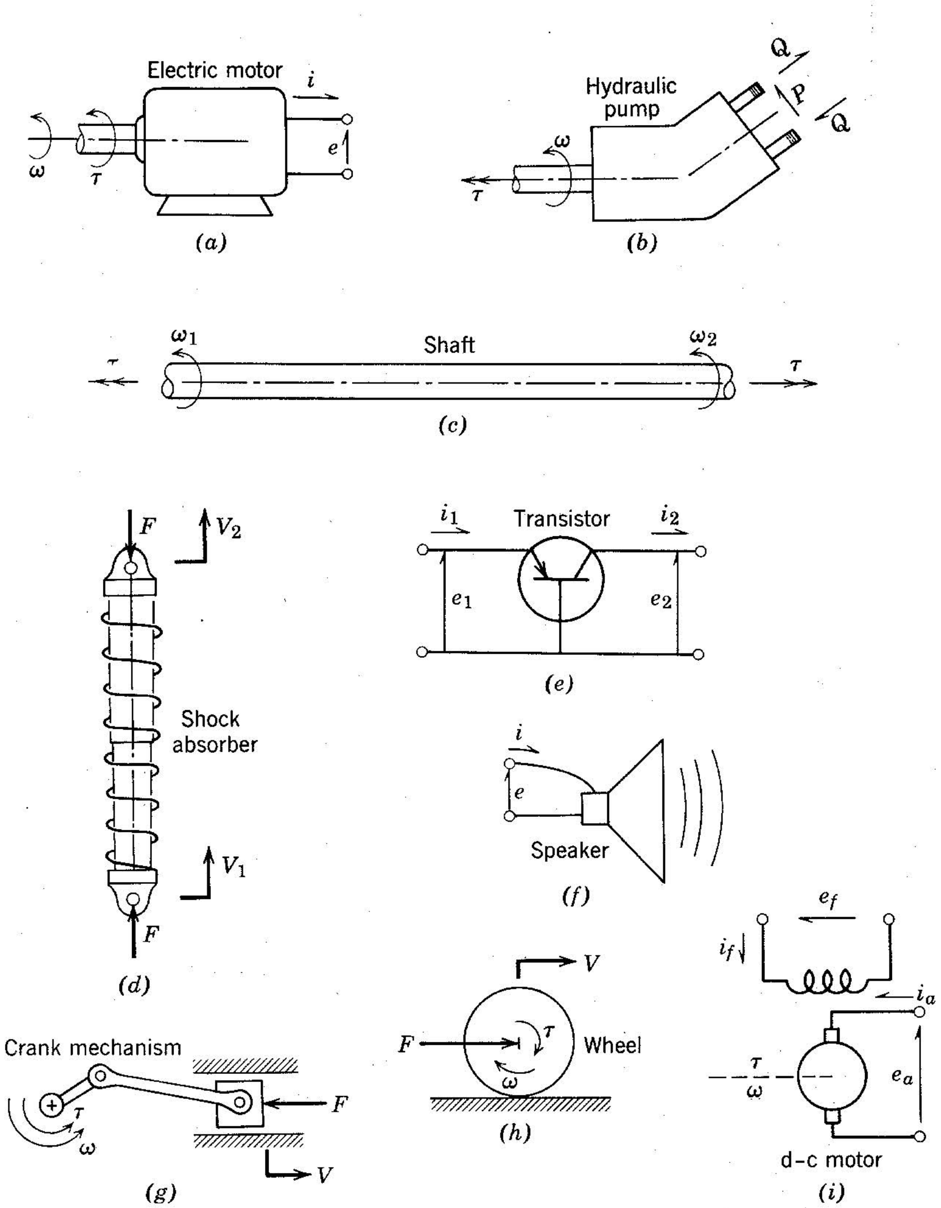
Modellistica grafica: Bond Graphs

• In qualsiasi campo energetico è sempre possibile scomporre il sistema in parti elementari che si interconnettono ad altre tramite delle "porte energetiche", attraverso le quali fluisce "potenza".

• Esempi pratici di sistemi fisici che interagiscono tra di loro tramite porte energetiche di potenza sono i seguenti:



Sistemi fisici illustrati: (a) motore elettrico; (b) pompa idraulica; (c) albero rotante; (d) ammortizzatore; (e) transistore; (f) altoparlante; (g) manovellismo di spinta; (h) ruota; (i) schema convenzionale di un motore ad eccitazione indipendente.

• Una rappresentazione di questo tipo si basa sul concetto di "multiporta": per ogni porta energetica vengono messe in evidenza due funzioni del tempo il cui prodotto rappresenta la potenza che fluisce attraverso quella particolare porta.

• Queste **variabili di potenza** sono spesso indicate in letteratura con i seguenti simboli e termini:

$$\textbf{sforzo} \iff \textbf{effort} \implies e(t)$$

$$\textbf{flusso} \iff \textbf{flow} \implies f(t)$$

• I significati che $e(t)$ ed $f(t)$ assumono nei diversi campi energetici di comune interesse nella tecnica sono i seguenti:

Campo	Effort	$e(t)$	Unità	Flusso	$f(t)$	Unità
Meccanico Traslazionale	Forza	$F(t)$	[N]	Velocità	$v(t)$	[m/sec]
Meccanico Rotazionale	Coppia	$\tau(t)$	[N m]	Velocità angolare	$\omega(t)$	[rad/sec]
Idraulico	Pressione	$P(t)$	[Pa]	Portata vol.	$Q(t)$	[m^3/sec]
Elettrico	Tensione	$e(t)$	[V]	Corrente	$i(t)$	[A]

• La proprietà peculiare di queste due variabili "complementari" $e(t)$ ed $f(t)$ è che il loro prodotto rappresenta la potenza istantanea $P(t)$ che transita attraverso quella particolare porta energetica:

$$P(t) = e(t) \cdot f(t)$$

• Spesso, per descrivere un sistema dinamico, oltre alle due variabili di potenza $e(t)$ ed $f(t)$ si è soliti utilizzare altre le seguenti due **variabili energia**:

$$\textbf{momento} \iff \textbf{momentum} \implies p(t)$$

$$\textbf{spostamento} \iff \textbf{displacement} \implies q(t)$$

• Le variabili energia $p(t)$ e $q(t)$ si ottengono dalle variabili di potenza $e(t)$ e $f(t)$ mediante integrazione nel tempo:

$$p(t) \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{t} e(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} e(t)\,dt + p_0$$

$$q(t) \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt + q_0$$

avendo indicato con $p_0 = p(t_0)$ e $q_0 = q(t_0)$ le condizioni iniziali.

