione $G_e(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \rightarrow 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto alla fase iniziale:

$$\Delta\tau = 2 - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 2 > 0.$$

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale.

$$\sigma_a = \Delta_\tau K = -1$$

La variazione di fase

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di π in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$. Esiste una sola intersezione σ^* con l'asse reale:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{1.01} = -0.99$$

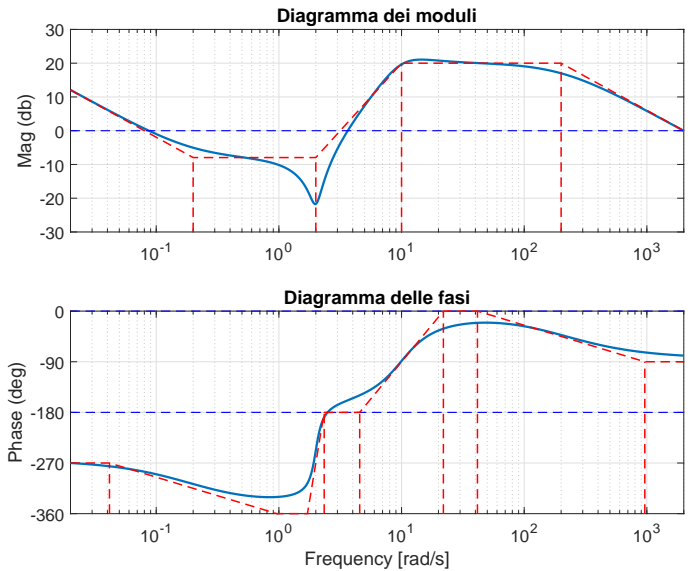
in corrispondenza della pulsazione $\omega^* = 1$.

f) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.

Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{2000(s - 0.2)(s^2 + 0.4s + 4)}{s(s^2 - 10s + 10^2)(s + 200)}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ .



Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{2000(s - 0.2)(s^2 + 0.4s + 4)}{s(s^2 - 10s + 10^2)(s + 200)}.$$

Il valore $K = 2000$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 200$:

$$|G_\infty(s)|_{s=200j} = \left| \frac{K}{s} \right|_{s=200j} = \frac{K}{200} = \gamma \simeq 20 \text{ db} \simeq 10 \quad \rightarrow \quad K \simeq 2000.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} \simeq \frac{1}{10} = 0.1.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 14 \text{ db} \simeq 5$ si legge dal diagramma di Bode dei moduli. Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati instabili è $\delta = 0.5$:

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec. Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Siano $Y(s)$, $X_1(s)$ e $X_2(s)$ le trasformate di Laplace dei segnali temporali $y(t)$, $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Scrivere, la trasformata di Laplace $Y(s)$, in funzione delle trasformate di Laplace $X_1(s)$ e $X_2(s)$, corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + \alpha y(t) + 5y(t) = 3x_1(t) + \dot{x}_2(t) + 4x_2(t) \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{3X_1(s) + (s+4)X_2(s)}{s^3 + 3s^2 + \alpha s + 5}$$

Applicando il criterio di Routh, dire per quali valori del parametro α la funzione $Y(s)$ è stabile:

$$\alpha > \frac{5}{3} = 1.666$$

Infatti, applicando il criterio di Routh al denominatore della funzione $Y(s)$

$$s^3 + 3s^2 + \alpha s + 5 = 0$$

si ottiene la seguente tabella di Routh:

3	1	α	\rightarrow	
2	3	5	\rightarrow	
1	$3\alpha - 5$		\rightarrow	$\alpha > \frac{5}{3} = 1.666$
0	5		\rightarrow	

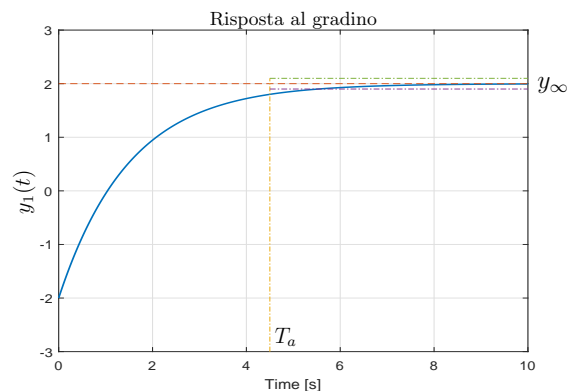
La funzione $Y(s)$ è stabile per $\alpha > 1.666$.

2. Utilizzando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{4 - 6s}{2 + 3s}$$

Calcolare il valore iniziale y_0 , il valore finale y_∞ e il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$:

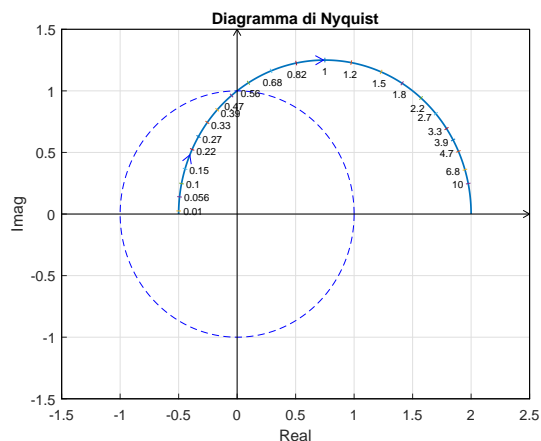
$$y_0 = -2, \quad y_\infty \simeq 2, \quad T_a \simeq 4.5s.$$



3. Sia dato il diagramma di Nyquist (vedi figura) della seguente funzione $G(s) = \frac{4s-1}{2(s+1)}$.

Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $KG(s)$ è stabile per i seguenti valori di K :

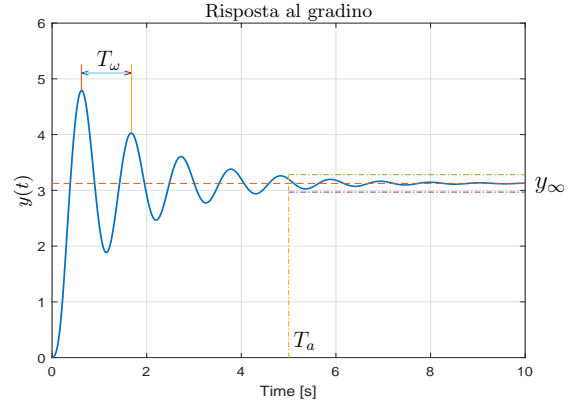
- $-2 < K < \frac{1}{2}$;
- $-\frac{1}{2} < K < 2$;
- $(K < -2) \cup (K > \frac{1}{2})$;
- $(K < -\frac{1}{2}) \cup (K > 2)$;



Calcolare inoltre:

- il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \rightarrow \infty$;
- il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
- il periodo T_w dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 3.125, \quad T_a \simeq 5 \text{ s}, \quad T_w \simeq \frac{2\pi}{6} = 1.05 \text{ s}.$$



10. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(3s - 2)(1 + 4s)}{s^2(3 + s)^2} e^{-2t_0s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{4 + 9\omega^2}\sqrt{1 + 16\omega^2}}{\omega^2(9 + \omega^2)} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan \frac{3\omega}{2} + \arctan 4\omega - \pi - 2 \arctan \frac{\omega}{3} - 2t_0\omega \end{cases}$$