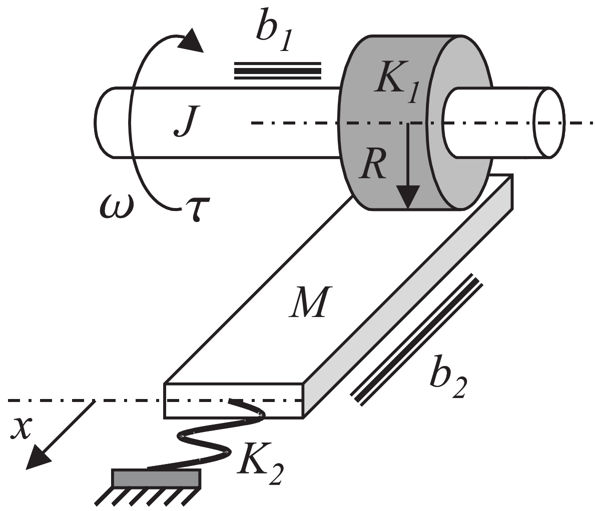
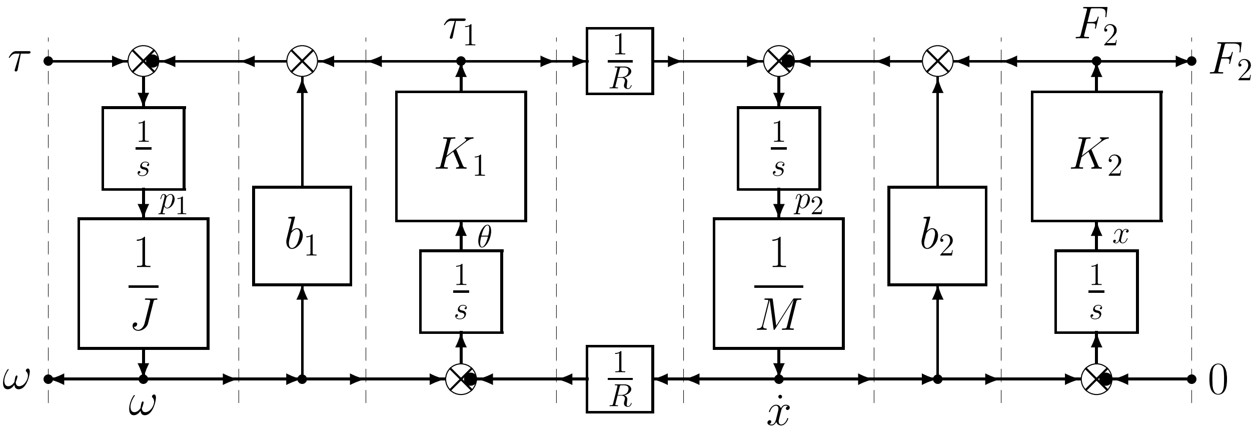
Sistema meccanico di trasmissione

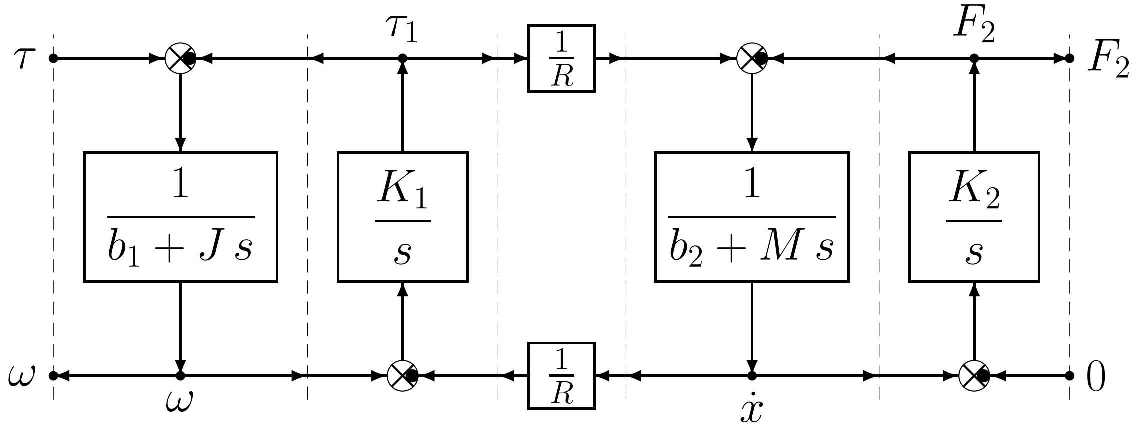
Si consideri il sistema meccanico mostrato in figura, costituito da un albero di inerzia J, che ruota a velocità ω, a cui è applicata la coppia esterna τ. Tramite un rullo elastico avente rigidità torsionale K_1 e raggio costante R, l'albero spinge una massa M che comprime una molla lineare con coefficiente di rigidità K_2.



La forza esercitata dalla molla è nulla quando la massa si trova nella posizione $x = 0$. L'inerzia e la massa sono soggette ad attrito viscoso con coefficienti di attrito lineare b_1 e b_2 rispettivamente. Il modello P.O.G. del sistema meccanico assegnato è il seguente:



oppure, in modo equivalente, il seguente:



La descrizione del sistema nello spazio degli stati è la seguente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\tau}_1 \\ \ddot{x} \\ \dot{F}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -b_1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & -b_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega \\ \tau_1 \\ \dot{x} \\ F_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\tau}_{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \omega & F_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso τ all'uscita F_2 si calcola facilmente utilizzando la formula di Mason :

$$G(s) = \frac{K_1 K_2 R}{a_4\, s^4 + a_3\, s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

dove:

$$\begin{aligned} a_4 &= J\, M\, R^2 \\ a_3 &= (b_2 J + b_1 M) R^2 \\ a_2 &= J\, K_1 + b_1\, b_2\, R^2 + J\, K_2\, R^2 + K_1\, M\, R^2 \\ a_1 &= b_1\, K_1 + b_2\, K_1\, R^2 + b_1\, K_2\, R^2 \\ a_0 &= K_1\, K_2\, R^2 \end{aligned}$$

Si giunge allo stesso risultato anche applicando la seguente formula:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{L}\, s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

<u>Nota</u>: se tutti gli elementi dissipativi sono nulli, $b_1 = b_2 = 0$, il sistema è conservativo e tutti i poli del sistema sono sull'asse immaginario.

$$G(s) = \frac{K_1 K_2 R}{J\, M\, R^2\, s^4 + (J\, K_1 + J\, K_2\, R^2 + K_1\, M\, R^2) s^2 + K_1\, K_2\, R^2}$$

<u>Nota</u>: condizione necessaria affinche' tutti i poli di un sistema dinamico siano sull'asse immaginario è che il polinomio caratteristico abbia solamente i termini di ordine pari o solamente i termini di ordine dispari. Il modulo dei poli sull'asse immaginario coincide con le pulsazioni di risonanza del sistema.