• I significati fisici del momentum e del displacement nei diversi campi energetici sono i seguenti:

Campo	Momuntum $p(t)$	Unità	Displacement $f(t)$	Unità
Meccanico Traslazionale	momento $p(t)$	[N sec]	Spostamento $x(t)$	[m]
Meccanico Rotazionale	momento angolare $p_\tau(t)$	[N m sec]	Angolo $\theta(t)$	[rad]
Idraulico	Pressione idros. $p_p(t)$	[Pa sec]	Volume $V(t)$	$[m^3]$
Elettrico	Flusso $\phi(t)$	[V sec]	Carica $q(t)$	[C]

• Le grandezze $p(t)$ e $q(t)$ vengono dette "variabili energia" perché l'energia accumulata negli elementi dinamici può essere espressa nel modo seguente:

$$E(t) \triangleq \int_{-\infty}^{t} P(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{p(t)} f(p)\,\mathrm{d}p = \int_{-\infty}^{q(t)} e(q)\,\mathrm{d}q$$

• Queste relazioni si ottengono ricordando che:

$$P(t) = e(t)\,f(t), \qquad \mathrm{d}p = e\cdot\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}q = f\cdot\mathrm{d}t$$

• Nella modellistica dinamica dei sistemi fisici è importante definire correttamente le *Casual Stroke*, cioè i rapporti di causa-effetto che legano fra di loro i flussi di energia.

• Nel caso di un motore in corrente continua, per esempio, la tensione di armatura $v_a(t)$ è solitamente la causa, mentre la corrente di armatura $i_a(t)$ nel motore è un effetto. Analogamente la coppia motrice τ erogata dal motore eroga è solitamente considerata la causa ($\tau\ \alpha\ \phi_e\cdot\phi_f$) della velocità angolare ω del motore stesso.

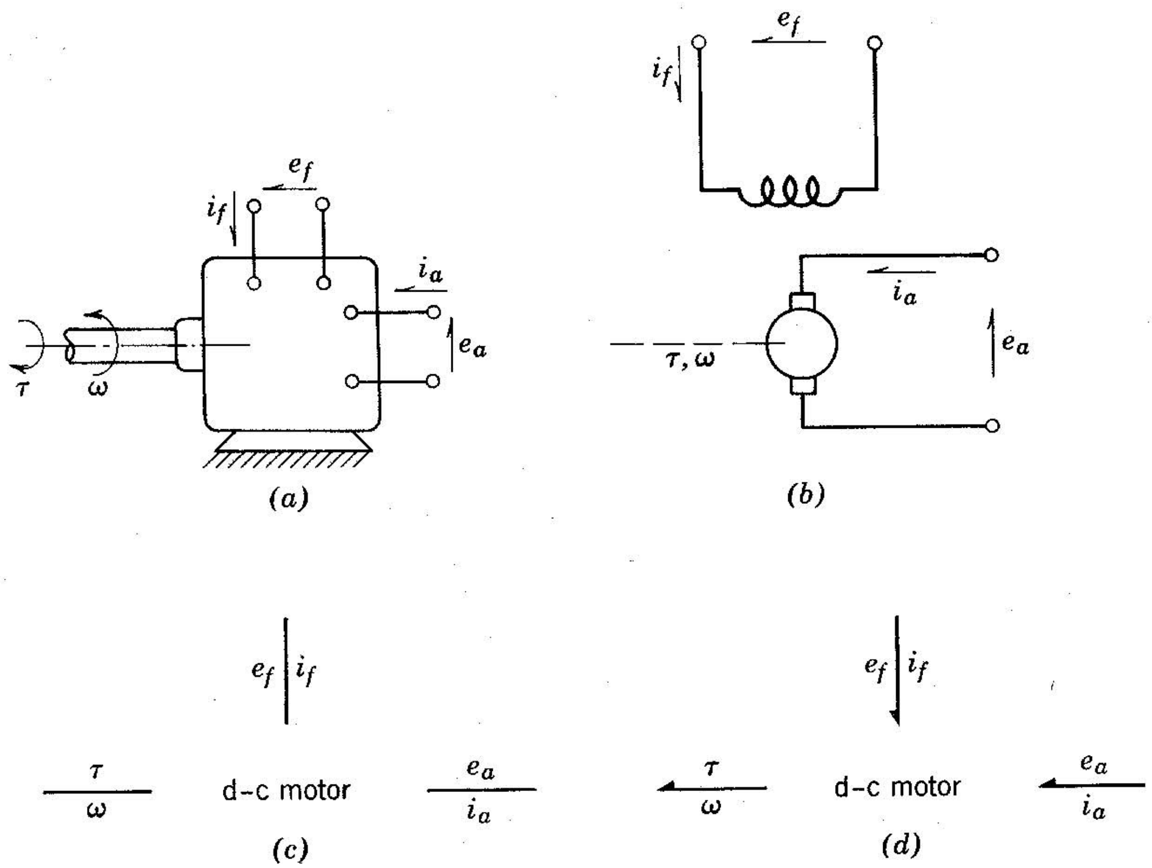
• Naturalmente nulla vieta di invertire il legami di causalità e fare funzionare il motore come un generatore di tensione, in tale caso si scambiano tutte le direzioni dei flussi di energia, ma non necessariamente i rapporti causa-effetto.

• Questo per dire che la direzione del flusso di potenza è, in generale, un concetto indipendente dalla causalità.

