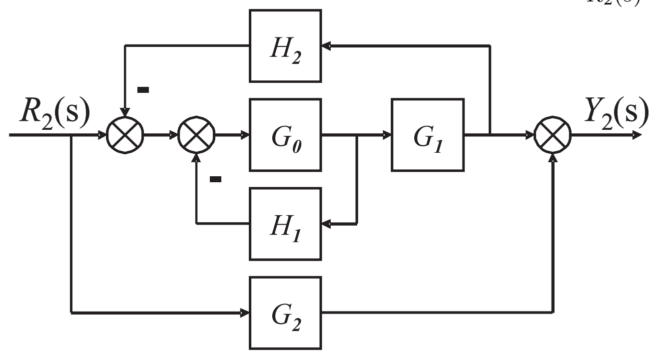
Automatic Controls
20 Febbraio 2019 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

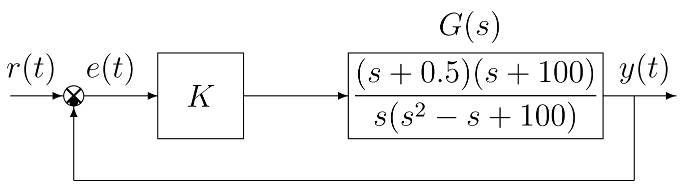
Si risolvano i seguenti esercizi.

a) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Y_2(s)}{R_2(s)}$:

$$G(s) = \frac{G_0G_1+G_2(1+G_0H_1+G_0G_1H_2)}{1+G_0H_1+G_0G_1H_2}$$



b) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



b.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
<u>Soluzione</u>.
L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1+\frac{K(s+100)(s+0.5)}{s(s^2-s+100)}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^3+(K-1)s^2+(100+100.5K)s+50K=0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 100+100.5K \\ 2 & K-1 & 50K \\ 1 & (K-1)(100+100.5K)-50K & \\ 0 & 50K & \end{array}$$

Dalla tabella di Routh si ricavano i seguenti vincoli:

$$K>1, \qquad 100.5\,K^2-50.5\,K-100>0, \qquad K>0.$$

In base alla regola dei segni dei coefficienti di una equazione di secondo grado, è possibile affermare che le due soluzioni K_1 e K_2 dell'equazione di secondo grado della riga 1 sono reali e di segni opposti: $K_1<0$ e $K_2>0$. Inoltre, la corrispondente disequazione è positiva all'esterno di tali valori. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K>K_2=\frac{50.5+\sqrt{42750.25}}{201}=1.28=K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^*=\sqrt{100+100.5K^*}.=15.12.$$

