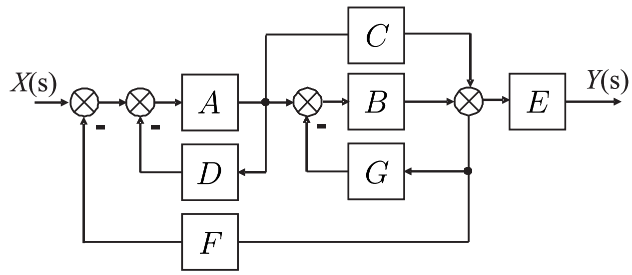
Automatic Controls
16 Gennaio 2019 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

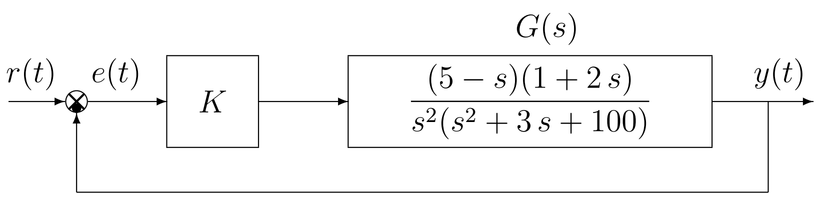
Si risolvano i seguenti esercizi.

a) Relativamente allo schema a blocchi di figura, calcolare la funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$:

$$G_1(s) = \frac{ABE+ACE}{1+AD+BG+ABF+ACF+ADBG}$$



b) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



b.1) Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione.

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1+\frac{K(5-s)(1+2\,s)}{s^2(s^2+3\,s+100)}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^4+3\,s^3+(100-2\,K)s^2+9Ks+5K=0.$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 100-2\,K & 5K \\
3 & 3 & 9K & \\
2 & -15K+300 & 15K & \\
1 & 9K(-15K+300)-45K & & \\
0 & 15K & &
\end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < \frac{300}{15} = 20, \qquad\qquad K > 0.$$

Dalla riga 1 si ottiene la seguente disequazione:

$$-135K+2655>0 \qquad \rightarrow \qquad K < \frac{2655}{135} = \frac{59}{3} = 19.67 = K^*.$$

Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$0 < K < K^* = 19.67.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{3K^*} = \sqrt{59} = 7.6811.$$

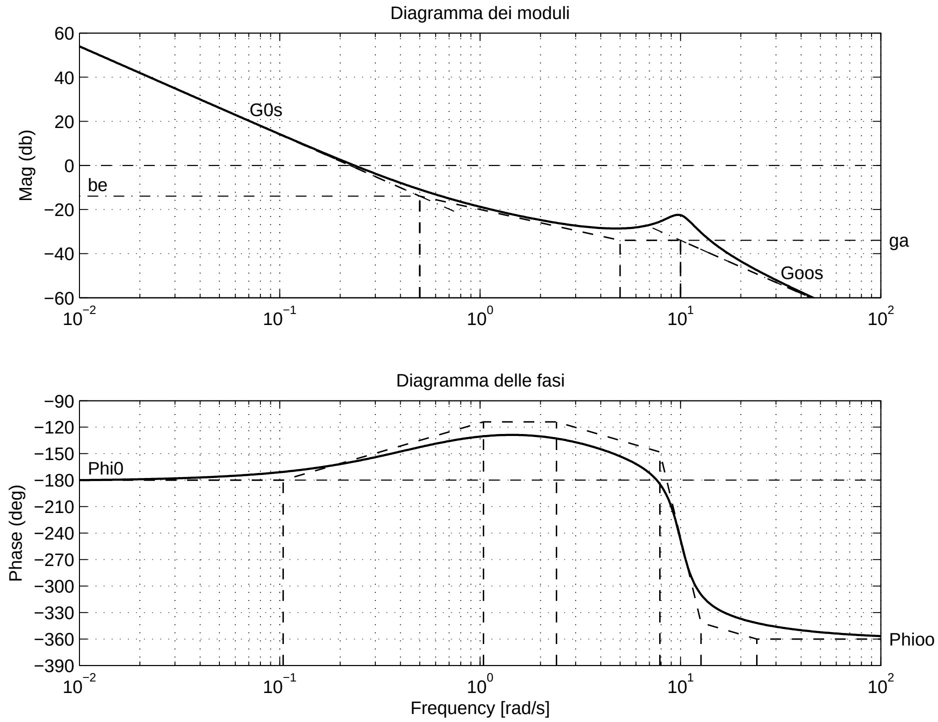


Figura 1: Diagrammi di Bode della funzione $G(s)$.

b.2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$.