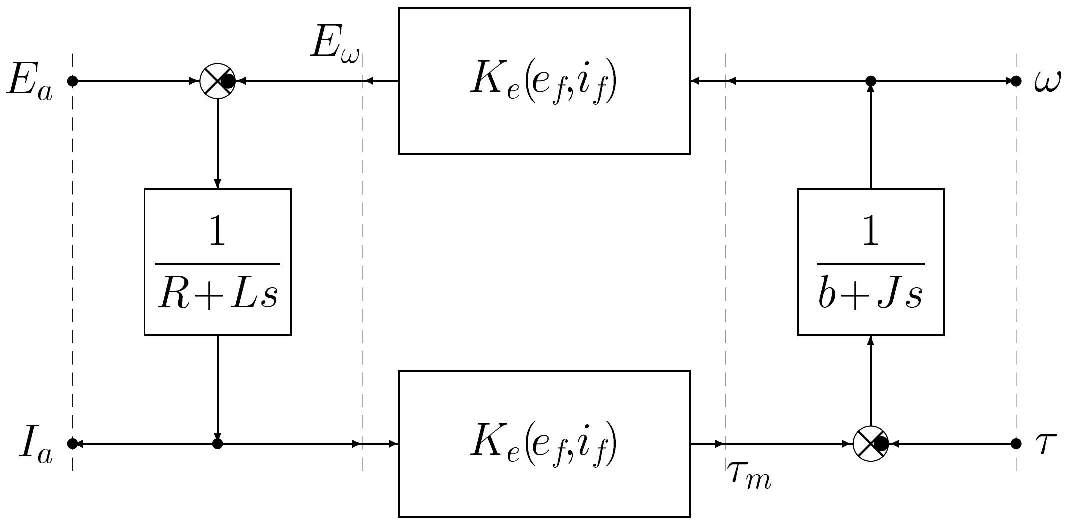
• Da un punto di vista modellistico-simulativo i rapporti causa-effetto che devono essere previlegiati (perchè sono gli unici fisicamente realizzabili) sono quelli di tipo "integrale": la variabile "effetto" si ottiene tramite integrazione della variabile "causa".

• Esempio di modellazione di un motore elettrico in corrente continua, ad eccitazione indipendente.

1) Modello "Bond Graphs" (BG):



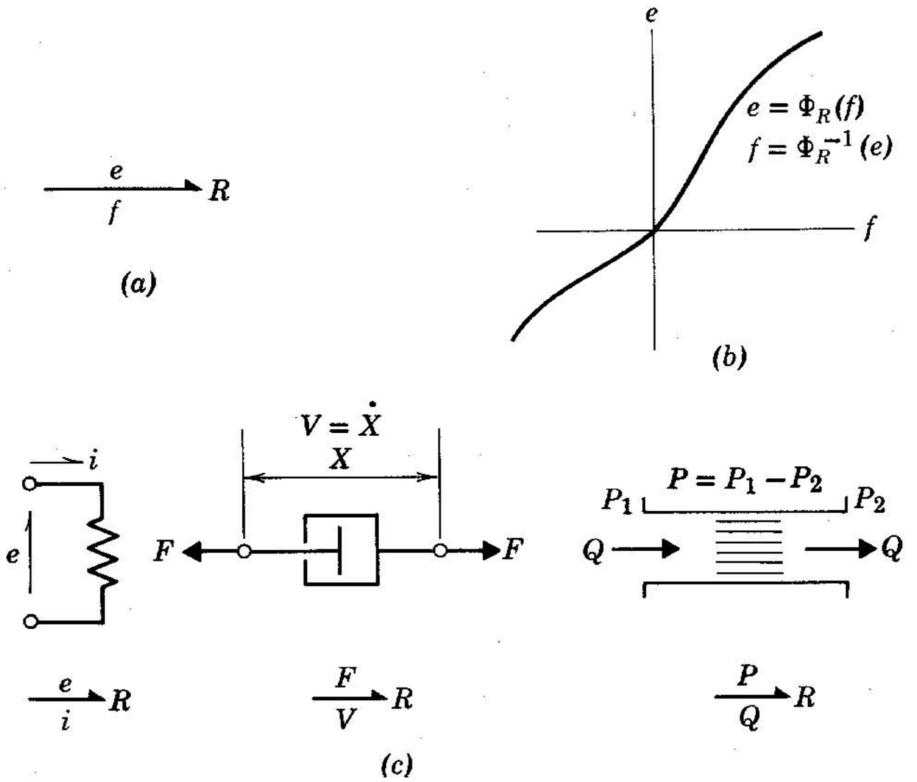
2) Modello "Power-Oriented Graphs" (POG):



• Nel modello POG le variabili di campo e_f e i_f intervengono "staticamente" a variare la sola costante di coppia (costante c.e.m.) K_e.

• In ogni campo energetico è possibile individuare un elemento statico-dissipativo (Resistore) e due elementi dinamici conservativi (Condensatore e Induttore).

• Rappresentazioni grafiche dei **Resistori** nei diversi ambiti energetici:



• Relazioni costitutive dei Resistori nei diversi ambiti energetici:

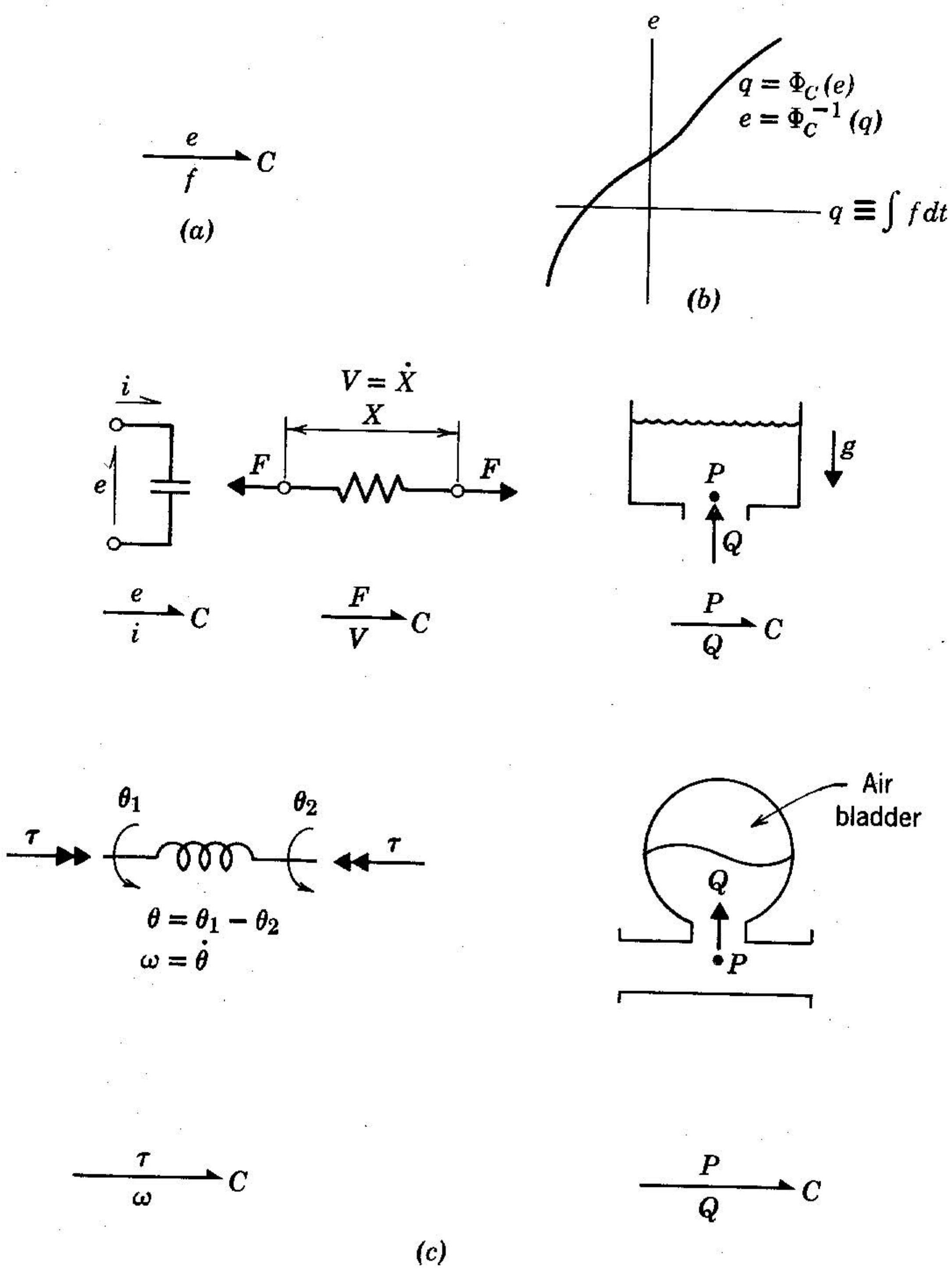
TABLE 3.1. The 1-Port Resistor, $\xrightarrow[f]{e} R$