b.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

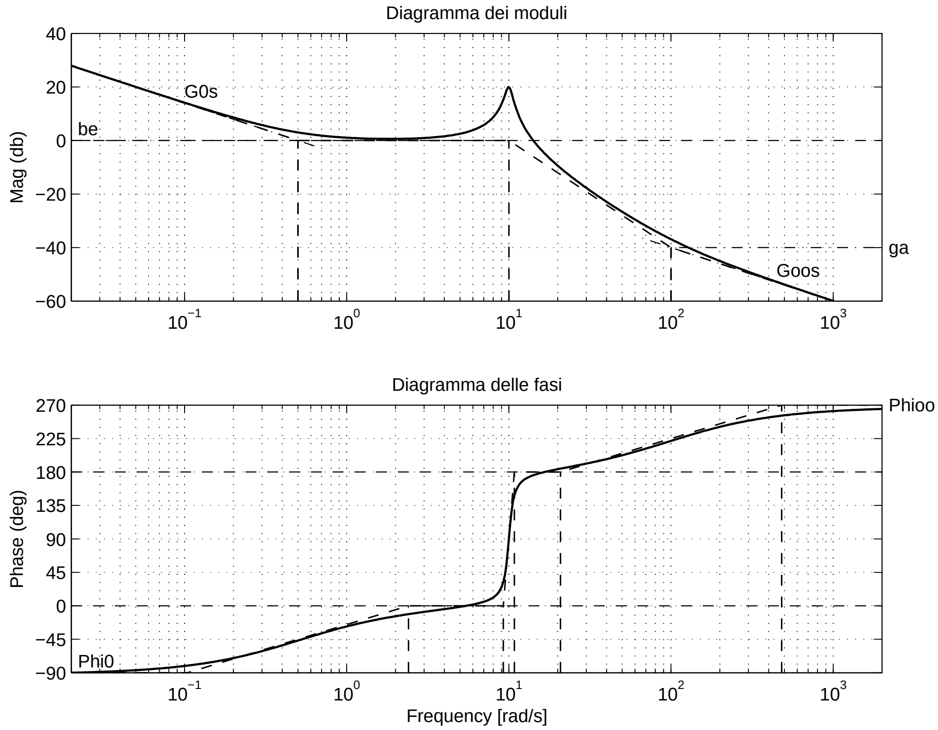


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{0.5}{s}, \qquad\qquad G_\infty(s) = \frac{1}{s}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \varphi_\infty = -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2}.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.5$ e il guadagno γ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 100$ sono:

$$\beta = 1 = 0 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{100} = -40 \text{ db}.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli instabili è $\delta = 0.05$.

b.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ è mostrato in Fig. 2. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 2 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = 2.02 > 0.$$

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale:

$$\sigma_a = K\Delta_\tau = 0.5 \cdot 2.02 = 1.01.$$

La variazione di fase $\Delta\varphi = 2\pi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di 2π in senso antiorario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = \frac{3\pi}{2}$. Esistono due intersezione con l'asse reale. L'intersezione con l'asse reale negativo avviene nel punto:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} = -0.781.$$

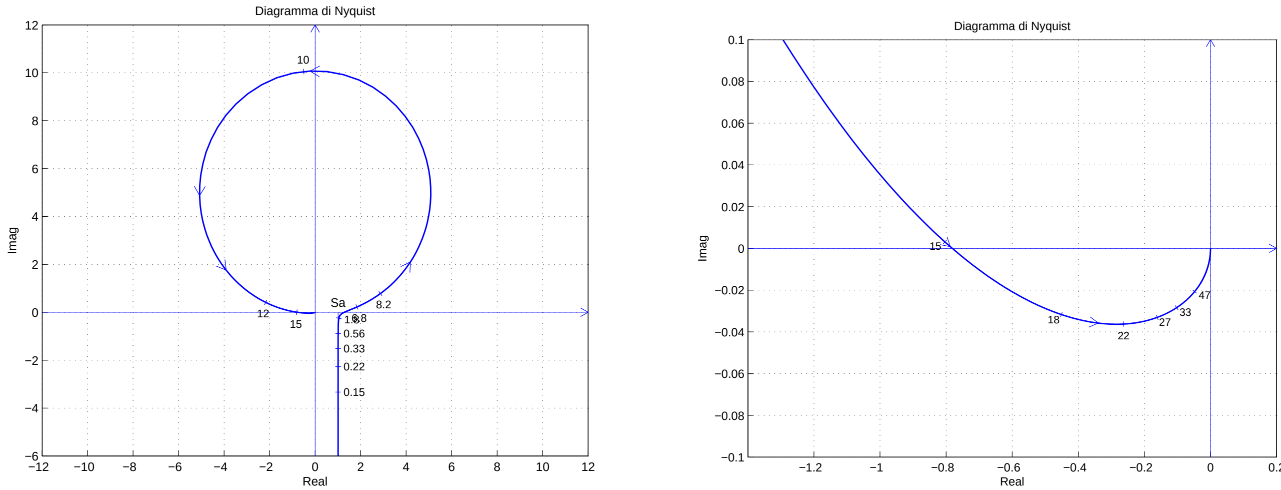
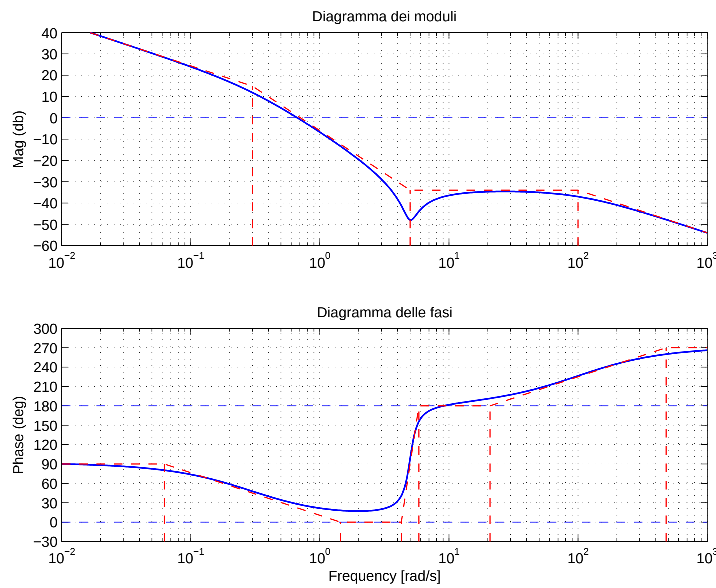


Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$: andamento generale e zoom.

in corrispondente della pulsazione $\omega_1^* = 15.12$.

c) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.



c.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$.

$$G(s) = \frac{2(s^2 + s + 25)}{s(s + 0.3)(s - 100)}.$$

Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

c.2) Per $t \to \infty$, la risposta al gradino $y(t)$ del sistema $G(s)$:

- ◯ tende ad un valore costante;
- ◯ tende ad una rampa;
- ◯ tende ad una sinusoide;
- ⊗ tende all'infinito;

Soluzione:

c.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{2(s^2 + s + 25)}{s(s + 0.3)(s - 100)}.$$

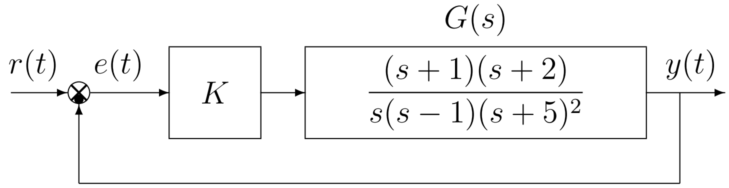
Il valore $K = 2$ si determina calcolando il modulo β dell'approssimante $G_0(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.3$:

$$|G_0(s)|_{s=0.3\,j} = \left|\frac{25K}{-30\,s}\right|_{0.3\,j} = \frac{25K}{9} = \beta \simeq 15 \text{ db} \simeq 5.6 \qquad \to \qquad K \simeq 2.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di zeri complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1\, G_1(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K\frac{(s+1)(s+2)}{s(s-1)(s+5)^2} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$ é mostrato in Fig. 3. Il luogo delle radici ha due asintoti verticali. Il centro degli

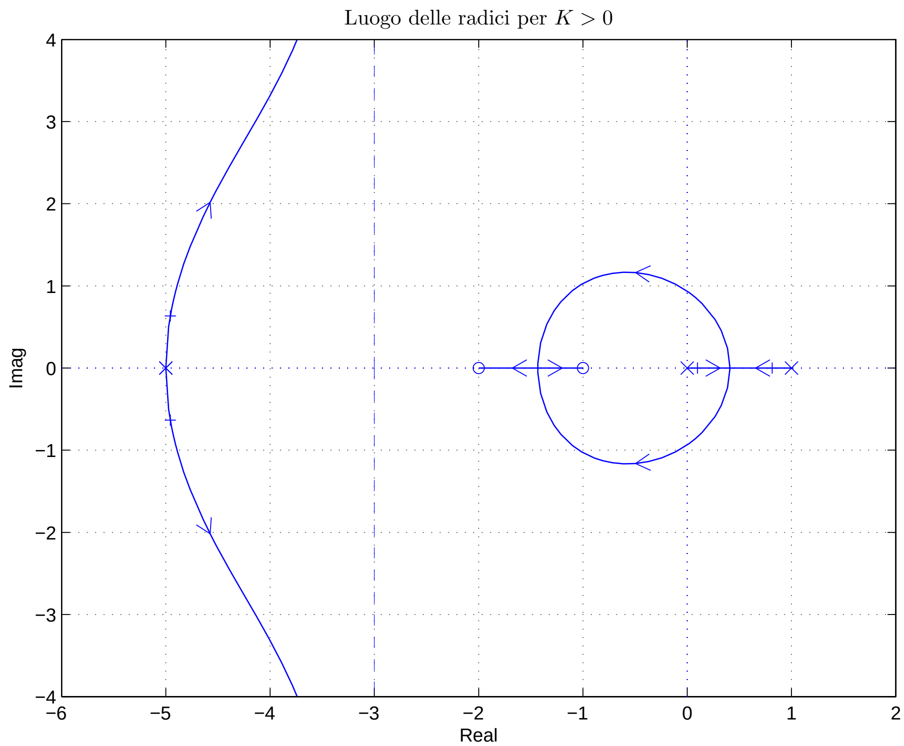


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$

asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-5-5+1+1+2) = -3.$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola applicando il criterio di Routh alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + K\frac{(s+1)(s+2)}{s(s-1)(s+5)^2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 9s^3 + (K+15)s^2 + (3K-25)s + 2K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & K+15 & 2K \\
3 & 9 & 3K-25 & \\
2 & 6K+160 & 18K & \\
1 & (6K+160)(3K-25)-162K & & \\
0 & 18K & &
\end{array}$$