Soluzione. I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione $G(s)$ sono mostrati in Fig. 1. Le funzioni approssimanti $G_0(s)$ e $G_\infty(s)$ per $\omega \to 0$ ed $\omega \to \infty$ sono le seguenti:

$$G_0(s) = \frac{1}{20\, s^2}, \qquad\qquad G_\infty(s) = -\frac{2}{s^2}.$$

Le corrispondenti fasi φ_0 e φ_∞ hanno il seguente valore:

$$\varphi_0 = -\pi, \qquad\qquad \varphi_\infty = -2\,\pi.$$

Sul diagramma asintotico delle ampiezze, il guadagno β in corrispondenza della pulsazione $\omega = 0.5$ e il guadagno γ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 10$ sono:

$$\beta = \frac{1}{5} \simeq -14 \text{ db}, \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{50} \simeq -34 \text{ db}.$$

b.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a di un eventuale asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*.

Soluzione. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 2. Il sistema é di tipo 2 per cui non esiste nessun asintoto verticale. La fase iniziale del sistema è $\varphi_0 = -\pi$. Per $\omega \to 0^+$ il diagramma parte in anticipo rispetto a tale fase in quanto la somma delle costanti di tempo del sistema è positiva:

$$\Delta\tau = 2 - \frac{1}{5} - \frac{3}{100} = 1.77 > 0.$$

La variazione di fase $\Delta\varphi = -\pi$ che il sistema subisce per $\omega \in]0,\ \infty[$ indica che il vettore $G(j\omega)$ ruota di $-\pi$ in senso orario per raggiungere la fase finale $\varphi_\infty = -2\pi$. Esiste quindi un'unica intersezione σ_1^* con il semiasse reale positivo. Tale intersezione si determina nel modo seguente:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} \qquad \longrightarrow \qquad \sigma_1^* = -0.0508.$$

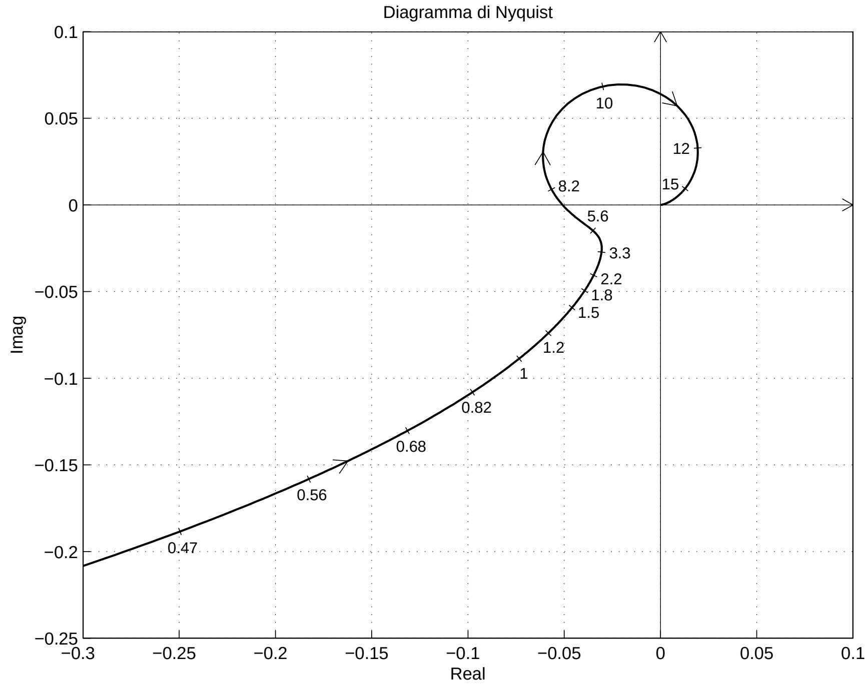


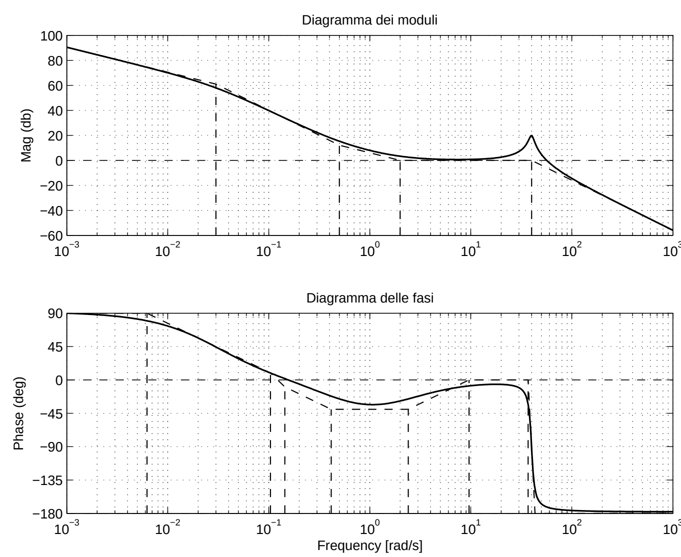
Figura 2: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il corrispondente valore di ω_1^* è: $\omega_1^* = 7.6811$. Essendo

$$\Delta_p = 5 - \frac{1}{2} + 3 > 0$$

per $\omega \to \infty$ il diagramma arriva a zero in anticipo rispetto alla fase finale $\varphi_\infty = -2\pi$.