	General Relation	Linear Relation	Units for Linear Resistance Parameter: English	Metric: SI	Metric: Engineering
Generalized variables	$e = \Phi_R(f)$ $f = \Phi_R^{-1}(e)$	$e = Rf$ $f = Ge = e/R$	$[R] = [e]/[f]$	$[R] = [e]/[f]$	$[R] = [e]/[f]$
Mechanical translation	$F = \Phi(V)$ $V = \Phi^{-1}(F)$	$F = bV$	$[b]$ = [lb-sec]/[ft]	$[b]$ = [N-sec]/[m]	$[b]$ = [kgf-sec]/[m]
Mechanical rotation	$\tau = \Phi(\omega)$ $\omega = \Phi^{-1}(\tau)$	$\tau = c\omega$	$[c]$ = [ft-lb-sec]	$[c]$ = [N-m-sec]	$[c]$ = [kgf-m-sec]
Hydraulic systems	$P = \Phi(Q)$ $Q = \Phi^{-1}(P)$	$P = RQ$	$[R]$ = [lb-sec]/[ft^5]	$[R]$ = [N-sec]/[m^5]	$[R]$ = [kgf-sec]/[m^5]
Electrical systems	$e = \Phi(i)$ $i = \Phi^{-1}(e)$	$e = Ri$ $i = Ge$		$[R]$ = [V/A] = [Ω] = [ohm]	

• I resistori possono anche essere non lineari: $e(t) = \Phi_R(f(t))$.

• Il resistore è un componente dissipativo che assorbe energia e la trasforma tipicamente in calore.

• Rappresentazioni grafiche dei **Condensatori** nei diversi ambiti energetici:



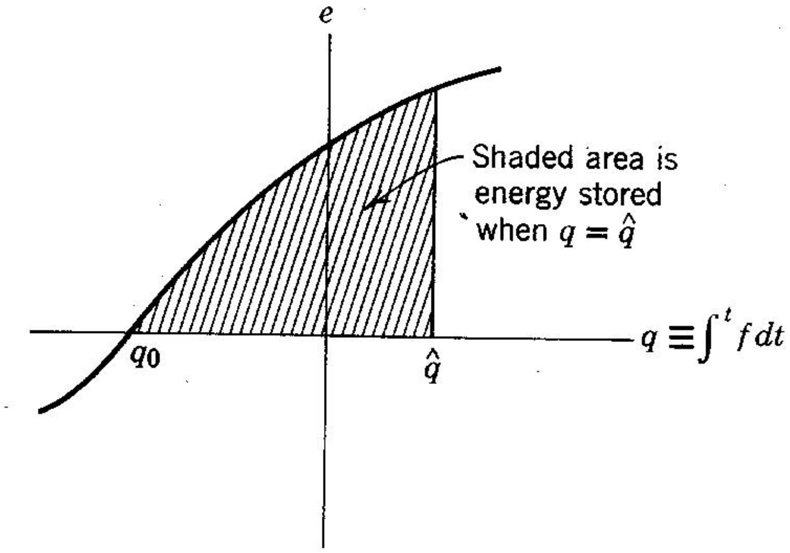
• Sono elementi dinamici (non dissipativi) che immagazzinano temporaneamente energia, per cederla (idealmente tutta) in un secondo tempo.

- Relazioni costitutive dei Condensatori nei diversi ambiti energetici:

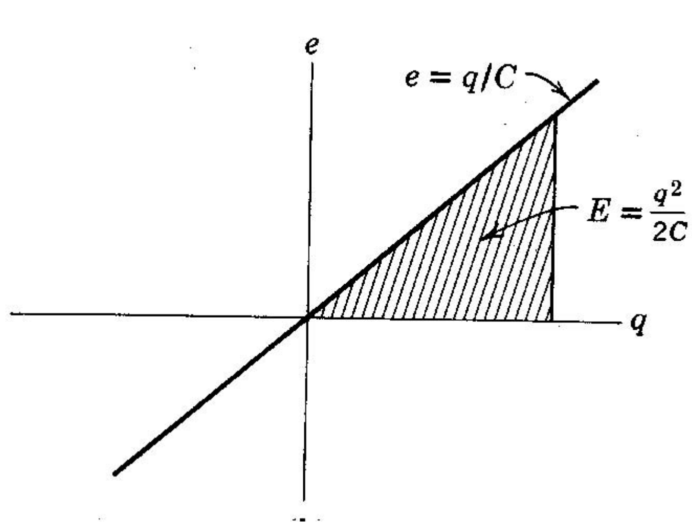
TABLE 3.2. The 1-Port Capacitor, $\xrightarrow[f=\dot q]{e} C$