Il sistema retroazionato é stabile se

$$K > -\frac{110}{6}, \qquad 18K^2 + 168K - 4000 > 0, \qquad K > 0.$$

Dalla seconda disequazione si ha che:

$$K < -\frac{14}{3} - 2\sqrt{61} = -20.28, \qquad K > -\frac{14}{3} + 2\sqrt{61} = 10.95,$$

Quindi il sistema retroazionato é stabile se

$$K > -\frac{14}{3} + 2\sqrt{61} = 10.95 = K^*$$

L'intersezione con l'asse immaginario si ha in corrispondenza della pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{3K^* - 25}{9}} = 0.934.$$

d.2) Sia la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{m_p s^3 + (1 + m_p)s^2 + 3\,s + 1}$$

Utilizzando la metodologia del contorno delle radici mostrare come si spostano sul piano complesso i poli della funzione $G(s)$ al variare di $m_p > 0$. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. I poli della funzione $G(s)$ coincidono con gli zeri del polinomio a denominatore della funzione $G(s)$:

$$m_p s^3 + (1 + m_p)s^2 + 3, s + 1 = 0$$

I poli della funzione $G(s)$ sono le soluzioni della seguente equazione:

$$m_p s^3 + (1 + m_p)s^2 + 3s + 1 = 0$$

che puó essere riscritta nel seguente modo $1 + m_p\, G_1(s) = 0$:

$$s^2 + 3s + 1 + m_p s^2(s + 1) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + m_p \frac{s^2(s + 1)}{s^2 + 3s + 1} = 0$$

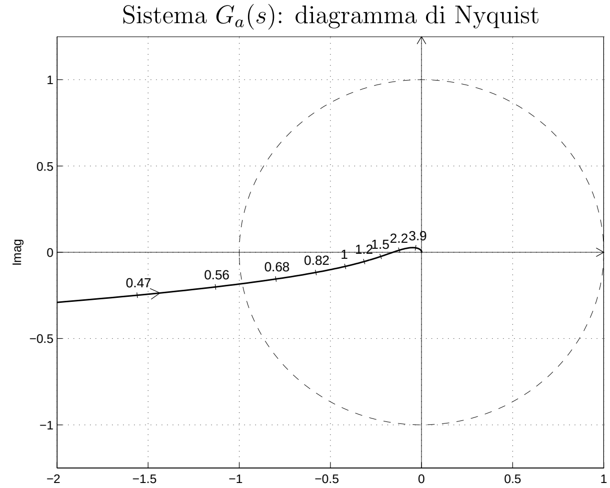
Mettendo in evidenza i poli della funzione $G_1(s)$ si ottiene:

$$1 + \frac{m_p\, s^2(s + 1)}{(s + 0.382)(s + 2.618)} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $m_p > 0$ è mostrato in Fig. 4. Nel contorno delle radici è presente un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo, percorso dall'infinito a finito.

e) Per il sistema $G_a(s)$ riportato a fianco, progettare una rete correttrice in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase $M_\varphi = 50^o$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno.