c) Si faccia riferimento ai diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ mostrati in figura.



c.1) Nei limiti della precisione consentita dal grafico, ricavare l'espressione analitica della funzione $G(s)$. Stimare in modo approssimato eventuali valori di δ.

$$G(s) = \frac{1600\,(s-0.5)(s+2)}{s(s+0.03)(s^2+4\,s+40^2)}.$$

c.2) Calcolare la risposta a regime $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:

$$x(t) = 3\,\sin(0.3\,t + \tfrac{\pi}{4}).$$

La risposta a regime del sistema $G(s)$ al segnale dato è la seguente:

$$\begin{aligned} y_\infty(t) &= 3\,|G(0.3\,j)|\,\sin(0.3\,t + \tfrac{\pi}{4} + \arg G(0.3\,j)) \\ &= 39.11\,\sin(0.3\,t + \tfrac{\pi}{4} - 16.76^\circ). \end{aligned}$$

Infatti si ha che $G(0.3j) = 13.04\,e^{-16.76^\circ j}$.

Soluzione:

c.1) La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$G(s) = \frac{1600\,(s-0.5)(s+2)}{s(s+0.03)(s^2+4\,s+40^2)}.$$

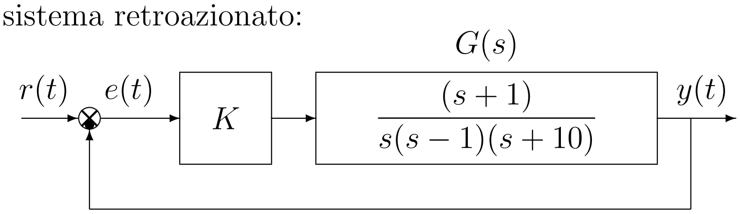
Il valore $K = 1600$ si determina calcolando il modulo γ dell'approssimante $G_\infty(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 40$:

$$|G_\infty(s)|_{s=j40} = \left|\frac{-K}{s^2}\right|_{s=j40} = \frac{K}{(40^2)} = \gamma = 1 \qquad \rightarrow \qquad K = 1600.$$

Il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati stabili è il seguente:

$$\delta = \frac{1}{2M_{\omega_n}} = \frac{1}{20} = 0.05.$$

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".
Sol. L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1\,G_1(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K\frac{(s+1)}{s(s-1)(s+10)} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$ é mostrato in Fig. 3. Il luogo delle radici ha due asintoti verticali. Il centro degli asintoti è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-10+1+1) = -4.$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola applicando il criterio di Routh alla seguente equazione caratteristica:

$$1 + K\frac{(s+1)}{s(s-1)(s+10)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 9\,s^2 + (K-10)s + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K-10 \\ 2 & 9 & K \\ 1 & 9(K-10)-K & \\ 0 & K & \end{array}$$

Il sistema retroazionato é stabile se

$$8K - 90 > 0, \qquad\qquad K > 0.$$

Il sistema retroazionato é stabile se

$$K > \frac{45}{4} = 11.25 = K^*$$

L'intersezione con l'asse immaginario si ha in corrispondenza della pulsazione:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{9}} = 1.118.$$