	General Relation	Linear Relation	Units for Linear Capacitance Parameters: English	Metric: SI	Metric: Engineering
Generalized	$q=\Phi_C(e)$	$q=Ce$	$[C]=[q]/[e]$	$[C]=[q]/[e]$	$[C]=[q]/[e]$
	$e=\Phi_C^{-1}(q)$	$e=q/C$	$[1/C]=[e]/[q]$	$[1/C]=[e]/[q]$	$[1/C]=[e]/[q]$
Mechanical	$X=\Phi_C(F)$	$X=CF$	$[C]=[\text{ft}]/[\text{lb}]$	$[C]=[\text{m/N}]$	$[C]=[\text{m/kgf}]$
translation	$F=\Phi_C^{-1}(X)$	$F=kX$	$[k]=[\text{lb}]/[\text{ft}]$	$[k]=[\text{N/m}]$	$[k]=[\text{kgf/m}]$
Mechanical	$\theta=\Phi_C(\tau)$	$\theta=C\tau$	$[C]=[\text{rad/ft-lb}]$	$[C]=[\text{rad/N-m}]$	$[C]=[\text{rad/kgf-m}]$
rotation	$\tau=\Phi_C^{-1}(\theta)$	$\tau=k\theta$	$[k]=[\text{ft-lb/rad}]$	$[k]=[\text{N-m/rad}]$	$[k]=[\text{kgf-m/rad}]$
Hydraulic	$V=\Phi_C(P)$	$V=CP$	$[C]=[\text{ft}^5/\text{lb}]$	$[C]=[\text{m}^5/\text{N}]$	$[C]=[\text{m}^5/\text{kgf}]$
systems	$P=\Phi_C^{-1}(V)$	$P=V/C$			
Electrical	$q=\Phi_C(e)$	$q=Ce$		$[C]=[\text{A-sec/V}]$	
systems	$e=\Phi_C^{-1}(q)$	$e=q/C$		$=[\text{farad}]=[\text{F}]$	

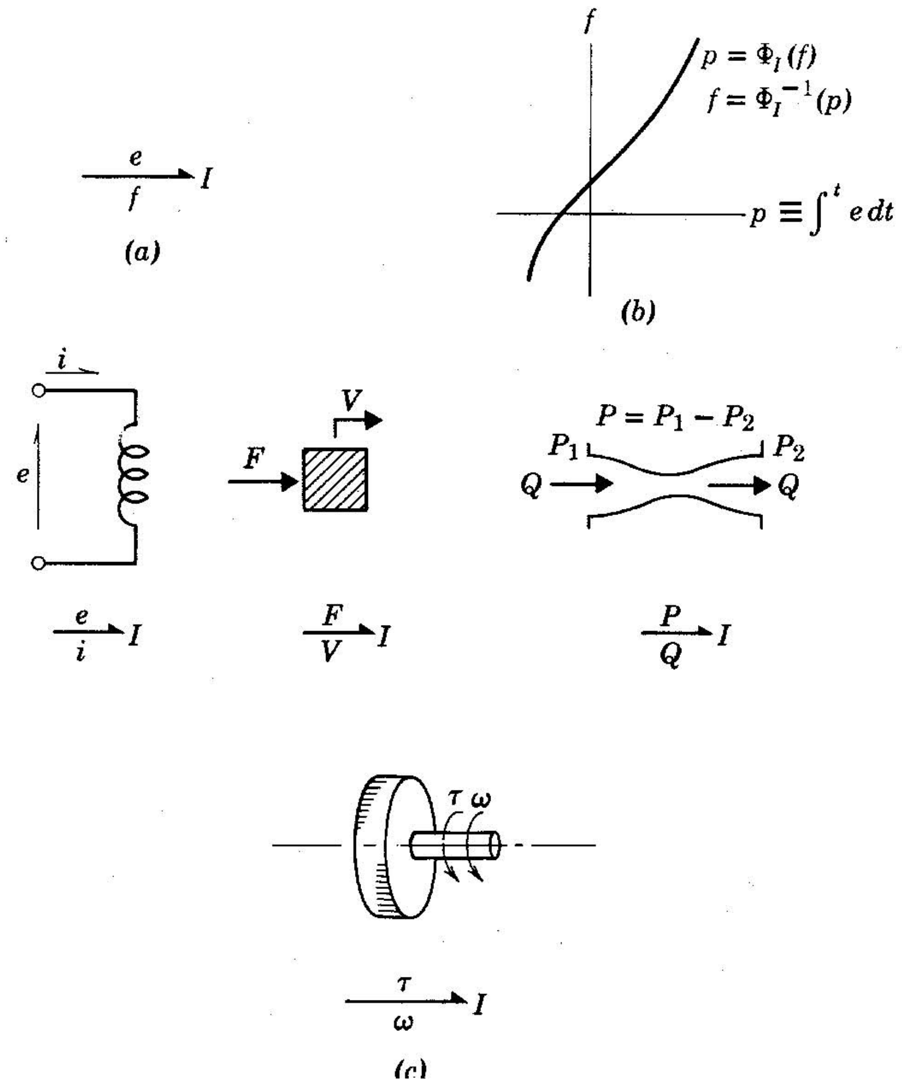
- Questi elementi dinamici possono essere lineari o non lineari:



(a)



- Rappresentazioni grafiche degli **Induttori** nei diversi ambiti energetici:



- Relazioni costitutive degli Induttori nei diversi ambiti energetici:

TABLE 3.3. The 1-Port Inertia, $\xrightarrow[f]{e=p} I$

	General Relation	Linear Relation	Units for Linear Inertance Parameters: English	Metric: SI	Metric: Engineering
Generalized variables	$p=\Phi_I(f)$ $f=\Phi_I^{-1}(p)$	$p=If$ $f=p/I$	$[I]=[p]/[f]$ $[1/I]=[f]/[p]$	$[I]=[p]/[f]$ $[1/I]=[f]/[p]$	$[I]=[p]/[f]$ $[1/I]=[f]/[p]$
Mechanical translation	$p=\Phi_I(V)$ $V=\Phi_I^{-1}(p)$	$p=mV$ $V=p/m$	$[m]=[\text{lb-sec}^2]/[\text{ft}]$	$[m]=[\text{N-sec}^2/\text{m}]$	$[m]=[\text{kgf-sec}^2/\text{m}]$
Mechanical rotation	$p_\tau=\Phi_I(\omega)$ $\omega=\Phi_I^{-1}(p_\tau)$	$p_\tau=J_\omega$ $\omega=p_\tau/J$	$[J]=[\text{ft-lb-sec}^2]$	$[J]=[\text{N-m-sec}^2]$	$[J]=[\text{kgf-m-sec}^2]$
Hydraulic systems	$p_p=\Phi_I(Q)$ $Q=\Phi_I^{-1}(p_p)$	$p_p=IQ$ $Q=p_p/I$	$[I]=[\text{lb-sec}^2/\text{ft}^5]$	$[I]=[\text{N-sec}^2/\text{m}^5]$	$[I]=[\text{kgf-sec}^2/\text{m}^5]$
Electrical systems	$\lambda=\Phi_I(i)$ $i=\Phi_I^{-1}(\lambda)$	$\lambda=Li$ $i=\lambda/L$		$[L]=[\text{V-sec/A}]$ $=[\text{henrys}]=[\text{H}]$	

- Simboli Bond Graphs per descrivere le "sorgenti" di segnale:

TABLE 3.4

	Bond-Graph Symbol	Defining Relation
Generalized variables	$S_e \rightharpoonup$	$e(t)$ given, $f(t)$ arbitrary
	$S_f \rightharpoonup$	$f(t)$ given, $e(t)$ arbitrary
Mechanical translation	$S_F \rightharpoonup$	$F(t)$ given, $V(t)$ arbitrary
	$S_V \rightharpoonup$	$V(t)$ given, $F(t)$ arbitrary
Mechanical rotation	$S_\tau \rightharpoonup$	$\tau(t)$ given, $\omega(t)$ arbitrary
	$S_\omega \rightharpoonup$	$\omega(t)$ given, $\tau(t)$ arbitrary
Hydraulic systems	$S_p \rightharpoonup$	$P(t)$ given, $Q(t)$ arbitrary
	$S_Q \rightharpoonup$	$Q(t)$ given, $P(t)$ arbitrary
Electrical systems	$S_e \rightharpoonup$	$e(t)$ given, $i(t)$ arbitrary
	$S_i \rightharpoonup$	$i(t)$ given, $e(t)$ arbitrary

- Bond Graphs. Causal Stroke: rappresentazione "sintetica" ed "estesa":

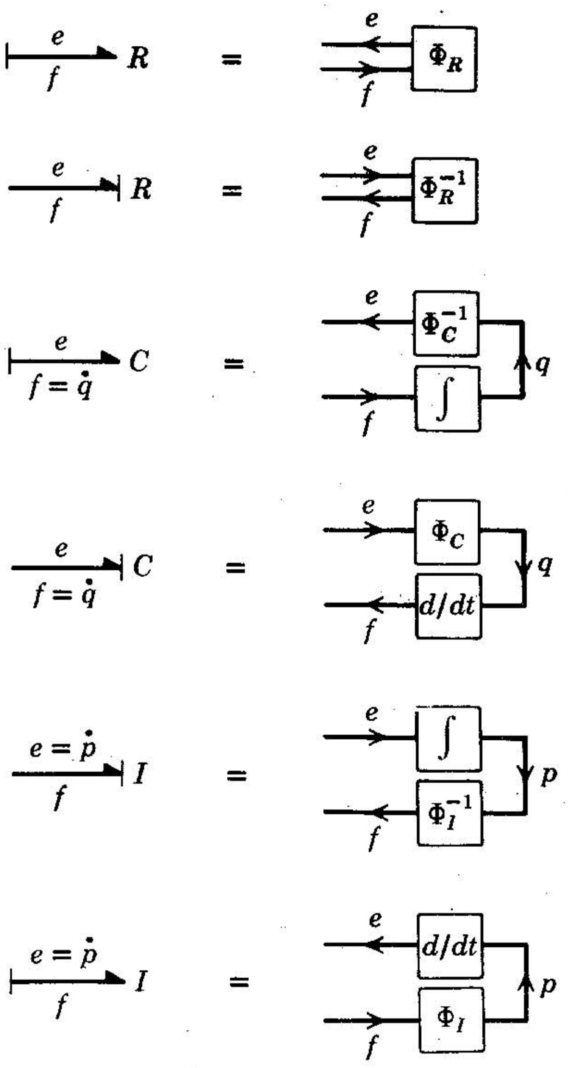


Figure 3.13. Block diagrams for 1-ports.

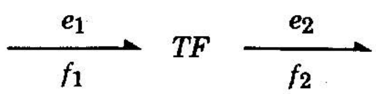
• Elementi di connessione: il **Trasformatore** e il **Giratore**.

• Il **Trasformatore** è un elemento non dissipativo che trasforma, a parità di potenza, due variabili $e_1(t)$, $f_1(t)$ di ingresso nelle corrispondenti variabili di uscita $e_2(t)$, $f_2(t)$ secondo la relazione:

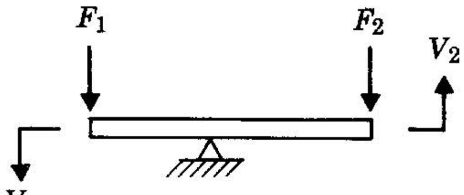
$$e_2(t) = \frac{e_1(t)}{m}, \qquad\qquad f_2(t) = m\, f_1(t)$$

dove il parametro m rappresenta il modulo di trasformazione.

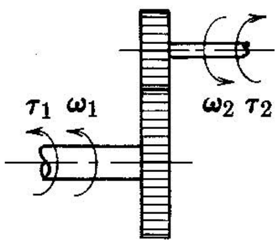
• Esempi di "Trasformatori" nei diversi campi energetici



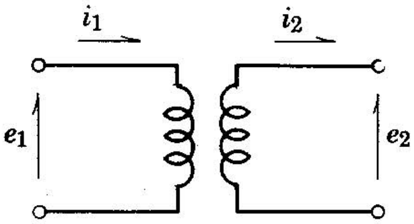
(a)



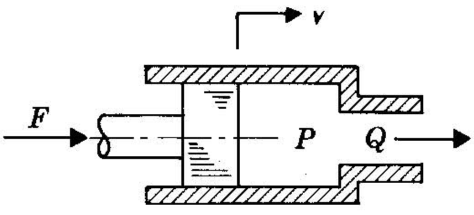
(b)



(c)



(d)



(e)

• La cascata di due trasformatori è ancora un trasformatore:

$$\xrightarrow[f_1(t)]{e_1(t)} TF_1 \xrightarrow[f_2(t)]{e_2(t)} TF_2 \xrightarrow[f_3(t)]{e_3(t)} \equiv \xrightarrow[f_1(t)]{e_1(t)} TF_3 \xrightarrow[f_3(t)]{e_3(t)}$$

• Il **Giratore** è un elemento non dissipativo che trasforma, a parità di potenza, due variabili $e_1(t)$, $f_1(t)$ di ingresso nelle corrispondenti variabili di uscita $e_2(t)$, $f_2(t)$ secondo la relazione:

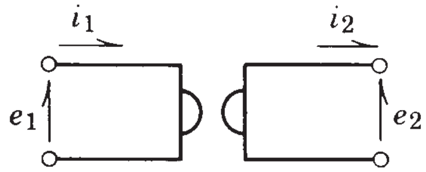
$$e_2(t) = r\, f_1(t), \qquad\qquad f_2(t) = \frac{e_1(t)}{r}$$

dove il parametro r rappresenta il modulo del giratore.

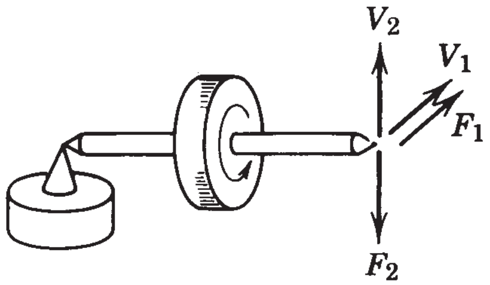
• Esempi di "Giratore" nei diversi campi energetici:

$$\xrightarrow[f_1]{e_1} GY \xrightarrow[f_2]{e_2}$$

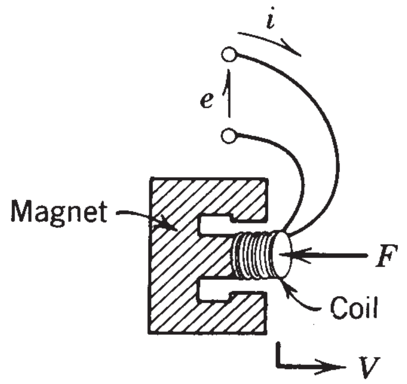
(a)



(b)



(c)



(d)

• La cascata di due giratori è un trasformatore.

• La cascata di un trasformatore e di un giratore è equivalente ad un giratore.

• In ambito Bond Graphs esistono poi i **trasformatori modulati** e i **giratori modulati**:

$$\xrightarrow[f_1]{e_1} \overset{\downarrow m}{MTF} \xrightarrow[f_2]{e_2} \quad \text{and} \quad \xrightarrow[f_1]{e_1} \overset{\downarrow r}{MGY} \xrightarrow[f_2]{e_2}.$$

• Elementi giunzione a 3 porte: la **giunzione 0** e il la **giunzione 1**.

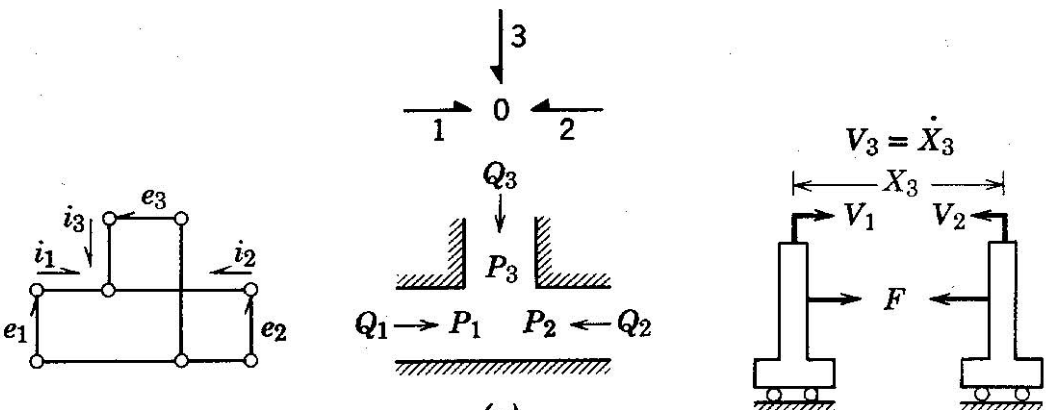
• La **giunzione 0** è un elemento non dissipativo che trasforma le variabili di ingresso secondo la relazione:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t), \qquad f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0$$

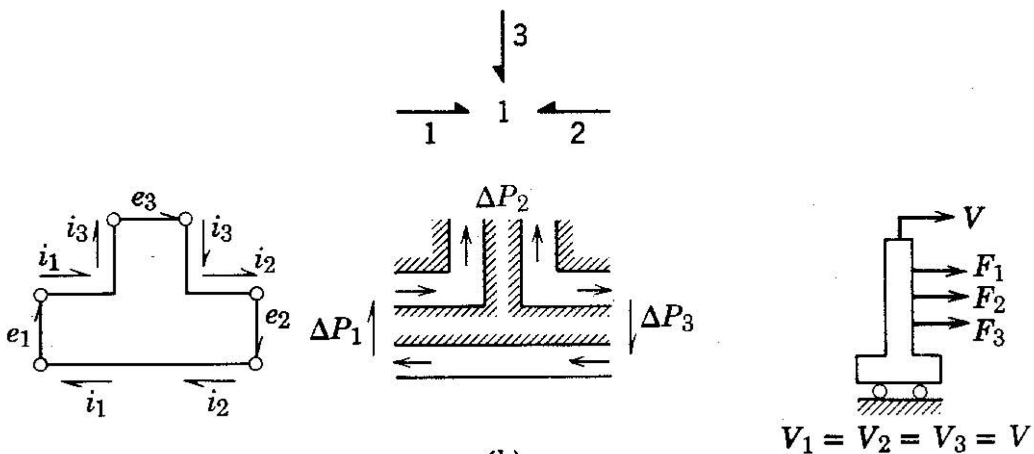
• La **giunzione 1** è un elemento non dissipativo che trasforma le variabili di ingresso secondo la relazione:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t), \qquad e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0$$

• Esempi di **giunzione 0** e **giunzione 1** nei diversi campi energetici:



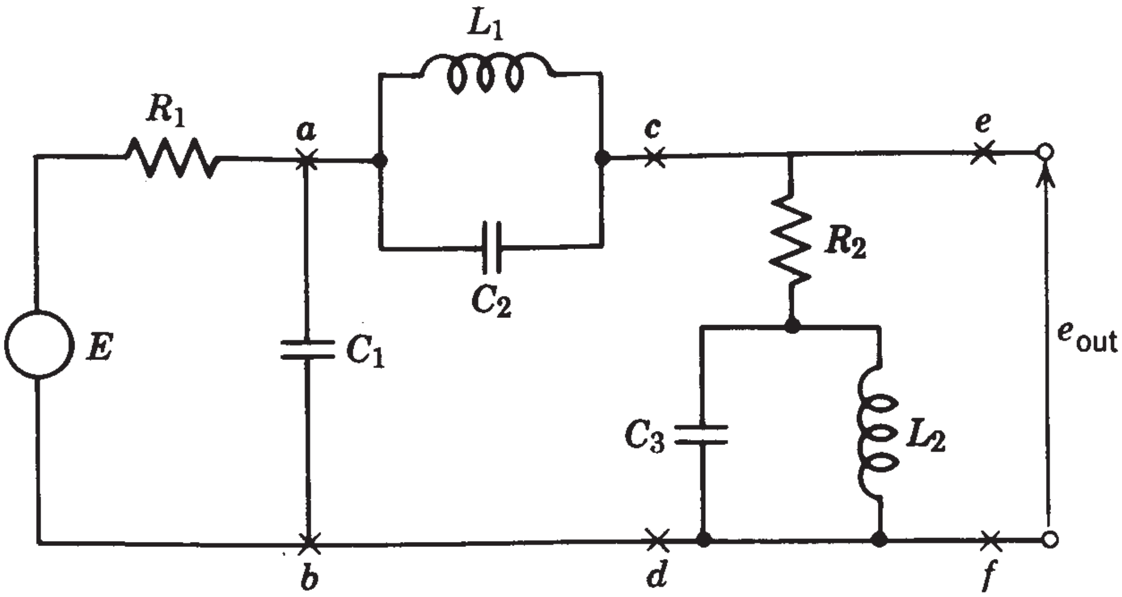
(a)



(b)

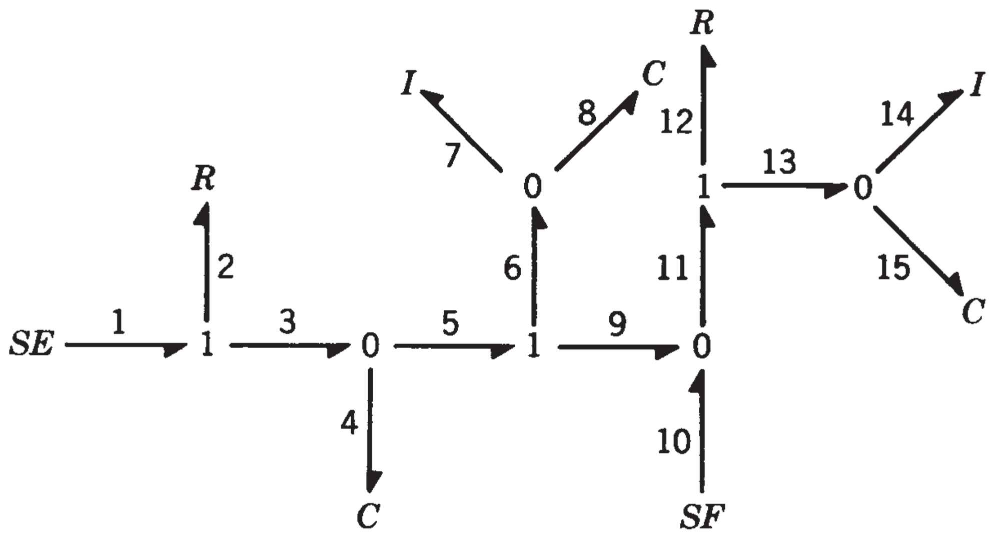
• Questi elementi di giunzione a tre porte servono per realizzare quei collegamenti che, in ambito elettrico, sono indicati come *serie* e *parallelo*.

- Esempi di modellistica grafica utilizzando i Bond Graphs
- Un circuito elettrico. Schema fisico:



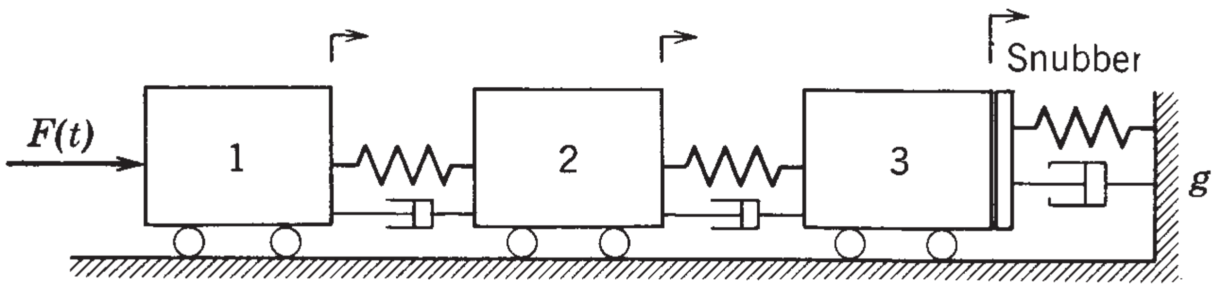
(a)

Modello Bong Graphs:



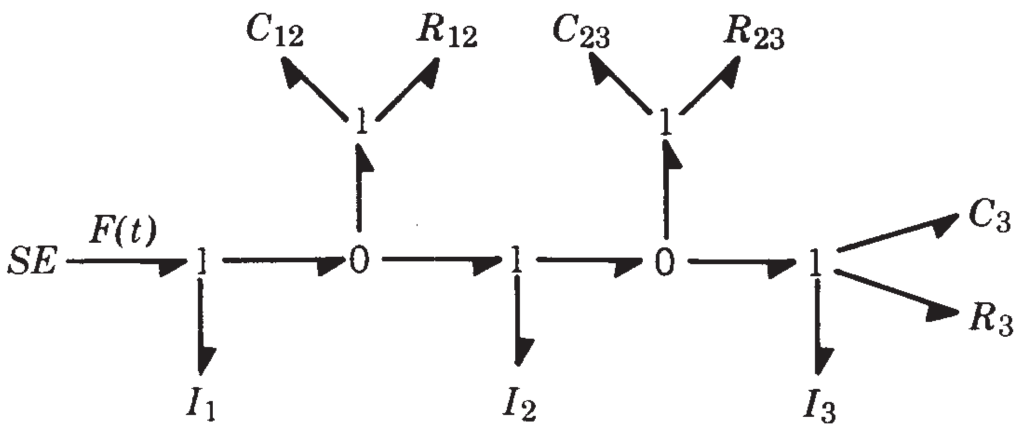
(d)

- Un sistema meccanico. Schema fisico:



(a)

Modello Bong Graphs:



(f)

Modello Power-Oriented Graphs: