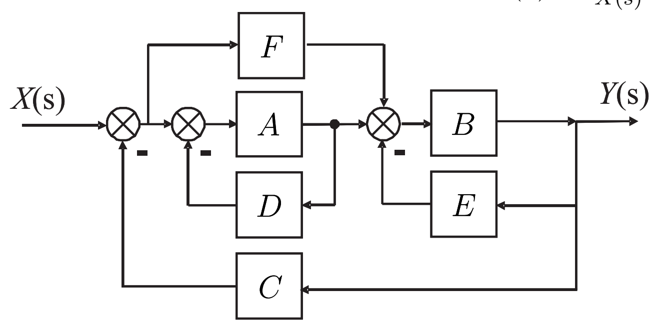
Automatic Controls
21 Dicembre 2018 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

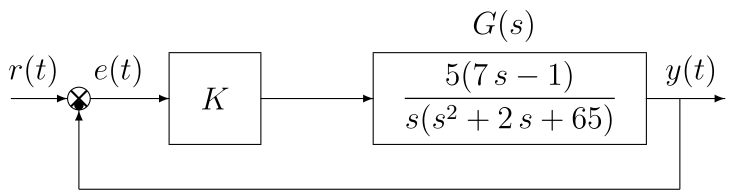
Si risolvano i seguenti esercizi.

a) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G_1(s) = \frac{AB+FB(1+AD)}{1+AD+BE+ABC+FBC+ADBE+ADFBC}$$



b) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



b.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
Soluzione.
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + \frac{5\,K\,(7s-1)}{s(s^2+2s+65)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 2s^2 + (65+35\,K)s - 5\,K = 0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccl} 3 & 1 & 65+35\,K & \rightarrow \;\; 1>0 \\ 2 & 2 & -5\,K & \rightarrow \;\; 2>0 \\ 1 & (130+70\,K)+5\,K & & \rightarrow \;\; K > K > -\frac{130}{75} \\ 0 & -5\,K & & \rightarrow \;\; K<0 \end{array}$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K^* = -1.733 = -\frac{130}{75} < K < 0.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{-5\,K^*}{2}} = \sqrt{\frac{13}{3}}.$$

Si ha $K^* = -1.733$ e $\omega^* = 2.08$.

b.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.
Soluzione. I diagrammi "asintotici" di Bode della funzione $G_d(s)$ sono mostrati in Fig. 1.
Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = -\frac{1}{13s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{35}{s^2}.$$

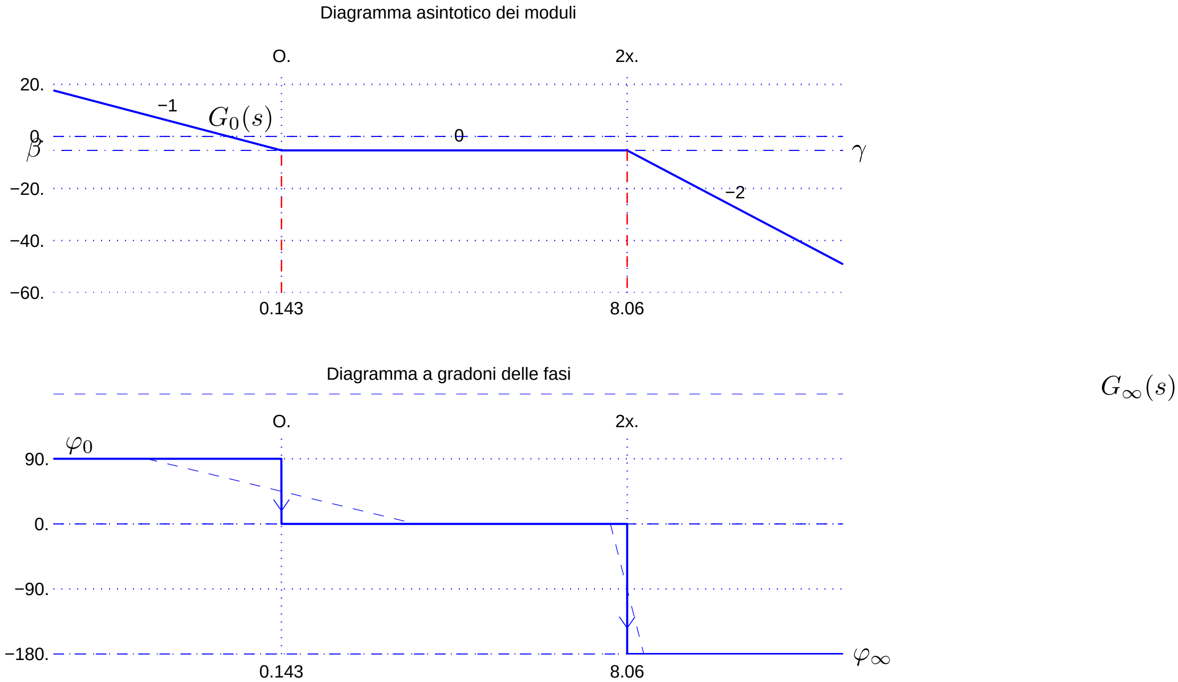


Figura 1: Diagrammi asintotici di Bode della funzione $G_d(s)$.

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze il guadagno β alla pulsazione $\omega = \frac{1}{7}$ e il guadagno γ alla pulsazione $\omega = 8$ sono:

$$\beta = |G_0(s)|_{s=\frac{1}{7}} = \frac{7}{13} = -5.37 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = |G_\infty(s)|_{s=8} = \frac{35}{65} = -5.37 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli instabili è $\delta = 2/(2\omega_n) = 2/16 = 0.125$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 2.

b.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 4.

La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{3\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in ritardo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è negativa:

$$\Delta\tau = -7 - \frac{2}{65} = -7.03 > 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = \frac{-1}{13} \cdot (-7.03) = 0.541.$$

La variazione di fase che il sistema subisce per $\omega \in]0, \infty[$ è:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2}$$

Ne segue che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $\frac{3\pi}{2}$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -\pi$. Per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -\pi$ in quanto la somma Δ_p delle pulsazioni critiche del sistema è positiva:

$$\Delta_p = \frac{1}{7} + 2 = 2.14 > 0.$$

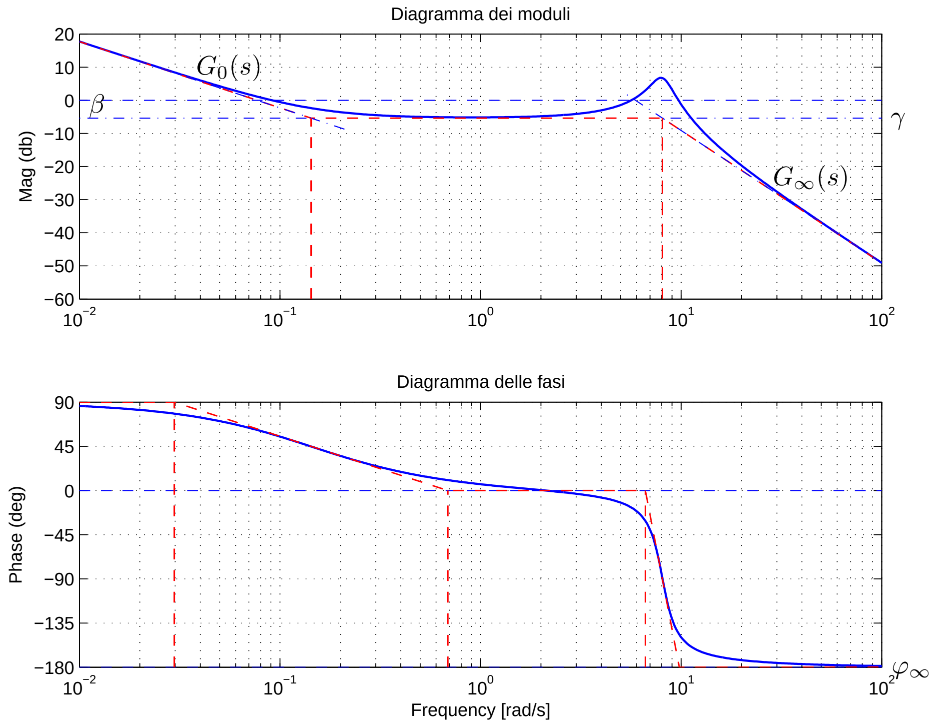


Figura 2: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

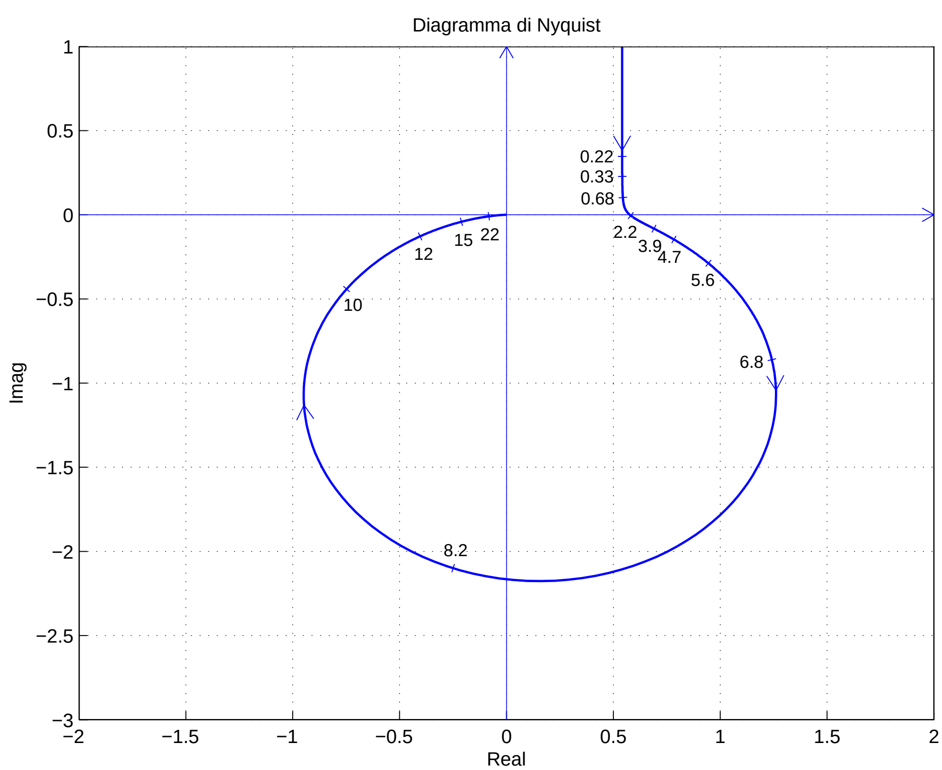


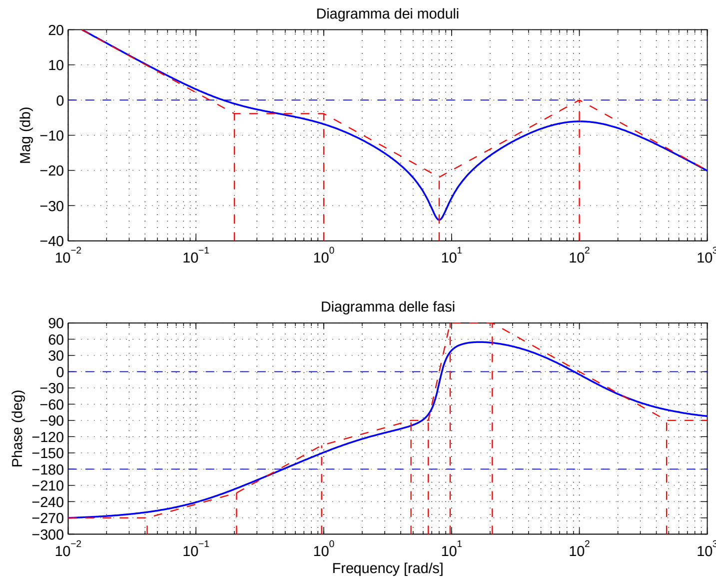
Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Esiste una sola intersezione con il semiasse reale negativo. L'intersezione avviene nel punto:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{-1.733} = 0.577$$

in corrispondente della pulsazione $\omega^* = 2.08$.

c) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.



c.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{100(s+0.2)(s^2+2s+64)}{s(s-1)(s+100)^2}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

c.2) Calcolare il valore della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 2$:

$$G(j2) = -0.138 - 0.232\,j = 0.27\,e^{-120.7\,j}$$

Soluzione:

c.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{100(s+0.2)(s^2+2s+64)}{s(s-1)(s+100)^2}.$$

Il valore $K = 100$ si determina, per esempio, calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$:

$$|G_\infty(s)|_{s=100\,j} = \left|\frac{K}{s}\right|_{100\,j} = \frac{K}{100} = \gamma \simeq 0 \text{ db} \simeq 1 \qquad \rightarrow \qquad K \simeq 100.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

La distanza $M_{\omega_n} \simeq 12$ db $= 4$ di legge dal diagramma di Bode dei moduli.

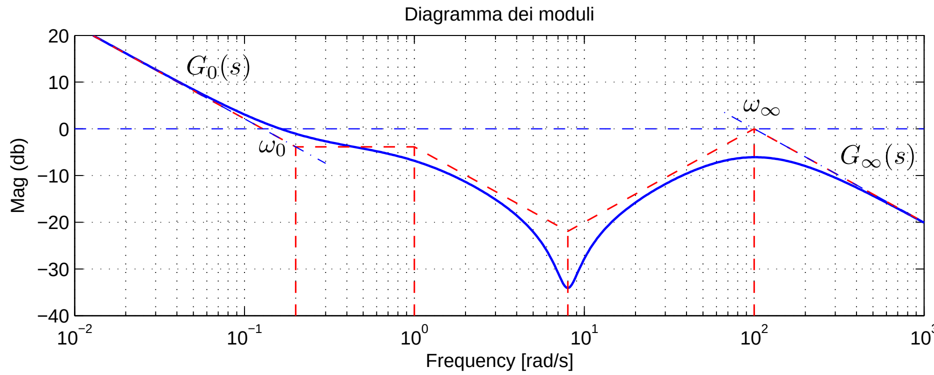
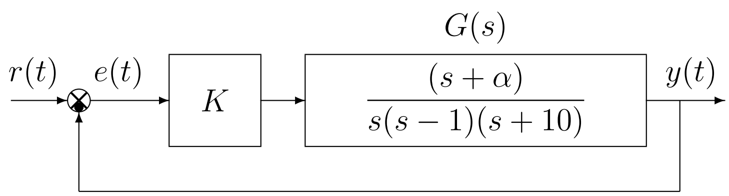


Figura 4: Approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ sul diagramma asintotico di Bode dei moduli.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Posto $\alpha = 1$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. Posto $\alpha = 1$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K\frac{(s+1)}{s(s-1)(s+10)} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$ é mostrato in Fig. 5. Il luogo delle radici ha due asintoti verticali. Il centro degli

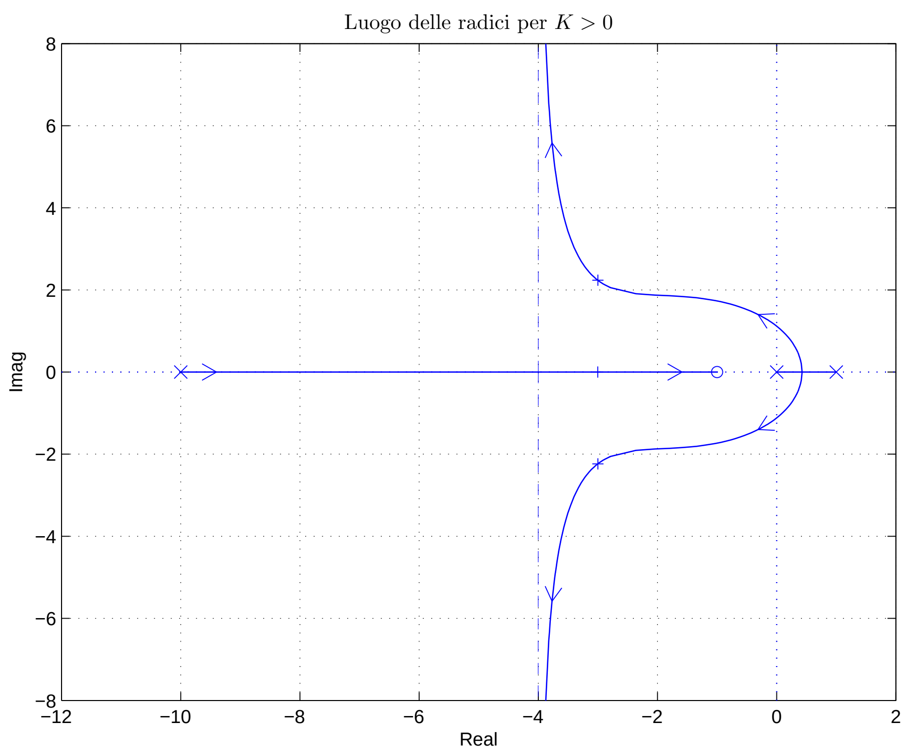


Figura 5: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$

asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-10 + 1 + 1) = -4.$$

d.2) Posto $K = 18$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\alpha > 0$. Determinare esattamente la posizione e il centro degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".
Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente

$$1 + \frac{18(s+\alpha)}{s(s-1)(s+10)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s(s-1)(s+10) + 18(s+\alpha) = 0$$

da cui si ricava la seguente equazione $1 + \alpha\, G_1(s) = 0$:

$$s^3 + 9\,s^2 + 8\,s + 18\,\alpha = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{18\,\alpha}{s(s+1)(s+8)} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è mostrato in Fig. 6.

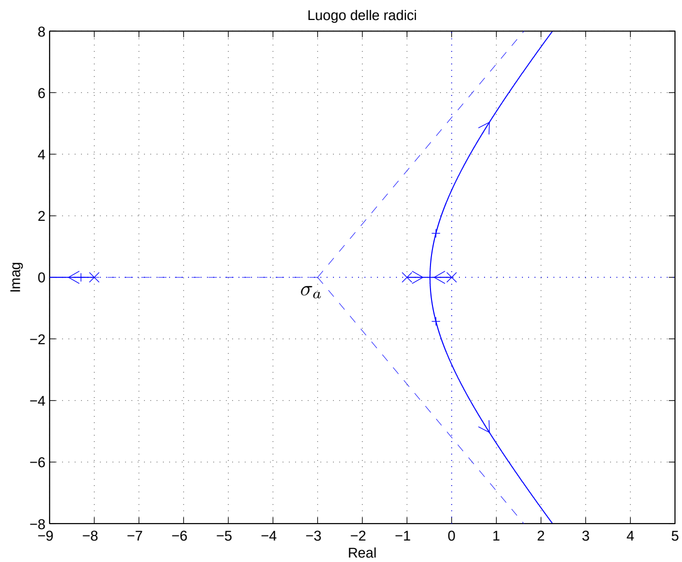


Figura 6: Contorno delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

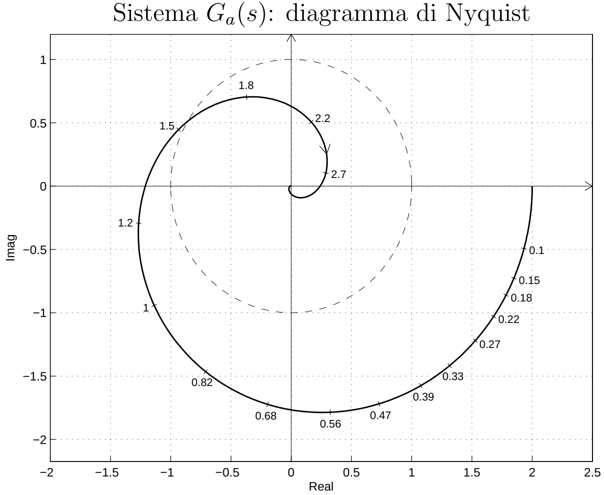
Nel contorno delle radici sono presenti 3 asintoti. Il centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}(-1 - 8) = -3$$

I valori di α^* e di ω^* per cui si ha l'attraversamento dell'asse immaginario sono:

$$\alpha^* = \frac{1 \cdot 8 \cdot (1+8)}{18} = 4, \qquad \qquad \omega^* = \sqrt{8} = 2.83.$$

e) Sia data la seguente funzione di risposta armonica del sistema $G_a(s)$:



Per il sistema $G_a(s)$, progettare una rete correttrice $C(s)$ in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_a = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;

Sol. La specifica sul margine di ampiezza $M_a = 5$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$:

$$M_B = \frac{1}{M_a} = 0.2, \qquad\qquad \varphi_B = -180^\circ$$

La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 7.

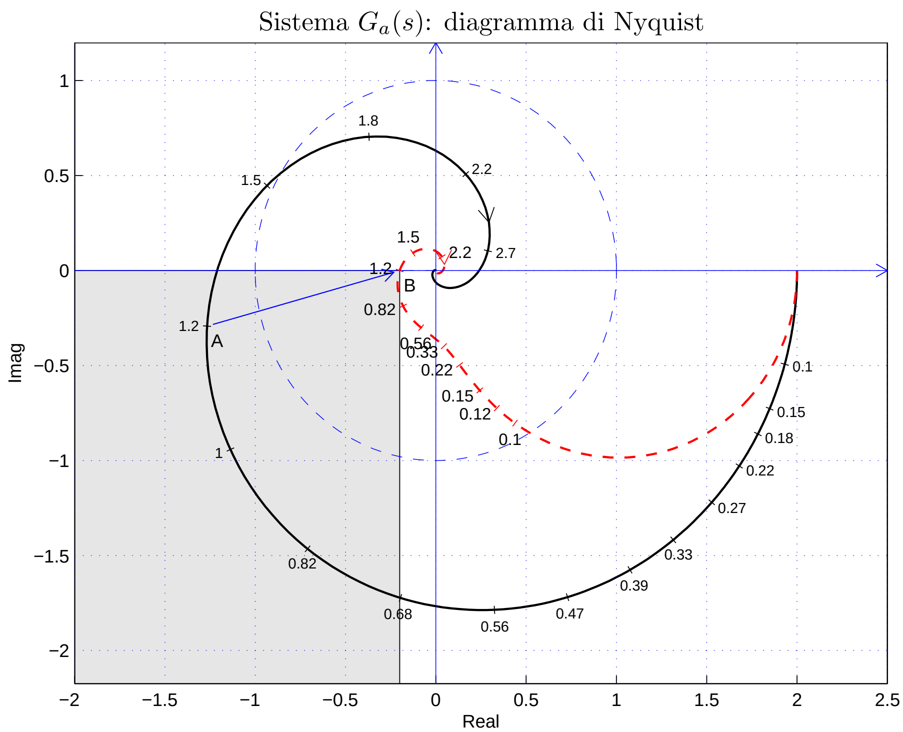


Figura 7: Diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)\, G_a(s)$.

Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.2$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.3, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -167^\circ.$$

Sostituendo i valori di M, φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 3.038$ e $\tau_2 = 20.46$ della rete correttrice $C_1(s)$:

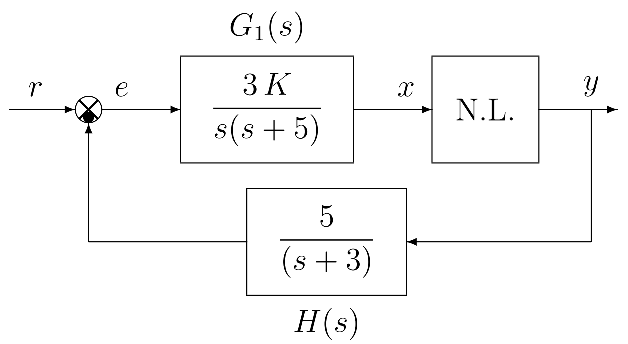
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1539, \qquad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -13^\circ \qquad \rightarrow \qquad C_1(s) = \frac{(1 + 3.038\, s)}{(1 + 20.46\, s)}.$$

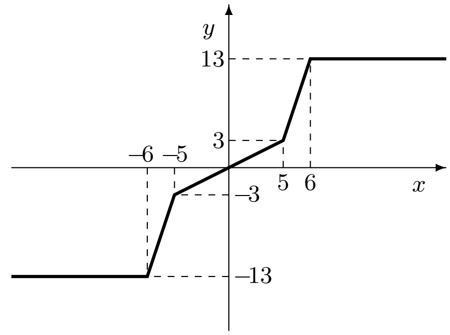
Il diagramma di Myquist delle funzioni $G_a(s)$ e $C_1(s)G_a(s)$ sono mostrati in Fig. 7.

Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori della pulsazione ω_A:

$$
\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\;\; 0.82 \quad 1 \quad 1.2 \;] \\
M_A = & [\;\; 1.628 \quad 1.477 \quad 1.3 \;] \\
\varphi_A = & [\; -115.9 \quad -140.4 \quad -167 \;] \\
M = & [\;\; 0.1229 \quad 0.1354 \quad 0.1539 \;] \\
\varphi = & [\; -64.15 \quad -39.64 \quad -13.01 \;] \\
\tau_1 = & [\;\; 0.4244 \quad 0.9949 \quad 3.038 \;] \\
\tau_2 = & [\;\; 10.44 \quad 10.37 \quad 20.46 \;]
\end{array}
$$

f) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





f.1) Posto $K = 1$, determinare per quale valore r^* del riferimento r il punto di lavoro del sistema retroazionato coincide con il punto $(x_0, y_0) = (5, 3)$.

Sol. Il guadagno statico del sistema $G_1(s)$ è infinito, per cui la retta di carico è orizzontale:

$$
y = \frac{r}{K_2\, K_3} = \frac{3\, r}{5} \qquad \text{dove} \qquad K_2 = 1, \quad K_3 = \frac{5}{3}
$$

Il valore r^* si ottiene ponendo $y = 3$ nella retta di carico:

$$
3 = \frac{3\, r^*}{5} \qquad \rightarrow \qquad r^* = 5.
$$

f.2) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità N.L. assegnata, prendendo l'origine come punto di lavoro. Utilizzare delle variabili (per esempio: m_1, m_2, $\ldots$) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

Sol. L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ quando è mostrato in Fig. 8. Indichiamo: a) con $m_0 = 0.6$ il valore iniziale della funzione $F(X)$ per $X < 5$; b) con

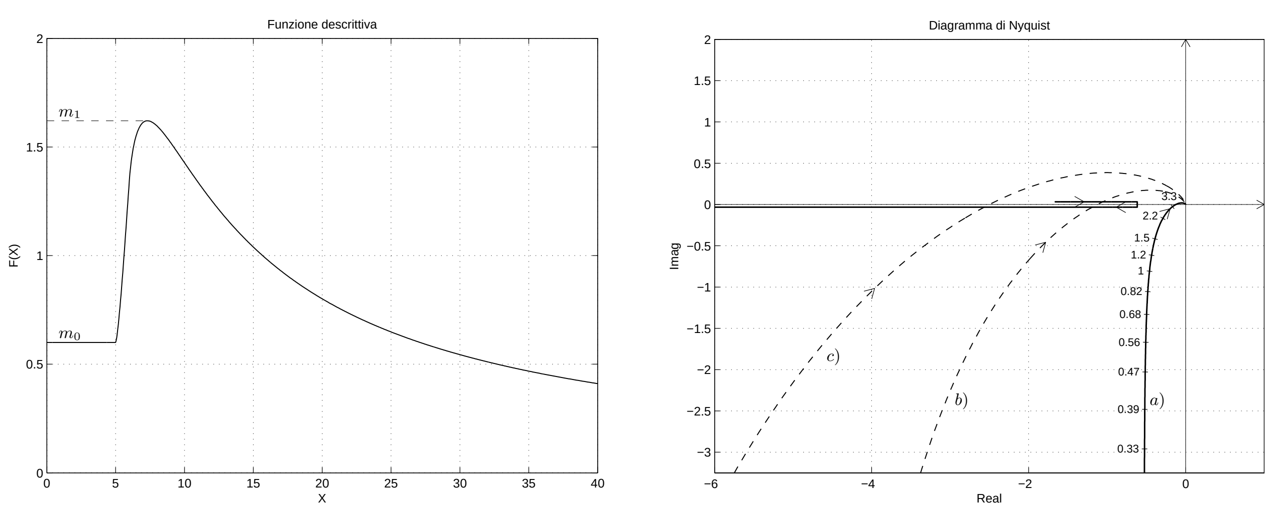


Figura 8: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

$m_1 \simeq 1.62$ il valore massimo della funzione $F(X)$ per $X \simeq 7.3$; c) con $m_2 = 0$ il valore finale della funzione $F(X)$ per $X \to \infty$.

f.3) Discutere "qualitativamente" (in funzione anche dei parametri m_1 ed m_2) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Sol. Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema G(s) è $K^* = 8$. Al variare di K si hanno quindi queste 3 possibili soluzioni:

1) $-\dfrac{1}{m_1} < -\dfrac{K}{K^*}$: la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.

2) $-\dfrac{1}{m_0} < -\dfrac{K}{K^*} < -\dfrac{1}{m_1}$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in 2 punti a cui corrispondono 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).

3) $-\dfrac{K}{K^*} < -\dfrac{1}{m_0}$: il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

e) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete correttrice

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+2)}{(s+3)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(z) = \left.\frac{(s+2)}{(s+3)}\right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{(1-z^{-1}+2T)}{(1-z^{-1}+3T)}$$

Per $T = 0.1$ si ha:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{(1.2-z^{-1})}{(1.3-z^{-1})}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m(k) = \frac{1}{1.3}[m(k-1) + 1.2\, e(k) - e(k-1)]$$

cioè:

$$m(k) = 0.7692\, m(k-1) + 0.9231\, e(k) - 0.7692\, e(k-1)]$$

Controlli Automatici - Prima parte

21 Dicembre 2018 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$\mathcal{L}[4\,t^3\,e^{-2\,t}] = \frac{24}{(s+2)^4}, \qquad\qquad \mathcal{L}[2\cos(4\,t)\,e^{-5\,t}] = \frac{2(s+5)}{(s+5)^2+16}$$

2. Calcolare la trasformata di Laplace inversa $g(t)$ delle seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12}{s(s+2)(s+3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{6}{s+2} + \frac{4}{s+3}\right] = 2 - 6\,e^{-2\,t} + 4\,e^{-3\,t}$$

3. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$2\dddot{y}(t) + 3\,\ddot{y}(t) + 5\,\dot{y}(t) + y(t) = 6\,\ddot{x}(t) + 7\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{6\,s^2+7}{2\,s^3+3\,s^2+5\,s+1}$$

4. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

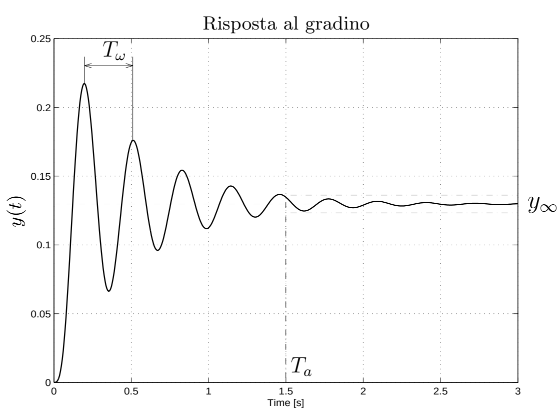
$$x(t) = 5 + 3\cos(2t + \tfrac{\pi}{3}) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{4}{s+1}} \longrightarrow \quad y(t) \simeq 20 + \tfrac{12}{\sqrt{5}}\cos(2t + \tfrac{\pi}{3} - \arctan 2)$$

5. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{300\,(2+0.1\,s)(s^2+200s+40000)}{(0.5\,s+25)(0.1\,s+20)(s^2+4s+400)(s^2+60s+925)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t \to \infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 0.129, \qquad T_a \simeq 1.5\,\mathrm{s}, \qquad T_\omega \simeq 0.31\,\mathrm{s}.$$



6. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $3\,\dot{y}(t) + 5\,y(t) = 0$ con condizione iniziale $y(0) = 2$. Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$3\,(s\,Y(s) - 2) + 5\,Y(s) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{s+\frac{5}{3}} \quad \rightarrow \quad y(t) = 2\,e^{-\frac{5}{3}\,t} = 2\,e^{-1.666\,t}.$$

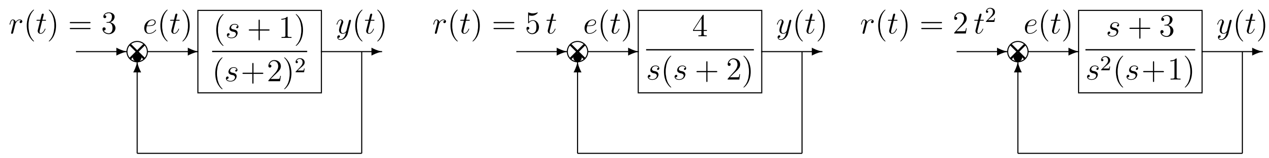
7. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$ supponendo $t_0 > 0$:

$$G(s) = \frac{(1-2\,s)}{s(s+4)}\,e^{-2\,t_0 s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{1+4\omega^2}}{\omega(16+\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = -\arctan 2\omega - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{4} - 2\,t_0\,\omega \end{cases}$$

8. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con un elevato guadagno statico d'anello

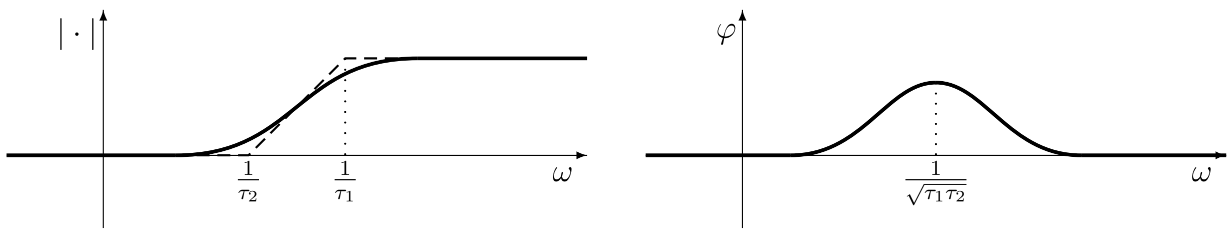
   ○ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$
   ⊗ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$
   ⊗ è poco sensibile alla presenza di disturbi costanti esterni agenti sul sistema

9. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:

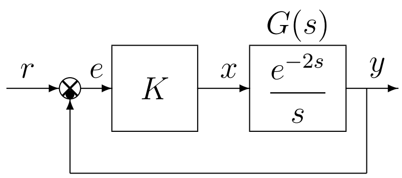


$$e(\infty) = \frac{3}{1+\frac{1}{4}} = \frac{12}{5} = 2.4 \qquad e(\infty) = \frac{5}{2} = 2.5 \qquad e(\infty) = \frac{4}{3} = 1.333$$

10. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete anticipatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\tau_2 s)}$, $(\tau_1 > \tau_2)$:



11. Sia dato il seguente sistema retroazionato. Per quale valore di K il sistema retroazionato è stabile?



$$0 < K < \frac{\pi}{2\,t_0} = \frac{\pi}{4}$$

12. Quale dei seguenti parametri della risposta al gradino di un sistema $G(s)$ è maggiormente influenzato dalla larghezza di banda ω_f del sistema stesso:

   ○ tempo di ritardo T_r
   ○ tempo di assestamento T_a
   ⊗ tempo di salita T_s
   ○ massima sovraelongazione S

13. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali tempo continui $x(t)$ quando $t = k\,T$:

$$x(t) = 2^{-3t} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{(z - 2^{-3T})} \qquad\qquad x(t) = 5\,t \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{5\,T\,z}{(z-1)^2}$$

14. Scrivere l'equazione alle differenze corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z+5}{4\,z^2 + 2\,z + 1 + 2\,z^{-2}} \qquad \rightarrow \qquad 4\,y_{k+2} + 2\,y_{k+1} + y_k + 2\,y_{k-2} = 3\,x_{k+1} + 2\,x_k$$

15. Sia $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$. Enunciare il teorema della traslazione "in anticipo" nel tempo:

$$\mathcal{Z}[x(t+nT)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right]$$

16. In un sistema discreto a segnali campionati, qual è il legame che lega la variabile discreta z e la variabile s di Laplace?

$$z = e^{s\,T}.$$