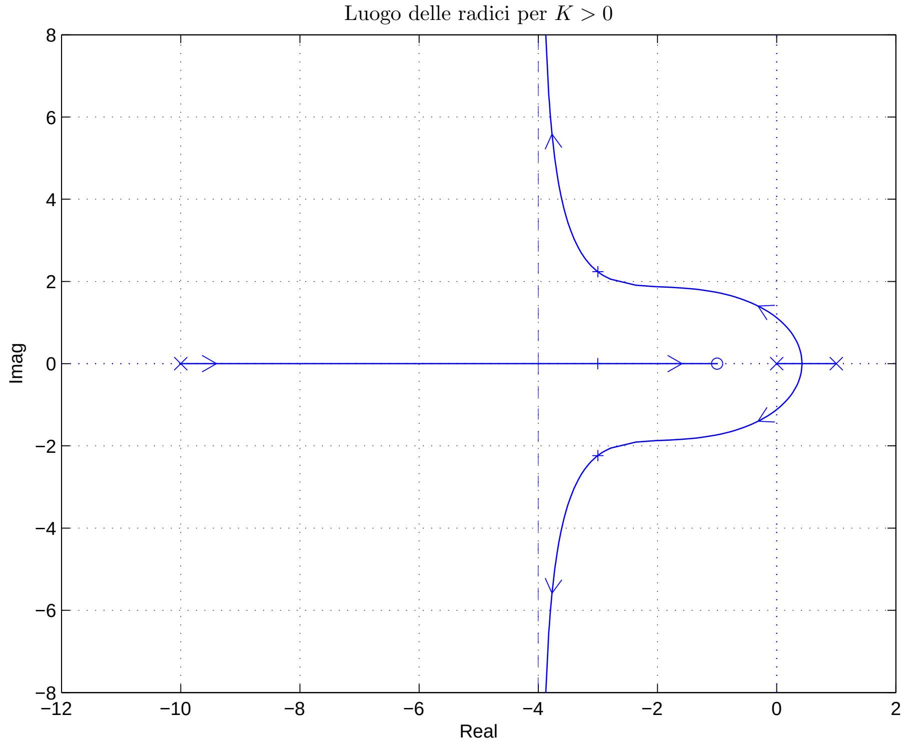


Figura 3: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ per $K = K_1 > 0$

d.2) Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{m\,s^4 + (m+1)s^3 + (m+3)s^2 + 3\,s + 1}$$

Utilizzando la metodologia del contorno delle radici mostrare come si spostano sul piano complesso i poli della funzione $G(s)$ al variare del parametro $m > 0$. Determinare la posizione di eventuali punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. I poli della funzione $G(s)$ sono le soluzioni della seguente equazione:

$$m\,s^4 + (m+1)s^3 + (m+3)s^2 + 3\,s + 1 = 0$$

che puó essere riscritta nel seguente modo $1 + m\,G_1(s) = 0$:

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + m\,s^2(s^2 + s + 1) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + m\,\frac{s^2(s^2 + s + 1)}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = 0$$

Mettendo in evidenza i poli e gli zeri della funzione $G_1(s)$ si ottiene:

$$1 + \frac{ms^2[(s+0.5)^2 + 0.866^2]}{(s+1)^3} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $m > 0$ è mostrato in Fig. 4. Nel contorno delle radici è presente un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo, percorso dall'infinito a finito.

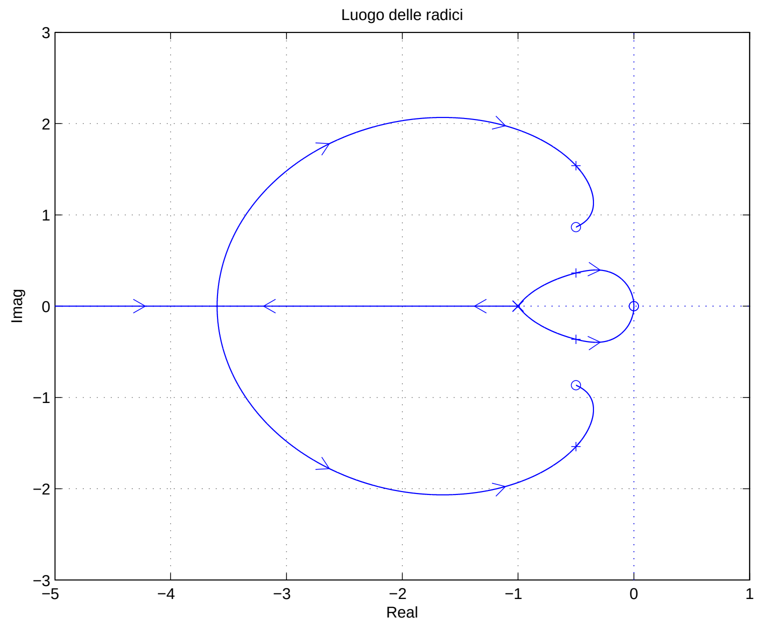
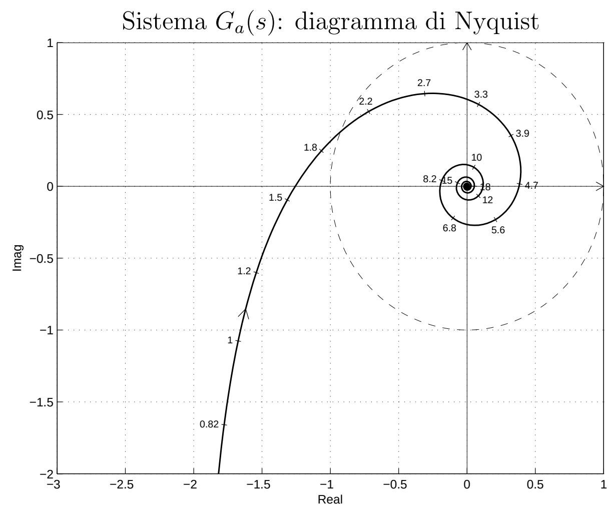


Figura 4: Luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare del parametro $m > 0$.