Sistema $G_a(s)$: diagramma di Nyquist



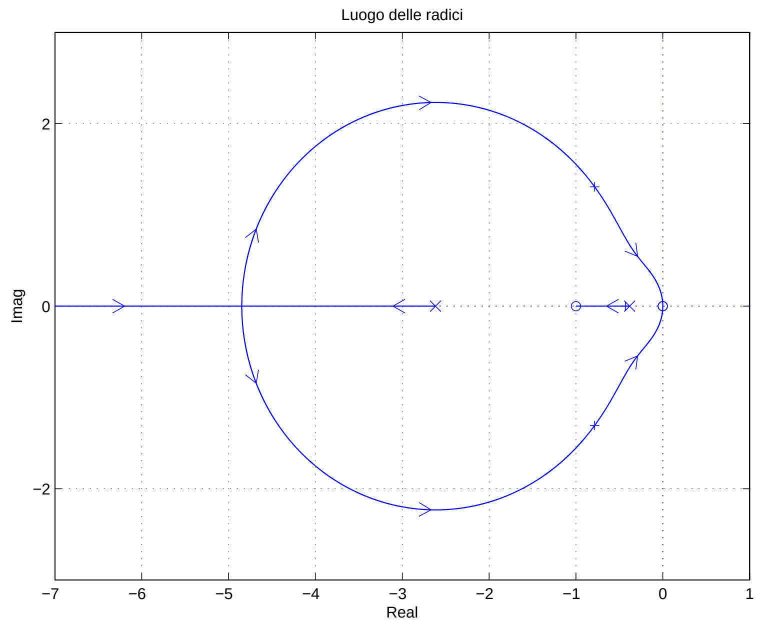


Figura 4: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $m_p > 0$.

Sol. La specifica sul margine di fase $M_\varphi = 50^o$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 1$ e $\varphi_B = 230°$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1$:

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.4267, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 191.1°.$$

Sostituendo i valori di M, φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 2.492$ e $\tau_2 = 0.5589$ della rete correttrice $C(s)$:

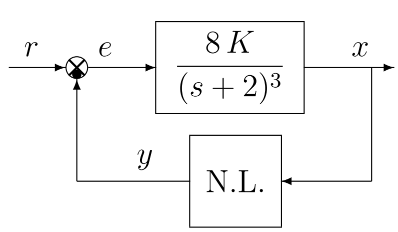
$$M = \frac{M_B}{M_A} = 2.3436, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 38.93° \qquad \rightarrow \qquad C_2(s) = \frac{(1 + 2.492\, s)}{(1 + 0.5589\, s)}.$$

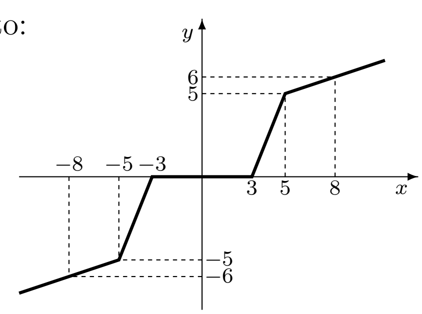
I diagrammi di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

Sintesi della rete correttrice $C_1(s)$ con altri valori del guadagno K: ω_A:

$$\begin{array}{rl}
\omega_A = & [\;\; 2.2 \quad 1.5 \quad 1.2 \quad 1 \quad 0.82\;] \\
M_A = & [\; 0.1225 \quad 0.2253 \quad 0.3192 \quad 0.4267 \quad 0.5914\;] \\
\varphi_A = & [\; 174.3 \quad -173.8 \quad -170.3 \quad -168.9 \quad -168.6\;] \\
M = & [\; 8.162 \quad 4.438 \quad 3.133 \quad 2.344 \quad 1.691\;] \\
\varphi = & [\; -304.3 \quad 43.79 \quad 40.29 \quad 38.93 \quad 38.59\;] \\
\tau_1 = & [\; 4.181 \quad 3.581 \quad 3.055 \quad 2.492 \quad 1.778\;] \\
\tau_2 = & [\; 0.2427 \quad 0.4784 \quad 0.5716 \quad 0.5589 \quad 0.3719\;]
\end{array}$$

f) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





f.1) Posto $K = 1$, determinare per quale valore r_1 dell'ingresso r il punto di lavoro del sistema retroazionato è $(x_1,\, y_1) = (-5,\, -5)$.

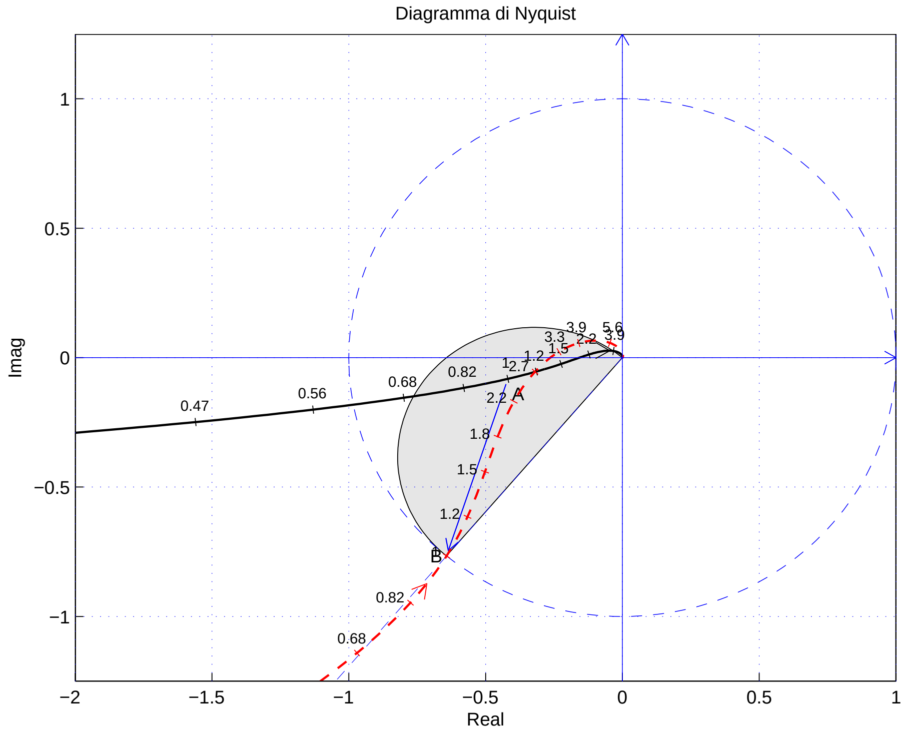


Figura 5: di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)\,G_b(s)$.

f.2) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0,\ 0)$. Utilizzare delle variabili (per esempio: $m_1,\ m_2,\ \ldots$) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

f.3) Discutere "qualitativamente" (in funzione anche dei parametri $m_1,\ m_2,\ \ldots$) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Soluzione:

f.1) Il sistema $G_1(s)$ è di tipo 0. Posto $K = 1$, il valore dei guadagni statici è: $K_1 = 1$, $K_2 = 1$ e $K_3 = 1$. La retta di carico della parte lineare del sistema è la seguente:

$$x = K_1(r - K_2 K_3\, y) \qquad \rightarrow \qquad x = r - y$$

Imponendo il passaggio per il punto $(x_1,\ y_1) = (-5,\ -5)$ si ottiene il valore r_1:

$$-5 = r_1 + 5 \qquad \rightarrow \qquad r_1 = -10$$

f.2) L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 6.
Il valore massimo m_1 dalla funzione descrittiva $F(X)$ è maggiore del valore finale $m_2 = 0.333$.

f.3) Per $K = 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $G(s)$ è $K^* = 4$. Per $K \neq 0$ il margine di ampiezza K^* del sistema $K\,G(s)$ è $\bar{K}^* = \frac{K^*}{K}$. Al variare di $\bar{K}^*$ si possono avere le seguenti condizioni di funzionamento:

a) Per $\bar{K}^* > m_1$ la funzione $-1/F(X)$ è tutta esterna al diagramma completo della funzione $G(s)$ per cui non vi sono cicli limite e l'origine è un punto di lavoro globalmente asintoticamente stabile.

b) Per $m_1 < \bar{K}^* < m_2$ il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in 2 punti a cui corrispondono 2 cicli limite, uno stabile (quello uscente) e uno instabile (quello entrante).

c) Per $\bar{K}^* < m_2$ il diagramma di Nyquist della $G(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite instabile.

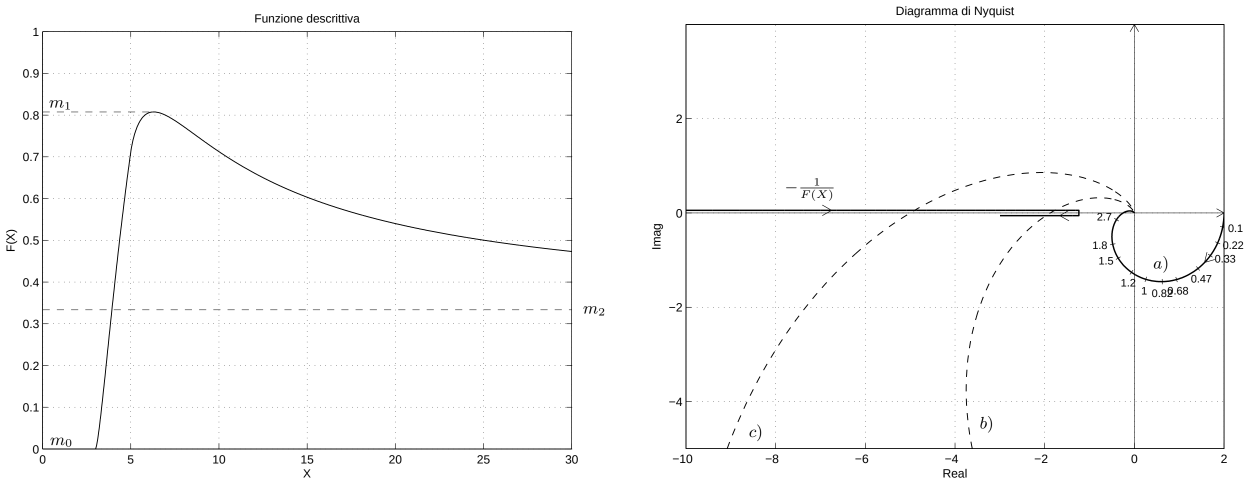


Figura 6: Funzione descrittiva $F(X)$ e discussione grafica.

Una descrizione grafica delle varie condizioni operative è mostrata in Fig. 6.

g) Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete correttrice:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{(s+5)}{s(s+1)}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

Sol. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro e $T = 0.1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} D(z) = \left.\frac{(s+5)}{s(s+1)}\right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} &= \frac{T((1-z^{-1})+5T)}{(1-z^{-1})((1-z^{-1})+T)} \\ &= \frac{(1.5-z^{-1})}{10(1-z^{-1})(1.1-z^{-1})} \\ &= \frac{(1.5-z^{-1})}{10(1.1-2.1\,z^{-1}+z^{-2})} \end{aligned}$$

cioè:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{1.5-z^{-1}}{11-21\,z^{-1}+10\,z^{-2}}$$

La corrispondente equazione alle differenze assume la forma seguente:

$$m_k = \frac{1}{11}(21\,m_{k-1} - 10\,m_{k-2} + 1.5\,e_k - e_{k-1})$$

cioè:

$$m_k = 1.9091\,m_{k-1} - 0.9091\,m_{k-2} + 0.1364\,e_k - 0.0909\,e_{k-1}$$

Controlli Automatici - Prima parte

20 Febbraio 2019 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$\mathcal{L}[3\cos(5\,t)\,e^{-2\,t}] = \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+25}, \qquad \mathcal{L}[2\,t^4 + 5\,\delta(t-3)] = \frac{48}{s^5} + 5\,e^{-3\,s}$$

2. Calcolare la trasformata di Laplace inversa $g(t)$ delle seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[2 + \frac{6}{s(s+1)(s+3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[2 + \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+3}\right] = 2\,\delta(t) + 2 - 3\,e^{-t} + e^{-3\,t}$$

3. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

$$x(t) = 9 + 2\sin(4t - \tfrac{\pi}{4}) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{10}{s+3}} \longrightarrow y(t) \simeq 30 + 4\sin(4t - \tfrac{\pi}{4} - \arctan\tfrac{4}{3})$$

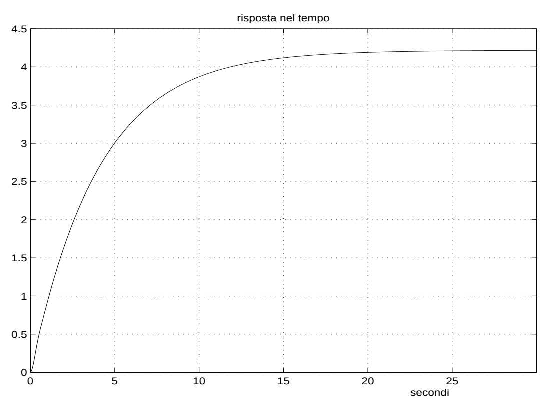
4. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{(3+0.2\,s)(s^2+60\,s+1800)}{(\mathbf{2+8\,s})(8+0.2\,s)(s^2+8\,s+80)}$$

Calcolare inoltre:
1) il valore a regime y_∞ della risposta impulsiva per $t \to \infty$;
2) il tempo di assestamento T_a della risposta impulsiva $y_1(t)$;
3) il periodo T dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$K_0 = 4.219, \qquad T_a \simeq 12\,\mathrm{s}, \qquad T \simeq \nexists$$

Il polo dominante del sistema è dato dal termine $(2+8\,s)$.



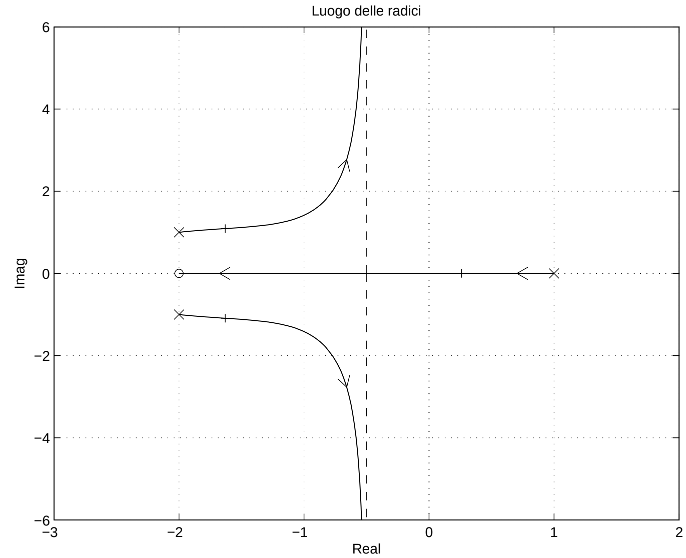
5. Enunciare il criterio di Nyquist nella formulazione valida anche per sistemi instabili ad anello aperto. Fornire sia l'ipotesi che la tesi del criterio.

Criterio di Nyquist. Nell'ipotesi che il sistema ad anello aperto non presenti poli immaginari, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $F(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $F(s)$ con parte reale positiva.

6. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

$$G(s) = \frac{(3s-1)}{s(2-s)}\,e^{-4\,s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{1+9\omega^2}}{\omega\sqrt{4+\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan 3\omega - \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\omega}{2} - 4\omega \end{cases}$$

7. A fianco è riportato il luogo delle radici del sistema $G(s) = \frac{2(s+2)}{(s-1)((s+2)^2+1)}$ al variare del parametro $K > 0$. Calcolare:



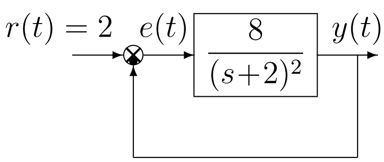
   1) L'ascissa σ_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

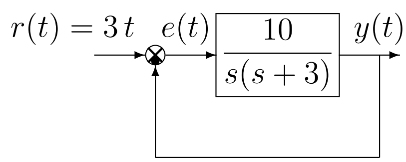
$$\sigma_0 = -1$$

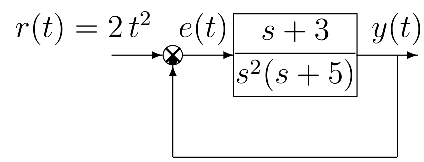
   2) Il valore K_0 corrispondente alla condizione di allineamento dei tre poli:

$$K_0 = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=-1} = 2$$

8. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:







$$e(\infty) = \frac{2}{3} \qquad e(\infty) = \frac{9}{10} \qquad e(\infty) = \frac{20}{3}$$

9. Calcolare il valore iniziale $y_0 = \lim_{k\to 0} y(k)$ e il valore finale $y_\infty = \lim_{k\to\infty} y(k)$ del segnale $y(k)$ corrispondente alla seguente funzione $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z\,(1+3\,z)}{(1-z)(2+z)} \qquad \rightarrow \qquad y_0 = -3, \qquad y_\infty = \nexists$$

10. Scrivere la funzione di trasferimento discreta $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ corrispondente alla seguente equazione alle differenze:

$$y_{k+1} + 2\,y_k + 3\,y_{k-1} + 5\,y_{k-2} = 6\,x_{k+1} + 4\,x_{k-1} \qquad \rightarrow \qquad G(z) = \frac{6\,z + 4\,z^{-1}}{z + 2 + 3\,z^{-1} + 5\,z^{-2}}$$

11. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali tempo continui $x(t)$ quando $t = k\,T$:

$$x(t) = 2^{-3t} \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{(z - 2^{-3T})} \qquad\qquad x(t) = 5\,t \quad \rightarrow \quad X(z) = \frac{5\,T\,z}{(z-1)^2}$$

12. Calcolare la soluzione $y(n)$ della seguente equazione alle differenze a partire dalla condizione iniziale $y(0) = 3$:

$$y(n+1) + 0.5\,y(n) = 0 \qquad \rightarrow \qquad y(n) = 3\,(-0.5)^n.$$

13. Scrivere la funzione di trasferimento $H_0(s)$ del ricostruttore di ordine 0:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$