e) Per il sistema $G_a(s)$ riportato a fianco,progettare una rete ritardatrice in grado da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza $M_\alpha = 5$. Scegliere il valore della pulsazione ω che si ritiene più opportuno;



Sol. La specifica sul margine di ampiezza $M_\alpha = 5$ definisce completamente la posizione del punto $B = M_B\, e^{j\varphi_B}$: $M_B = 0.2$ e $\varphi_B = 180°$. La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 5. Il punto $A = G_b(j\omega_A)$ scelto per la sintesi della rete correttrice è quello corrispondente alla pulsazione $\omega_A = 1.2$:

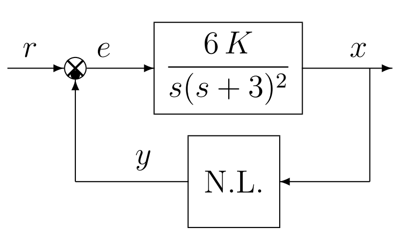
$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.655, \qquad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = 201.28°.$$

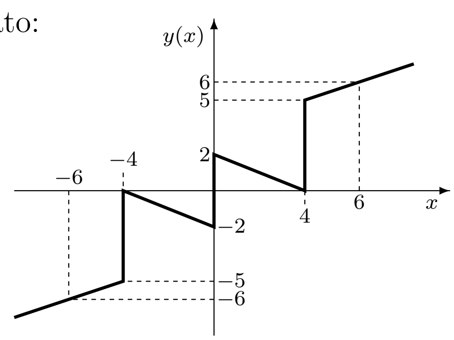
Sostituendo i valori di M, φ e $\omega = \omega_A$ all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri $\tau_1 = 1.862$ e $\tau_2 = 16.86$ della rete correttrice $C(s)$:

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.121, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -21.28° \qquad \rightarrow \qquad C_2(s) = \frac{(1 + 1.862\, s)}{(1 + 16.86\, s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)G_b(s)$ sono mostrati in Fig. 5.

f) Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:





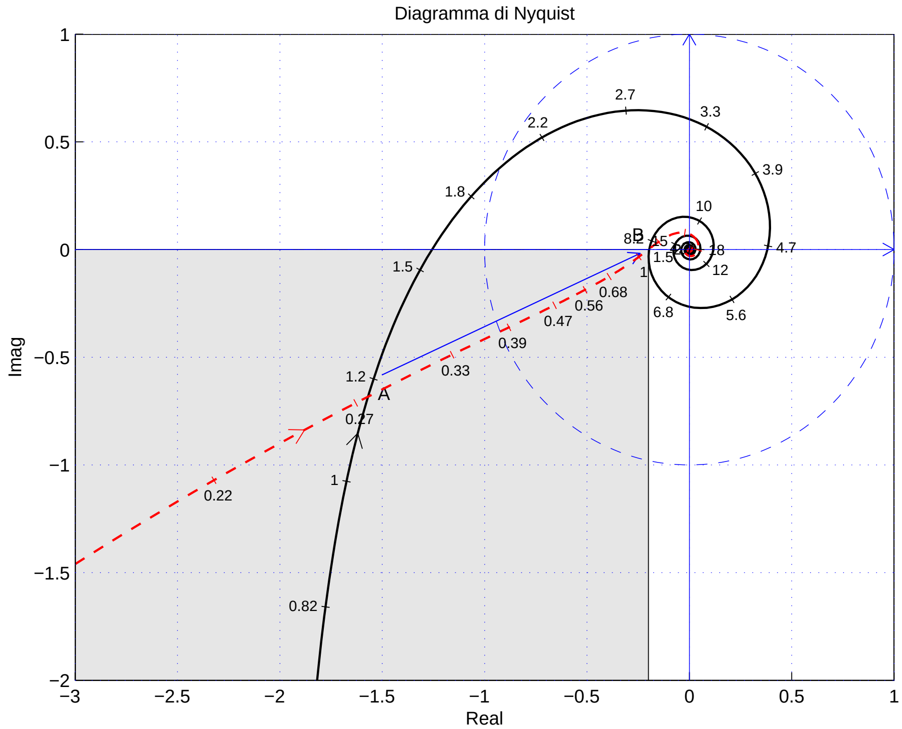


Figura 5: Diagrammi di Nyquisty delle funzioni $G_b(s)$ e $C_2(s)\,G_b(s)$.

f.1) Posto $K = 1$, determinare per quale valore r_1 dell'ingresso r il punto di lavoro del sistema retroazionato è $(x_1,\, y_1) = (6,\, 6)$.

f.2) Disegnare in modo qualitativo l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della non linearità $y(x)$ nell'intorno del punto $(0,\, 0)$. Utilizzare delle variabili (per esempio: m_1, m_2, ...) per rappresentare gli eventuali valori non noti minimi e massimi della funzione $F(X)$.

f.3) Discutere "qualitativamente" (in funzione anche dei parametri m_1, m_2, ...) l'esistenza o meno di cicli limite nel sistema retroazionato al variare del guadagno $K > 0$.

Soluzione

f.1) Il sistema $G_1(s)$ è di tipo 1 per cui si ha: $K_1 = \infty$, $K_2 = 1$ e $K_3 = 1$. La retta di carico della parte lineare del sistema è una retta orizzontale di ordinata:

$$y = \frac{r}{K_2 K_3} = r \qquad \rightarrow \qquad r_1 = 6.$$

f.2) L'andamento qualitativo della funzione descrittiva $F(X)$ è mostrato in Fig. 6.

Per $X < 4$ la funzione descrittiva $F(X)$ coincide con quella di un relè ideale sommata ad una retta di pendenza negativa:

$$F(X) = \frac{8}{\pi X} - \frac{1}{2}.$$

Il valore m_1 del primo minimo si ottiene dalla $F(X)$ in corrispondenza di $X = 4$:

$$m_1 = F(X)|_{X=4} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} = 0.1366.$$

Il valore m_2 del massimo intermedio può essere calcolato solo conoscendo la $F(X)$ per $X > 4$. Per $X \to \infty$ la $F(X)$ tende al valore finale minimo $m_3 = \frac{1}{2}$.

f.3) Per $K = 1$, il margine di ampiezza $\bar{K}^*$ del sistema $G_1(s)$ è $\bar{K}^* = 9$. Per $K \neq 1$, il margine di ampiezza K^* del sistema $K\,G_1(s)$ è $K^* = \frac{\bar{K}^*}{K}$. Al variare di K^* si possono avere le seguenti condizioni di funzionamento:

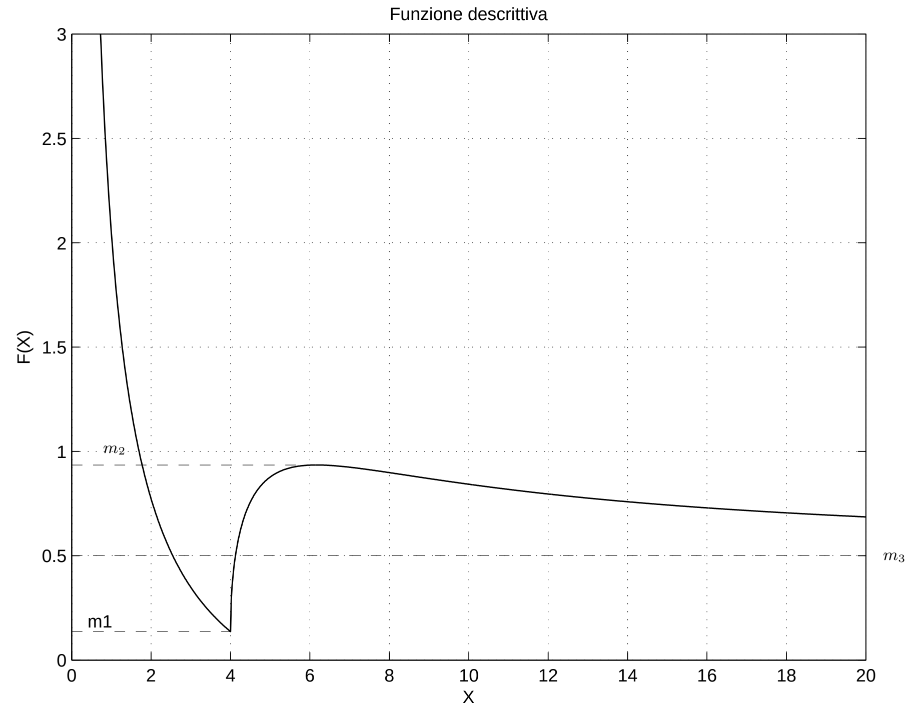


Figura 6: Andamento della funzione descrittiva $F(X)$.

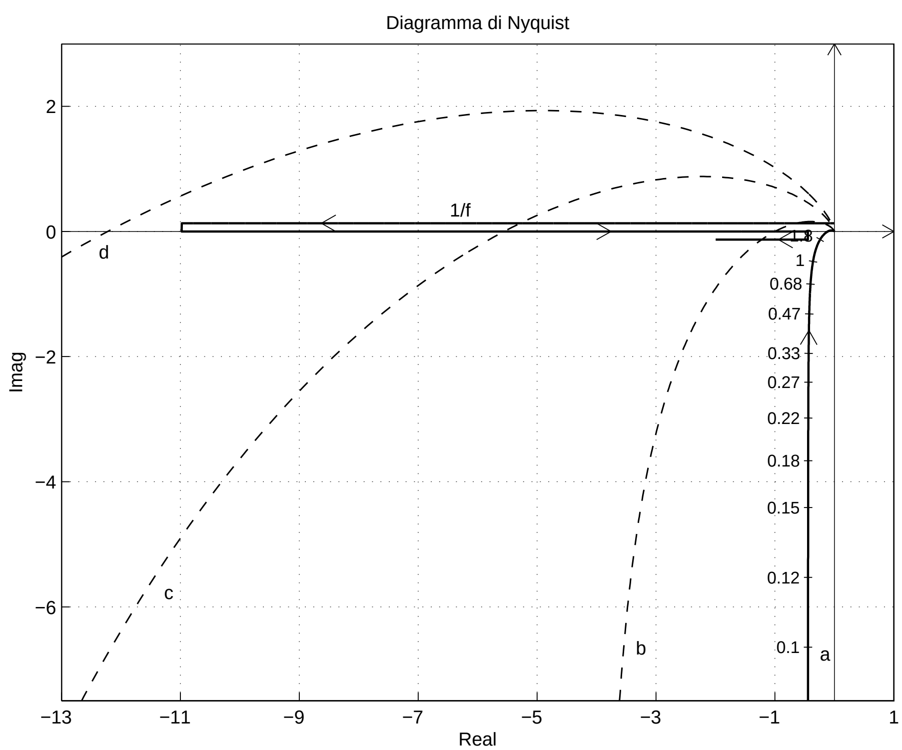


Figura 7: Discussione grafica al variare di K.

a) Per $K^* > m_2$, il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in un solo punto a cui corrisponde un ciclo limite stabile.

b) Per $m_3 < K^* < m_2$, il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in tre punti: i due punti esterni corrispondono a due cicli limite stabili, il punto intermedio rappresenta un ciclo limite instabile.

c) Per $m_1 < K^* < m_3$ il diagramma di Nyquist della $G_1(s)$ interseca la funzione $-1/F(X)$ in due punti: il primo corrisponde un ciclo limite stabile e il secondo ad un ciclo limite instabile.

d) Per $K^* < m_1$ la funzione $-1/F(X)$ è tutta interna al diagramma polare completo della funzione $G_1(s)$ per cui non vi sono cicli limite e il sistema retroazionato è instabile.

g) Utilizzando il metodo della "trasformazione bilineare", discretizzare la funzione

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{1+2\,s}{2+s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$.

Soluzione. Utilizzando il metodo della "trasformazione bilineare" si ottiene:

$$D(z) = \left.\frac{1+2\,s}{2+s}\right|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{0.2(1+z^{-1})+4\,(1-z^{-1})}{0.4(1+z^{-1})+2(1-z^{-1})} = \frac{4.2-3.8\,z^{-1}}{2.4-1.6\,z^{-1}} = \frac{M(z)}{E(z)}$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} m(k) &= \frac{1}{2.4}\,[1.6\,m(k-1)+4.2\,e(k)-3.8\,e(k-1)] \\ &= 0.6667\,m(k-1)+1.75\,e(k)-1.5833\,e(k-1). \end{aligned}$$

Controlli Automatici - Prima parte

16 Gennaio 2019 - Domande

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec. ‖ Altro.

Si risponda alle seguenti domande.

1. Calcolare la trasformata di Laplace $X(s)$ dei seguenti segnali temporali $x(t)$:

$$\mathcal{L}[3\,e^{5\,t}\sin(3\,t)] = \frac{9}{(s-5)^2+3^2}, \qquad \mathcal{L}[3\,t^3\,e^{-5t}] = \frac{18}{(s+5)^4}$$

2. Calcolare la trasformata di Laplace inversa $g(t)$ delle seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{s(s+2)(s-2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{2}{s}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s-2}\right] = -2+e^{-2t}+e^{2t}$$

3. Scrivere, in funzione dei segnali $x(t)$ e $y(t)$, l'equazione differenziale corrispondente alla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+2}{(s+3)(s+1)^2} \qquad \rightarrow \qquad \dddot{y}+5\,\ddot{y}+7\,\dot{y}+3\,y = \ddot{x}+2\,x$$

4. Calcolare la risposta a regime $y(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il seguente segnale sinusoidale $x(t)$:

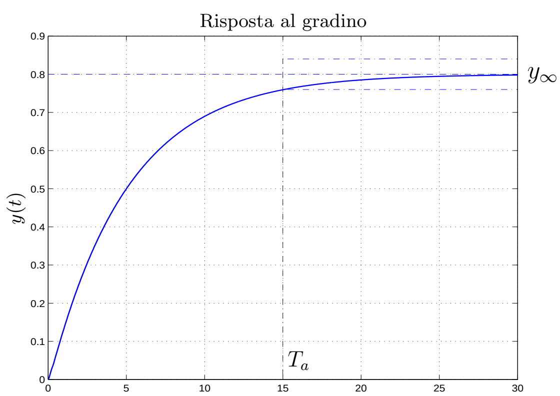
$$x(t) = 6+5\cos(3t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{s+1}{s+4}} \longrightarrow y(t) \simeq \tfrac{3}{2}+\sqrt{10}\cos(3t+\arctan 3-\arctan\tfrac{3}{4})$$

5. Disegnare l'andamento qualitativo $y_1(t)$ della risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{30\,(2+0.01\,s)(s^2+20\,s+160)}{(2\,s+10)(15\,s+3)(s^2+10\,s+400)}$$

Calcolare inoltre:
a) il valore a regime y_∞ della risposta al gradino per $t\to\infty$;
b) il tempo di assestamento T_a della risposta al gradino $y_1(t)$;
c) il periodo T_ω dell'eventuale oscillazione smorzata presente sul segnale $y_1(t)$:

$$y_\infty = 0.8, \qquad T_a \simeq 15\,\text{s}, \qquad T_\omega \simeq \infty\,\text{s}.$$



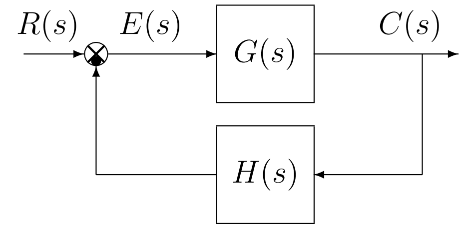
6. Calcolare l'evoluzione libera del sistema $3\dot{y}(t)+2\,y(t) = 0$ partendo dalla condizione iniziale $y(0) = 4$.
Applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$3\,(s\,Y(s)-4)+2\,Y(s) = 0 \quad\rightarrow\quad Y(s) = \frac{4}{s+0.667} \quad\rightarrow\quad y(t) = 4\,e^{-0.667\,t}.$$

7. Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ della funzione di risposta armonica del seguente sistema $G(s)$:

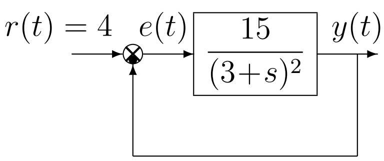
$$G(s) = \frac{(3\,s+4)}{s(s+2)}\,e^{-5\,s} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{16+9\omega^2}}{\omega\sqrt{\omega^2+4}} \\ \varphi(\omega) = \arctan\frac{3\omega}{4}-\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\omega}{2}-5\,\omega \end{cases}$$

8. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro α interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:

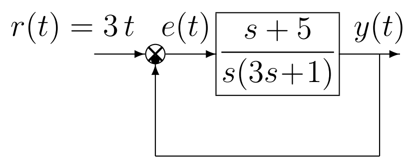


$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}\frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

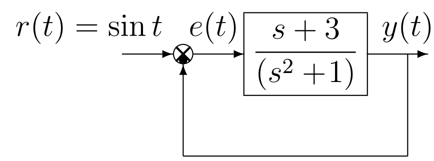
9. Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{36}{24} = 1.5$$



$$e(\infty) = \frac{3}{5}$$



$$e(\infty) = 0$$

10. Calcolare la $\mathcal{Z}$-trasformata $X(z)$ dei seguenti segnali $x(n)$:

$$x(n) = (-1)^n \quad \to \quad X(z) = \frac{z}{z+1} \qquad\qquad x(n) = 2\,n \quad \to \quad X(z) = \frac{2\,z}{(z-1)^2}$$

11. Il sistema dinamico discreto $G(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$

○ è asintoticamente stabile ⊗ è semplicemente stabile ○ è instabile

12. Il valore a regime $x(\infty)$ della sequenza $x(k)$ corrispondente alla funzione $X(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-0.5)}$ è:

○ $x(\infty) = 0$ ○ $x(\infty) = 1$ ○ $x(\infty) = 2$ ⊗ $x(\infty) = 4$

13. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema discreto $G(z)$ si determina nel seguente modo:

○ $F(\omega) = G(j\omega)$ ○ $F(\omega) = G(j\omega T)$ ○ $F(\omega) = G(e^{j\omega})$ ⊗ $F(\omega) = G(e^{j\omega T})$

14. Il contorno delle radici studia le curve sul piano complesso descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare (da 0 all'infinito)

○ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero
○ di un qualunque parametro presente all'interno dell'equazione caratteristica
⊗ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica

15. La funzione descrittiva $F(X)$ di un relè ideale di ampiezza Y_1 è:

○ $F(X) = \frac{\pi X}{4 Y_1}$ ○ $F(X) = \frac{\pi Y_1}{4 X}$ ○ $F(X) = \frac{4 X}{\pi Y_1}$ ⊗ $F(X) = \frac{4 Y_1}{\pi X}$

16. Tracciare i diagrammi di bode (moduli e fasi) di una rete ritardatrice $C(s) = \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\tau_2 s)}$, $(\tau_1 < \tau_2)$: